Lezione 2
Potenze. Radicali. Logaritmi

1. Potenze con esponente naturale

Definizione 2.1 Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, si chiama **potenza** n**-esima** del numero reale a, o **potenza con base** a **ed esponente** n, e si indica col simbolo a^n, il prodotto di n fattori uguali ad a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ volte}.$$

Se $a \neq 0$, si attribuisce significato anche alla potenza con esponente nullo, ponendo:

$$a^0 = 1.$$

Esempi 2.2

- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$
- $1^n = 1$, per qualunque $n \in \mathbb{N}$
- $0^7 = 0$
- 0^0 è privo di significato.

Ricordiamo le fondamentali proprietà delle potenze:

Proprietà 2.3 Siano a, b due numeri reali e n, m due numeri naturali. Allora:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (\text{se } a \neq 0 \text{ e } n \geq m)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n \qquad (\text{se } b \neq 0)$$

Queste proprietà vengono usate come regole di calcolo.

Esempi 2.4

- $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^{3+2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{1}{1024}$
- $\left((-2)^2\right)^3 = (-2)^6 = 64 = \left((-2)^3\right)^2$
- $2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3 = 8$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$
- $2^2 : 3^2 = (2:3)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Attenzione alle parentesi: in generale $(a^n)^m$ è diverso da $a^{(n^m)}$. Ad esempio, $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ mentre $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

Proprietà 2.5 Se vogliamo stabilire il *segno di* a^n, possiamo osservare che per ogni numero reale a e per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha che

- $a^n \geq 0$ se n è pari,
- a^n ha lo stesso segno di a se n è dispari.

Inoltre nel *confronto tra potenze con la stessa base* $a > 0$ valgono le seguenti proprietà:
dati due numeri naturali m, n tali che $0 \leq m < n$

- se $a > 1$, si ha $a^m < a^n$;
- se $0 < a < 1$, si ha $a^m > a^n$;

Invece nel *confronto tra potenze con ugual esponente* $n \geq 1$ vale la seguente proprietà:

- dati due numeri reali a, b se $0 \leq a < b$ si ha $a^n < b^n$.

ATTENZIONE. Se anche una sola delle basi è negativa tutte le proprietà prima citate possono non essere vere (vedi esempi 2.6).

Esempi 2.6 Confrontiamo le seguenti coppie di potenze:

- 2^3 e 2^5: la base 2 è > 1; gli esponenti sono 3 e 5 (e $3 < 5$). Quindi $2^3 < 2^5$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^5$: la base $\frac{1}{2}$ è < 1; gli esponenti sono come sopra. Quindi $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.
- $(-2)^3$ e $(-2)^5$: la base -2 è < 0. Ricordiamo che $(-2)^3 = -2^3$ e $(-2)^5 = -2^5$. Poiché $2^3 < 2^5$, si ha $-2^3 > -2^5$, cioè $(-2)^3 > (-2)^5$.
- $(-2)^3$ e $(-2)^4$: la base -2 è < 0. Ricordiamo che $(-2)^3 = -2^3$ e $(-2)^4 = 2^4$, e osserviamo che $-2^3 < 0 < 2^4$. Quindi $(-2)^3 < (-2)^4$.
- $(-3)^3$ e $(-2)^3$: le basi, -2 e -3, sono < 0. Ricordiamo che $(-3)^3 = -3^3$ e $(-2)^3 = -2^3$. Poiché $2^3 < 3^3$, si ha $-3^3 < -2^3$, cioè $(-3)^3 < (-2)^3$.
- $(-3)^2$ e $(-2)^2$: le basi, -2 e -3, sono < 0. Ricordiamo che $(-3)^2 = 3^2$ e $(-2)^2 = 2^2$, e osserviamo che $2^2 < 3^2$. Quindi $(-2)^2 < (-3)^2$.

2. Potenze con esponente intero relativo

Dato un numero naturale $n \geq 1$, per ogni base $a \neq 0$ definiamo la potenza con esponente negativo a^{-n} nel seguente modo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

In altre parole, a^{-n} è il reciproco di a^n. A questo punto siamo in grado di calcolare le potenze con ogni esponente intero relativo e base $a \neq 0$.

Definizione 2.7

Se $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ $\qquad a^k = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ volte}} & \text{se} \quad k > 0 \\ \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{-k \text{ volte}} & \text{se} \quad k < 0. \end{cases}$

Ricordiamo che per $k = 0$ si pone $a^k = 1$. Le usuali proprietà delle potenze elencate in **2.3** continuano a valere anche per $m, n \in \mathbb{Z}$.

Esempi 2.8

- $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- $(3^2)^{-1} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $\left(\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

Osservazione 2.9 La moltiplicazione di un numero, espresso in forma decimale, per 10^n ha l'effetto di spostare il punto decimale di n posizioni verso destra se n è positivo, di n posizioni verso sinistra se n è negativo.
Ad esempio, moltiplicando il numero 0.243 per $10^2 = 100$, otteniamo 24.3; moltiplicandolo invece per $10^{-2} = \frac{1}{100}$, otteniamo 0.00243.

Questa proprietà viene utilizzata per dare alla rappresentazione decimale di un numero a una forma più compatta e significativa, in quanto ne evidenzia l'ordine di grandezza: tale forma è detta **notazione scientifica**. Si procede così:

- cerchiamo la prima cifra diversa da zero (a partire da sinistra) della rappresentazione decimale di a, che chiamiamo **cifra significativa** di a;
- contiamo di quanti posti e in che verso dobbiamo spostare il punto decimale perché la cifra significativa diventi la cifra delle unità;
- usiamo la proprietà per scrivere il numero a come prodotto di una potenza di 10 per un numero che ha la cifra significativa di a come cifra delle unità.

Ad esempio, $a = 0.0031724$ e $b = 32015$ hanno entrambi 3 come cifra significativa. Tali numeri si scrivono in notazione scientifica come $a = 3.1724 \cdot 10^{-3}$ e $b = 3.2015 \cdot 10^4$.

Il fattore 10^n che compare nella scrittura in notazione scientifica, permette di individuare l'ordine di grandezza del numero. Ad esempio:
$3.5 = 3.5 \cdot 10^0$ è dell'ordine delle unità, cioè $10^0 \le 3.5 < 10^1$,
$3500 = 3.5 \cdot 10^3$ è dell'ordine delle migliaia, cioè $10^3 = 1000 \le 3500 < 10^4$,
$0.00264 = 2.64 \cdot 10^{-3}$ è dell'ordine dei millesimi, cioè $10^{-3} = \frac{1}{1000} \le 0.00264 < 10^{-2}$.
Si noti che sia le calcolatrici tascabili, che i più sofisticati elaboratori elettronici, rappresentano in memoria i numeri in notazione scientifica. La visualizzazione esterna sul display è nella notazione usuale, a meno che non si richieda esplicitamente che il risultato venga espresso in notazione scientifica o che il risultato stesso sia molto piccolo o molto grande. Di solito, per risparmiare spazio, il numero 10 è sostituito dal carattere E o semplicemente omesso. Si provi a calcolare 3^4, 3^{30}, 3^{-5} e 3^{-16} con la propria calcolatrice tascabile.

3. Radici di numeri reali

Ci chiediamo se, dati un numero reale non nullo [1] a e un numero intero $n > 1$, esiste un numero reale b tale che sia $b^n = a$; cioè se, dati a ed n, è possibile esprimere a come potenza n-esima di un altro numero b.

Se $a < 0$ dovremo distinguere il caso in cui n è un numero pari da quello in cui è un numero dispari. Invece se $a > 0$ la risposta è sempre affermativa e possiamo anche chiedere che il numero b che stiamo cercando sia positivo. Precisamente,

$$\boxed{\text{se } a > 0 \text{ esiste un unico numero } b > 0 \text{ tale che } b^n = a.}$$

Questo numero si chiama [2] **radice n-esima di** a e si scrive $b = \sqrt[n]{a}$.

Se $a < 0$ ed n è un numero *pari* non c'è nessun numero reale b tale che $b^n = a$: infatti b^n è un numero ≥ 0!
Se $a < 0$ ed n è un numero *dispari* esiste un unico numero $b < 0$ tale che $b^n = a$, $b = -\sqrt[n]{-a}$. Denoteremo anche questo numero con $\sqrt[n]{a}$.

Nella scrittura $\sqrt[n]{a}$, n è detto **indice**, a **radicando**.

Esempi 2.10

- $\sqrt{4} = 2$ (infatti $4 = 2^2$)
- $\sqrt[4]{3}$ è un numero reale che appartiene all'intervallo $(1, 2)$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt{-81}$ non ha significato.
- $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = |-7|$ e più in generale: $\sqrt{a^2} = |a|$ (e <u>non</u> a).
  Infatti, qualunque sia il segno di a, risulta $a^2 \ge 0$, e quindi esiste $\sqrt{a^2}$ ed è un numero ≥ 0.

---

1) Trascuriamo il caso $a = 0$, poiché è ovvio che il solo numero b tale che $b^n = 0$ è $b = 0$, cioè, con la terminologia che introduciamo in questo paragrafo: $\sqrt[n]{0} = 0$.

2) Talora il fatto che il numero b cercato è positivo viene sottolineato chiamando **aritmetica** questa radice.

È importante osservare che ogni numero reale *positivo* (o nullo) ammette sempre una e una sola radice n-esima. Essa è un numero *positivo* (o nullo) reale che verifica l'uguaglianza $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Allora, volendo interpretare $\sqrt[n]{a}$ come una potenza e volendo che continui a valere la proprietà della "potenza di potenza", scriveremo

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

D'ora in poi la base nelle potenze e il radicando nei radicali saranno sempre > 0

4. Potenze con esponente razionale

Dato il numero reale $a > 0$ e due numeri interi $m > 0$ e $n > 0$ risulta $(a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Ciò suggerisce di interpretare questo numero reale > 0 come una potenza. Precisamente, dato il numero reale $a > 0$ e la frazione $\frac{m}{n}$, con $m > 0$ e $n > 0$, definiamo

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Poniamo inoltre

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Osservazione 2.11 Osserviamo che dato un numero reale $a > 0$ e un numero intero positivo r, si ha $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nr]{a^r}$. Ad esempio: $\sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[20]{a^5} = \sqrt[8]{a^2} = \ldots.$ Più in generale, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$, cioè

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}.$$

Detto diversamente, se due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{mr}{nr}$ rappresentano lo stesso numero razionale, le due corrispondenti potenze di base a sono uguali. Dunque abbiamo appena definito le *potenze con base reale* $a > 0$ *ed esponente razionale.*

Anche per le potenze con esponente frazionario valgono le proprietà **2.3.** Ad esempio:
siano a e b reali > 0 e m, n, p, q interi ≥ 1; allora

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, ossia $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$
- $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$, ossia $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$, ossia $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m b^m}$.

Vedere i radicali come potenze permette di risolvere una serie di piccoli problemi collegati con le operazioni sui radicali riconducendoli a più semplici problemi di calcolo frazionario (eliminando la necessità di ricordare le regole relative al calcolo dei radicali). Ad esempio :

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a}{a^{3/5}} = a^{1-(3/5)} = a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}.$$

Altre situazioni del genere vengono illustrate negli esempi successivi.

L'osservazione 2.11 è utile *per confrontare (o moltiplicare o dividere) due potenze con esponente frazionario diverso o due radicali con indice diverso.*

Esempio 2.12

- Se vogliamo confrontare $3^{1/6}$ e $2^{1/4}$, scriviamo i due esponenti in modo che abbiano lo stesso denominatore: $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ e $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Ora $3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{12}} = (3^2)^{\frac{1}{12}} = 9^{\frac{1}{12}}$, mentre $2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = (2^3)^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{12}}$. Visto che $9 > 8$, risulta $3^{1/6} > 2^{1/4}$.
- Analogamente, $3^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{12}} \cdot 8^{\frac{1}{12}} = 72^{\frac{1}{12}}$.
- Se vogliamo stabilire qual è il numero più grande tra $\sqrt[3]{9}$ e $\sqrt{5}$ osserviamo che $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{2/3}$ e $\sqrt{5} = 5^{1/2}$. Scriviamo i due esponenti in modo che abbiano lo stesso denominatore: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Ora $\sqrt[3]{9} = 3^{4/6} = (3^4)^{1/6} = (81)^{1/6}$ mentre $\sqrt{5} = 5^{3/6} = (5^3)^{1/6} = (125)^{1/6}$. Visto che $81 < 125$, risulta $\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$.
- Analogamente, $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{(125)^{1/6}}{(81)^{1/6}} = \left(\dfrac{125}{81}\right)^{1/6} = \sqrt[6]{\dfrac{125}{81}}$.

La stessa osservazione 2.11 si applica quando si vuole *portare sotto il segno di radice un valore esterno.*

Esempi 2.13

- Per ridurre ad un unico radicale il numero $2\sqrt[3]{5}$, basta riscrivere 2 come un radicale (quello con lo stesso indice del radicale che lo segue):
$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}.$$
- Similmente, per ridurre ad un unico radicale $20\sqrt{3}$:
$$20\sqrt{3} = \sqrt{400 \cdot 3} = \sqrt{1200}.$$

Ancora la stessa proprietà si applica (a rovescio) per semplificare i radicali, nel senso di "portare fuori" dal segno di radice tutti i fattori possibili.

Esempi 2.14 Semplifichiamo i seguenti radicali

- $\sqrt[3]{80}$. Scomponendo 80 in prodotto di potenze di numeri primi si ottiene: $80 = 2^4 \cdot 5$, quindi: $\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{10}$;
- $\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$;
- $\sqrt{a^4 b} = a^2\sqrt{b}$;
- $\sqrt[8]{a^9 b^{10} c^4} = \sqrt[8]{a^8 b^8 a b^2 c^4} = ab\sqrt[8]{ab^2c^4}$, se $a > 0$ e $b > 0$ [(3)].

---

3) Invece senza questa limitazione, cioè se a, b, c sono numeri reali qualunque si ha $\sqrt[8]{a^9 b^{10} c^4} = |ab|\ \sqrt[8]{ab^2 c^4}$

5. Potenze con esponente reale

Prendiamo in esame l'uguaglianza

$$2^6 = 64.$$

Abbiamo visto che un modo di leggerla è dire che "il numero che elevato alla sesta potenza dà 64 è 2", cioè

$$\sqrt[6]{64} = 2.$$

Abbiamo cioè fissato la nostra attenzione sull'esponente 6 della potenza e ci siamo chiesti qual è la base in corrispondenza alla quale otteniamo 64.
Possiamo però anche fissare la nostra attenzione sulla base 2 e chiederci a quale esponente la dobbiamo elevare per ottenere 64 (ovviamente 6).
Prima rispondevamo alla domanda

"Qual è la *radice sesta* di 64?"

ora invece rispondiamo alla domanda

"Qual è il *logaritmo in base* 2 di 64?"

Non sempre la domanda "qual è l'esponente che devo dare a b per ottenere a?" ammette risposta.
Ad esempio, non esiste alcun c tale che $1^c = 64$, poiché $1^c = 1$ per ogni c.
Ancora, non esiste nessun numero razionale $c = \frac{m}{n}$ tale che $3^{\frac{m}{n}} = 64$, perché questo significherebbe $3^m = 64^n = 2^{6n}$ e ciò non è possibile, in quanto le potenze di 2 sono tutte diverse dalle potenze di 3.

Questa seconda difficoltà può essere aggirata dando un senso alla scrittura

$$a^b$$

con b numero reale qualunque. Senza entrare nel dettaglio della definizione, osserviamo solo tre cose fondamentali.

1. in questa definizione a *deve essere un numero reale positivo* (diverso da zero), poiché per definire a^b si considerano numeri razionali r che approssimano b con precisione via via maggiore e si calcolano poi le potenze (con esponente razionale) a^r: ora, noi sappiamo che, ad esempio, $a^{\frac{1}{2}}$ ha senso solo per $a \geq 0$, mentre $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ ha senso solo per $a \neq 0$ e quindi, dovendo tener conto di entrambi i tipi di condizioni, si deve chiedere $a > 0$;

2. la potenza a^b è sempre un numero > 0 qualunque sia la base (reale positiva) a e l'esponente reale b;

3. per le potenze con base reale > 0 ed esponente reale, valgono le proprietà delle potenze. In particolare

$$\boxed{\begin{array}{c} a^b \cdot a^c = a^{b+c} \\ a^c \cdot b^c = (ab)^c \\ (a^b)^c = a^{bc} \end{array}}$$

NOTA Queste sono nella loro forma più generale *le proprietà algebriche delle potenze*!

A parte le difficoltà teoriche insite nella definizione di potenza con base ed esponente reale, rimane il problema pratico di come (almeno) stimare il valore di un numero come $3^{\sqrt{2}}$ (o peggio $\pi^{\sqrt{2}}$). Esaminiamo solo il primo caso che è meno complicato. L'approssimazione decimale per difetto di $\sqrt{2}$ arrestata alla quarta cifra decimale è 1.4142, cioè

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \qquad\qquad 1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \qquad\qquad \text{ecc.}$$

Le proprietà di confronto tra potenze ci dicono che se $a > 1$ e $b < c$ anche $a^b < a^c$ e quindi:

$$3^{1.4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5} \qquad\qquad 3^{1.41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.42} \qquad\qquad \text{ecc.}$$

Visto che $3^{1.4} = 3^{7/5} = 4.6555...$ e $3^{1.5} = 3^{3/2} = 5.1961...$ sicuramente $3^{\sqrt{2}}$ è compreso tra questi due valori. Quanto più precisa è l'approssimazione dell'esponente tanto più piccolo è l'intervallo in cui $3^{\sqrt{2}}$ risulta compreso. Ad esempio se consideriamo $3^{1.4142} = 4.7287...$ e $3^{1.4143} = 4.7292...$, evidenziamo un intervallo in cui cade $3^{\sqrt{2}}$ di ampiezza inferiore a 10^{-3}. Si può dire a questo punto che le prime cifre della rappresentazione decimale di $3^{\sqrt{2}}$ sono 4.72... .
Questo è sostanzialmente ciò che fa una calcolatrice quando trova per $3^{\sqrt{2}}$ l'approssimazione 4.7288...

È adesso chiaro che dato un qualunque esponente reale b e un numero reale positivo c, è sempre possibile trovare una (e una sola) base a tale che valga l'uguaglianza $a^b = c$: la base $a = c^{1/b}$. Ad esempio, perché risulti $a^{\sqrt{5}} = \pi$, si deve prendere $a = \pi^{1/\sqrt{5}}$.

6. Logaritmi

Torniamo invece all'altro problema accennato all'inizio del precedente paragrafo:
data la base reale $a > 0$ e $\neq 1$ e il numero reale $c > 0$ esiste un esponente reale b tale che $a^b = c$?
Questo problema ha sempre una e una sola soluzione: l'esponente b cercato si chiama **logaritmo in base** a **di** c e si indica con il simbolo

$$\log_a c.$$

Quindi

$$\boxed{\log_a c = b \qquad \text{se e solo se} \qquad a^b = c.}$$

Esempi 2.15

- $\log_3 9 = 2$ infatti l'esponente che dobbiamo dare a 3 per ottenere $9 = 3^2$ è 2
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ infatti l'esponente che dobbiamo dare a $\dfrac{1}{2}$ per ottenere $4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ è -2
- $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$ infatti l'esponente che dobbiamo dare a 10 per ottenere $\dfrac{1}{1000} = 10^{-3}$ è -3
- $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ infatti l'esponente che dobbiamo dare a 25 per ottenere $5 = 25^{\frac{1}{2}}$ è $\dfrac{1}{2}$.

ATTENZIONE. Fissata la base $a > 0$ e $\neq 1$ possiamo calcolare $\log_a c$ <u>solo se $c > 0$</u>. Scritture come $\log_a 0$ o $\log_a (-1)$ sono <u>prive di senso</u>.

Proprietà dei logaritmi

Direttamente dalla definizione

$$\log_a c = b \qquad \text{se e solo se} \qquad a^b = c$$

si vede che

$$\log_a 1 = 0 \qquad\qquad \log_a (a) = 1 \qquad\qquad a^{\log_a c} = c$$

Inoltre, se $x > 0$ e $y > 0$ (e come sempre $a > 0$ e $\neq 1$) si ha che

$\log_a x = \log_a y$ se e solo se $x = y$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \left(x^d\right) = d \cdot \log_a x$

Infine, se $0 < x \leq y$ si ha: $\log_a x \leq \log_a y$ se $a > 1$
$\log_a x \geq \log_a y$ se $0 < a < 1$

Esempi 2.16

- $\log_2 (1/5) = \log_2 (5^{-1}) = -\log_2 5$
- $\log_{10} (37/7) = \log_{10} (37 \cdot 7^{-1}) = \log_{10} 37 + \log_{10} (7^{-1}) = \log_{10} 37 - \log_{10} 7$
- $\log_{16} (81/25) = \log_{16} \left((9/5)^2\right) = 2 (\log_{16} (9/5)) = 2 (\log_{16} 9 - \log_{16} 5)$
- $3 \log_2 \left(\sqrt[6]{10}\right) = 3 \log_2 \left(10^{1/6}\right) = \frac{1}{2} \log_2 10 = \frac{1}{2} \log_2 (2 \cdot 5) = \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 5) = \frac{1}{2} (1 + \log_2 5)$

Nell'ultimo esempio avremmo potuto anche scegliere di lavorare in quest'altro modo: $3 \log_2 \left(\sqrt[6]{10}\right) = \log_2 \left(\sqrt[6]{10}\right)^3 = \log_2 \left(\sqrt{10}\right)$: ma se ci fermiamo qui ci riesce difficile capire quanto vale quel logaritmo, mentre riscrivendolo come $\frac{1}{2} (1 + \log_2 5)$ capiamo che deve valere un po' più di $\frac{1}{2} (1 + 2) = 1.5$, visto che $2^2 = 4 < 5$ e quindi $2 = \log_2 (2^2) < \log_2 5$. Come sempre, la scelta di quale semplificazione fare (cioè di quale proprietà applicare) dipenderà dall'uso che si vuol fare del logaritmo!

Esempi 2.17

- $\log_a (1/9) + \log_a 36 + \log_a 24 = \log_a (9^{-1}) (9 \cdot 4) \cdot (8 \cdot 3) = \log_a (2^5 \cdot 3) = 5 \log_a 2 + \log_a 3$
- $\log_a \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) = \log_a 4 - \log_a 3 + \log_a \pi + 3 \log_a r \qquad (r > 0)$
- $-\log_2 (a) + \log_2 (a^3) + \log_2 (a^5) - \log_2 (a^7) = (-1 + 3 + 5 - 7) \log_2 a = 0 \qquad (a > 0).$

Regola del cambiamento di base Spesso è utile saper convertire il logaritmo da una base ad un'altra. Ad esempio le calcolatrici scientifiche hanno di solito due "funzioni" che danno rispettivamente il logaritmo in base 10 e il cosiddetto logaritmo naturale, ma non calcolano il logaritmo nelle altre basi. Date due basi a, b (con $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$) si ha, per ogni numero reale positivo x

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Esempio 2.18 Se vogliamo trasformare $\log_{10} 3$ in base 2, basta scrivere $\log_{10} 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 10}$. Se invece vogliamo calcolare con la calcolatrice $\log_2 34$ basta scrivere $\log_2 34 = \dfrac{\log_{10} 34}{\log_{10} 2}$

Osservazione 2.19 Ricordiamo che $\log_a a = 1$ e $\log_a \left(\dfrac{1}{a}\right) = -1$. Quindi, se nella formula del cambiamento di base poniamo

- $x = a$ ricaviamo: $\quad \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
- $b = \dfrac{1}{a}$ ricaviamo: $\quad \log_{\frac{1}{a}} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \left(\dfrac{1}{a}\right)} = -\log_a x.$

La prima formula può servire per fornire qualche risultato in forma più compatta; la seconda è assai più utile poiché ci dice che quando dovremo studiare i logaritmi basterà che ci occupiamo di quelli con base $a > 1$, visto che se $0 < a < 1$ il reciproco $\dfrac{1}{a}$ di a è > 1.

Esempio 2.20 Vogliamo calcolare $\dfrac{\log_2 5 \cdot \log_{10} 0.5}{1 + \log_5 2}$. Risulta

$$1 + \log_5 2 = \log_5 5 + \log_5 2 = \log_5 10 = \frac{1}{\log_{10} 5}; \qquad \log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}; \qquad \log_{10} 0.5 = -\log_{10} 2$$

e quindi la frazione si può riscrivere come $(\log_{10} 5) \cdot \left[-\log_{10} 2 \cdot \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}\right] = -\left(\log_{10} 5\right)^2$.

Osservazione 2.21 L'utilizzo dei logaritmi è molto frequente in Matematica. In passato, quando non c'erano mezzi di calcolo automatico, erano un potente mezzo per semplificare il calcolo di espressioni complicate, visto che trasformano moltiplicazioni e divisioni in somme e sottrazioni, potenze in prodotti, radici in rapporti. In quel contesto si sono affermati i logaritmi in base 10. Ciò è logico, poiché quando si scrivono i numeri in forma decimale è facile individuare almeno l'ordine di grandezza dei logaritmi. Ad esempio $\log_{10}(173)$ è sicuramente un numero compreso tra 2 e 3, visto che $10^2 < 173 < 10^3$; invece $\log_{10}(0.0256)$ è sicuramente un numero compreso tra -2 e -1, visto che $10^{-2} < 0.0256 < 10^{-1}$. Come di consueto, nelle lezioni successive il logaritmo in base 10 di c viene indicato più semplicemente con $\mathrm{Log}(c)$. Invece il logaritmo naturale di c, che viene indicato di solito con $\ln(c)$ o anche con $\log(c)$, ha origini più legate all'Analisi Matematica (e non se ne tratterà in queste lezioni).