

Distribuzioni di probabilità e loro caratteristiche

Distribuzioni discrete

Nome e parametri	Che cosa rappresenta	Massa, $p_X(x)$	Ripartizione, $F_X(x)$	Valore atteso, $\mathbb{E}[X]$	Varianza, $Var(X)$	Proprietà
Bernulliana, $B(p)$ con $p \in [0,1]$	L'esito di un esperimento binario (successo/fallimento) dove la probabilità del successo è pari al parametro p	$p^x(1-p)^{1-x} \cdot I_{\{0,1\}}(x)$	$(1-p)^{1-x} \cdot I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$	p	$p(1-p)$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Idempotenza: la potenza di una bernulliana è sempre la stessa bernulliana, ovvero $X^k = X, \forall k$
Binomiale, $B(n, p)$ con $p \in [0,1]$	Il numero totale di successi in una serie di n esperimenti bernulliani con parametro p	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \cdot I_{\{0,\dots,n\}}(x)$	$\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} \cdot I_{[0,n)}(x) + I_{[n,\infty)}(x)$	np	$np(1-p)$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Chiusura rispetto alla somma: se $X_1 \sim B(n_1, p)$ e $X_2 \sim B(n_2, p)$, allora si ha $(X_1 + X_2) \sim B(n_1 + n_2, p)$
Poisson, $P(\lambda)$ con $\lambda > 0$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Può essere usata per approssimare una binomiale quando n è molto grande e p è molto piccolo; in tal caso si usa $\lambda = np$ ▪ Una $X \sim P(\lambda t)$ rappresenta il numero di eventi che occorrono in un intervallo di tempo di lunghezza t all'interno di un processo di Poisson di intensità λ 	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot I_{\mathbb{N} \cup \{0\}}(x)$???	λ	λ	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Riproducibile: se $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$ e X_1, X_2 sono tra loro indipendenti, allora si ha $(X_1 + X_2) \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ ▪ Stesso valore atteso e varianza: $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X]$
Geometrica, $G(p)$ con $p \in (0,1]$	Il numero di insuccessi necessari prima che si verifichi il primo successo in una serie di esperimenti bernulliani i.i.d con parametro p	$p(1-p)^x \cdot I_{\mathbb{N} \cup \{0\}}(x)$	$(1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1}) \cdot I_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2} = \frac{\mathbb{E}[X]}{p}$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Assenza di memoria: quante prove si sono già fatte non influenza tra quanto ci sarà un insuccesso, ovvero: $P(X \geq x+y \mid X \geq x) = P(X \geq y)$

Nome e parametri	Che cosa rappresenta	Massa, $p_X(x)$	Ripartizione, $F_X(x)$	Valore atteso, $\mathbb{E}[X]$	Varianza, $Var(X)$	Proprietà
Ipergeometrica, $H(n, N, M)$	<ul style="list-style-type: none"> Il numero di “oggetti funzionanti” contenuti in un campione di n oggetti estratti <i>senza reimmissione</i> da un’urna contenente N oggetti funzionanti e M oggetti difettosi Può essere usata per approssimare una binomiale di parametri n e $\frac{N}{N+M}$ quando la dimensione dell’urna $N + M$ è molto grande. * 	$\frac{\binom{N}{x} \binom{M}{n-x}}{\binom{N+M}{n}} \cdot I_{\{0, \dots, n\}}(x)$???	$n \frac{N}{N+M}$	$\frac{nNM}{(N+M)^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$	<ul style="list-style-type: none"> *: questo deriva dal fatto che ogni binomiale può essere vista come l’estrazione con reimmissione di oggetti da un’urna in cui la percentuale di oggetti funzionanti è pari a p; a questo punto, se $N + M \rightarrow \infty$ estrarre con o senza reimmissione non fa una grande differenza.
Uniforme discreta, $U(n)$	L’esito di un esperimento casuale in cui ognuno degli n esiti ha la stessa probabilità di verificarsi; l’interpretazione richiede che ognuno degli esiti sia mappato su un numero naturale da 1 a n .	$\frac{1}{n} \cdot I_{\{0, \dots, n\}}(x)$	$\frac{\lfloor x \rfloor}{n} \cdot I_{[1, n)}(x) + I_{(n, \infty)}(x)$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	

Distribuzioni continue

Nome e parametri	Che cosa rappresenta	Densità, $f_X(x)$	Ripartizione, $F_X(x)$	Valore atteso, $\mathbb{E}[X]$	Varianza, $Var(X)$	Proprietà
Uniforme continua, $U(a, b)$	L’esito di un esperimento casuale che può restituire un qualunque valore nell’intervallo $[a, b]$.	$\frac{1}{b-a} \cdot I_{[a, b]}(x)$	$\frac{x-a}{b-a} \cdot I_{[a, b)}(x) + I_{(b, \infty)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	<ul style="list-style-type: none"> Probabilità che $X \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$: $P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

Nome e parametri	Che cosa rappresenta	Densità, $f_X(x)$	Ripartizione, $F_X(x)$	Valore atteso, $\mathbb{E}[X]$	Varianza, $Var(X)$	Proprietà
Normale, $N(\mu, \sigma)$ con $\sigma > 0$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Molti fenomeni naturali seguono un comportamento approssimativamente normale (es. statura). ▪ Per il teorema centrale del limite la sommatoria di un numero abbastanza grande ($n > 30$) di variabili aleatorie i.i.d. X_1, \dots, X_n si può approssimare come una variabile normale di valore atteso $\mu = n\mathbb{E}[X]$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{n}\sigma_X$ ▪ Come caso speciale del punto precedente, per n abbastanza grande una normale di parametri $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ può approssimare una variabile binomiale $B(n, p)$ essendo questa la somma di n bernulliane $B(p)$. 	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ <p>dove Φ è la funzione di ripartizione della normale standard e vale: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$</p>	μ	σ^2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Chiusura alle trasformazioni lineari: se $X \sim N(\mu, \sigma)$ e detta $Y := aX + b$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, si ha $Y \sim N(a\mu + b, a \sigma)$ ▪ Riproducibile: la somma di normali indipendenti $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ è anch'essa normale e ha valore atteso pari alla somma dei valori attesi $\sum_{i=1}^n \mu_i$ e deviazione standard pari alla radice quadrata positiva della somma delle varianze $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$ ▪ Standardizzazione: ogni normale può essere trasformata nella <i>normale standard</i> $Z \sim N(0,1)$ tramite la seguente formula: $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ▪ Formula sugli opposti di Φ: vale che $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$
Esponenziale, $E(\lambda)$ con $\lambda > 0$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Il tempo di attesa prima che si verifichi un evento casuale. ▪ L'intertempo tra due eventi successivi in un processo di Poisson di intensità λ. 	$\lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{\mathbb{R}^+}(x)$	$(1 - e^{-\lambda x}) \cdot I_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{E}[X]^2$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Assenza di memoria il tempo s già atteso non influenza tra quanto ancora si verificherà l'evento: $P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$.

	<ul style="list-style-type: none"> Il tempo di funzionamento di un sistema in serie dove ogni componente ha tempo di vita esponenziale (in virtù della proprietà di chiusura sul minimo). 					<ul style="list-style-type: none"> Chiusura rispetto al minimo: il minimo di variabili esponenziali indipendenti X_1, \dots, X_n di parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ è a sua volta una esponenziale di parametro $\sum_{i=1}^n \lambda_i$
--	--	--	--	--	--	---

Memorandum sulle proprietà delle variabili aleatorie discrete e continue

- Definizione della funzione di massa: $p_X(a) := P(X = a)$
- Proprietà fondamentale della funzione di massa: $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(i) = 1$
- Definizione della funzione di densità: $P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx$
- Proprietà fondamentale della funzione di densità: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- Nullità della probabilità in un punto: $P(X = a) = \int_a^a f_X(x) dx = 0$
- Definizione della funzione di ripartizione: $F_X(a) := P(X \leq a)$
- Probabilità in un intervallo: $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- Rapporto tra la funzione di ripartizione e di massa: $F_X(a) = \sum_{x \leq a} p_X(x)$
- Rapporto tra la funzione di ripartizione e di densità: $\frac{d}{da} F_X(a) = f_X(a)$
- Definizione di indipendenza tra variabili aleatorie: Due variabili aleatorie che riguardano lo stesso esperimento casuale si dicono indipendenti se, per ogni coppia di insiemi reali A e B , vale che $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$, ovvero se per ogni scelta di A e B gli eventi $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$ sono tra di loro indipendenti nel senso classico del termine.
- Indipendenza tra variabili aleatorie discrete: Due variabili aleatorie discrete sono indipendenti sse $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ oppure sse $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- Indipendenza tra variabili aleatorie continue: Due variabili aleatorie continue sono indipendenti sse $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ oppure sse $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- Definizione di valore atteso per le var. discrete: $\mathbb{E}[X] := \sum_i x_i p_X(i)$
- Definizione di valore atteso per le var continue: $\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$
- Calcolo alternativo del valore atteso: Se la variabile aleatoria è positiva, ovvero $X > 0$, vale la formula $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx$
- Valore atteso di una somma: $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- Definizione di varianza: $Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- Calcolo alternativo della varianza: $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- Non linearità della varianza: $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- Definizione di deviazione standard: $\sigma_X := \sqrt{Var(X)}$
- Non linearità della deviazione standard: $\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$
- Definizione di covarianza: $Cov(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$
- Calcolo alternativo della covarianza: $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- Non linearità della covarianza: $Cov(aX + b, Y) = a Cov(X, Y)$
- Additività della covarianza: $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
- Varianza di somma tra variabili aleatorie anche non indipendenti: $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n Cov(X_i, X_j)$
- Definizione del coefficiente di correlazione: $Corr(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
- Proprietà fondamentale del coeff. di corr.: $-1 \leq Corr(X, Y) \leq +1$
- Indipendenza alle scalature: $Corr(kX, kY) = Corr(X, Y)$