Argomento 8
Integrali indefiniti

8.1 Integrale indefinito

Definizione 8.1 Assegnata la funzione f definita nell' intervallo I, diciamo che una funzione F con $F : I \to \mathbb{R}$ è **una primitiva di f in I** se

$$\begin{array}{ll} i) & F \text{ è derivabile in } I; \\ ii) & F'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } \ x \in I. \end{array}$$

Per *verificare* se una data funzione F è una primitiva di f nell'intervallo I bisogna quindi controlllare che F sia derivabile in I e che la sua derivata coincida con f in tutti i punti di I.

Esempio 8.2 La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
Infatti, la funzione $\sin x$ è sempre derivabile e inoltre si ha che $(\sin x)' = \cos x$, per ogni x.

Data una funzione f, cercare una sua primitiva in I significa quindi cercare una funzione derivabile F la cui derivata coincida con f (ossia, la ricerca delle primitive è il procedimento "inverso" della derivazione).
Ci poniamo le seguenti domande:

1. data una funzione f esiste sempre una sua primitiva in I?
2. se una primitiva esiste, è unica?
3. come trovarla?

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (vedi Arg. 9) risponde alla prima di queste domande implicando che vale la seguente:

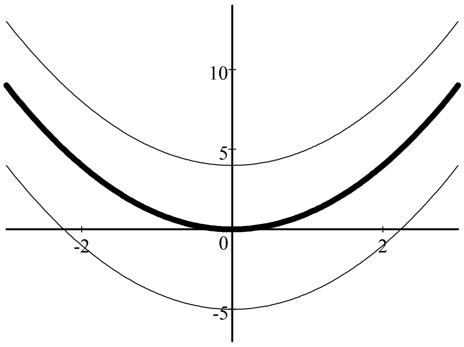
Proposizione 8.3 *Ogni funzione continua in un intervallo I ammette una primitiva in I.*

Quindi almeno per le funzioni *continue* siamo certi dell'esistenza di una primitiva.
In realtà, non solo di una. Infatti osserviamo che le funzioni $F(x) = \sin x$; $G(x) = \sin x + 2003$; $H(x) = \sin x - \pi$; ... sono tutte primitive di $f(x) = \cos x$.
In generale, vale:

Proposizione 8.4 *Se una funzione f ammette una primitiva F in un intervallo I, allora:*
i) ogni funzione della forma $F + c$ è anch'essa una primitiva di f, comunque si scelga la costante reale c;
ii) ogni altra primitiva G di f in I ha la forma $G = F + c$ per un'opportuna costante reale c.

In altre parole, se la funzione f ammette una primitiva F in I, ne ammette infinite che sono esattamente tutte quelle che si ottengono aggiungendo alla funzione F una qualunque costante[1]. Cioè, il grafico di ognuna di esse si ottiene da quello di F per mezzo di una traslazione verticale. Ad esempio, nella prossima figura sono evidenziati i grafici delle funzioni $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x^2 - 5$; queste tre funzioni sono primitive, in $\mathbb{R}$, della stessa $f(x) = 2x$.

[1]Questo è una conseguenza del Teorema di Lagrange (vedi Arg. 6).



Definizione 8.5 Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, l'insieme delle sue primitive si chiama **integrale indefinito** di f e si indica con il simbolo $\int f(x)\, dx$.
Quindi,

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \{F : I \to \mathbb{R} \text{ derivabili in } I \text{ e tali che } F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I\}.}$$

La Proposizione 8.4 può essere riformulata dicendo che:

Se F è una primitiva di una data funzione f, allora

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c, \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.}$$

Nel seguito, con la lettera c indicheremo un'arbitraria costante reale.

Esempio 8.6 Derivando i termini a secondo membro possiamo verificare che:

- $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + c.$
- $\displaystyle\int 2x\, dx = x^2 + c.$
- $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + c.$
- Nell'intervallo $I_1 = (0, +\infty)$ una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log x$; invece nell'intervallo $I_2 = (-\infty, 0)$ una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log(-x)$. Per brevità si usa scrivere

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c,$$

e questa formula vale in ogni intervallo che <u>non</u> contiene $x = 0$.

Il calcolo esplicito delle primitive può, in generale, rappresentare un problema non banale. Certamente conosciamo le primitive di molte funzioni elementari, utilizzando la tabella delle loro derivate (vedere Arg. 6).

8.2 Tabella delle primitive "immediate"

$\displaystyle\int 1\ dx = x + c$	(1)
$\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$	(2)
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \log\lvert x\rvert + c$	(3)
$\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$	(4)
$\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1$	(5)
$\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + c$	(6)
$\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	(7)
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + c$	(8)

Esempio 8.7 Utilizzando la formula (2) ricaviamo:

- $\displaystyle\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c;$
- $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\, x^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\, x^{1-\frac{1}{2}} + c = 2\, x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c;$
- $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\, x^{1+\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} + c$

Mentre con la formula (5) otteniamo:

- $\displaystyle\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\log 2} + c.$

Osservazione. Notiamo che:

- $\displaystyle\int \cos(x+5)\ dx\ = \sin(x+5)+c$
- $\displaystyle\int e^{3x}\, dx\ = \frac{1}{3}e^{3x}+c.$

Dagli esempi precedenti possiamo dedurre che: se F è una primitiva della funzione f e a e b sono due numeri reali, con $a \neq 0$, si ha

$$\int f(ax+b)\ dx\ = \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Questa formula è un caso particolare del metodo di integrazione per sostituzione.

Proprietà dell'integrale indefinito

Per determinare le primitive di funzioni che si ottengono sommando tra loro le funzioni elementari, e/o moltiplicandole per una costante, è utile la seguente

Proposizione 8.8 *Siano f e g continue in un intervallo I, allora*

1) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)\ dx$, *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Esempio 8.9 Determiniamo l'integrale indefinito di:

- $f(x) = 3\cos x\ + \dfrac{5}{\sqrt{x}};$

$$\int \left(3\cos x\ + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)\ dx\ =\ 3\int\ \cos x\, dx\ + 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =\ 3\sin x + 10\sqrt{x}+c.$$

- $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x - \dfrac{1}{3}e^{x};$

$$\int \left(\frac{4}{x} + 2x - \frac{1}{3}e^{x}\right)\ dx\ = 4\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int x\, dx - \frac{1}{3}\int e^{x}\, dx\ =\ 4\log|x| + x^2 - \frac{1}{3}e^{x} + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3};$

$$\int \left(\frac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}\right)\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx + 2\int x^{-3}\ dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + c.$$

- $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{x};$

$$\int \frac{(x+2)^3}{x}\ dx = \int x^2\ dx + 6\int x\ dx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\log|x| + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x}{x-1};$

$$\int \frac{x}{x-1}\ dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}\ dx = \int dx + \int \frac{1}{x-1}\ dx = x + \log|x-1| + c.$$

8.3 Integrazione per sostituzione

Date le funzioni f e g, ricordiamo (vedi Arg. 6) che la derivata della funzione composta $(g \circ f)$, quando ha senso, è data da:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Leggendo da destra a sinistra questa formula possiamo quindi ricavare che le primitive di una funzione che si presenta nella forma $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ sono le funzioni $(g \circ f)(x) + c = (g(f(x)) + c$, ossia

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\ dx = g(f(x)) + c.$$

Nella successiva tabella sono stati riportati alcuni esempi di integrazione di funzioni composte della forma $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ quando la funzione g è una particolare funzione elementare.

$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\ dx = \dfrac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1$	(9)
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log\lvert f(x)\rvert + c$	(10)
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = e^{f(x)} + c$	(11)
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \qquad a > 0,\ a \neq 1$	(12)
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\ dx = \sin(f(x)) + c$	(13)
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))\ dx = -\cos(f(x)) + c$	(14)
$\int \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\ dx = \arctan(f(x)) + c$	(15)

Esempio 8.10 Per determinare le primitive della funzione $h(x) = (e^x + 2x)\cos(e^x + x^2)$ riconosciamo inizialmente che $h(x)$ è della forma $f'(x)\cos(f(x))$ con $f(x) = e^x + x^2$.
Quindi, dalla (13) si ha

$$\int (e^x + 2x)\cos\left(e^x + x^2\right)\ dx = \sin\left(e^x + x^2\right) + c.$$

Esempio 8.11 Determiniamo le primitive delle seguenti funzioni.

- $h(x) = (\sin x)^3 \cdot \cos x$.

La funzione da integrare si può pensare come $f'(x)\,[f\,(x)]^3$ con $f\,(x) = \sin x$. Quindi per la (9) della tabella precedente (con $a = 3$)

$$\int (\sin x)^3 \cdot \cos x \; dx = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c.$$

- $h(x) = (3x^2 + 2)\, e^{x^3+2x}$.

La funzione da integrare è della forma $f'(x)e^{f(x)}$ con $f(x) = x^3 + 2x$. Quindi, per la (11) :

$$\int \left(3x^2 + 2\right) e^{x^3+2x} dx = e^{x^3+2x} + c.$$

- $h(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Qui la funzione integranda è della forma $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ con $f(x) = \sin x$. Quindi, dalla (10) otteniamo

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \;=\; \log|\sin x| + c.$$

Le formule della tabella precedente sono casi particolari della seguente formula generale che si ottiene ancora dalla regola di derivazione di una funzione composta:

Se G è una primitiva di g allora $\int (g(f(x)) \cdot f'\,(x)\; dx = G\,(f\,(x)) + c$

Come utilizzare questa formula? Risulta conveniente operare il cambiamento di variabile $t = f\,(x)$, che permette di sostituire l'espressione $f'\,(x)\,dx$ con il termine dt. Quindi[2]

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\; dx \qquad \text{diventa} \qquad \int g(t)\, dt. \tag{$*$}$$

Una volta calcolato quest'ultimo integrale indefinito, occorre risostituire $f(x)$ al posto di t.

Esempio 8.12 Calcoliamo le primitive di:

- $h(x) = (x+4)^{17}$.

In questo caso non occorre svolgere tutti i calcoli. Infatti ponendo $t = x + 4$, si ha $dt = dx$ e poichè $\int t^{17}\; dt = \frac{1}{18}t^{18} + c$ si ottiene:

$$\int (x+4)^{17}\, dx = \frac{1}{18}\,(x+4)^{18} + c.$$

- $h(x) = \cos(2x+3)$.

Ponendo $t = 2x + 3$, si ha $dt = 2dx$, e poichè $\sin t$ è una primitiva di $\cos t$, abbiamo

$$\int \cos(2x+3)\, dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c.$$

[2]Mostrare in modo approfondito la relazione $dt = f'\,(x)\,dx$ esula dallo scopo di queste note. Ai fini del calcolo di primitive può però bastare la semplice regola "formale": $t = f\,(x) \implies dt = f'\,(x)\,dx$.

- $h(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}}$.

Posto $t = x^2+3x+5$, da cui $dt = (2x+3)\ dx$, si ottiene:

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}}\ dx = -\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+5}} + c$$

- $h(x) = xe^{x^2} dx$.

Ponendo $t = x^2$, $dt = 2x\, dx$, si perviene a:

$$\int xe^{x^2} dx \ = \ \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c.$$

- $h(x) = \cos^2 x$.

Ricordando le identità trigonometriche $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ e $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, e ponendo $t = 2x$ si ottiene

$$\int \cos^2 x\ dx = \ \frac{1}{2}\, (\cos x \sin x + x) + c.$$

In modo del tutto analogo si ha anche che

$$\int \sin^2 x\ dx = \ \frac{1}{2}\, (-\cos x \sin x + x) + c.$$

8.4 Integrazione per parti

Abbiamo visto (Arg. 6) che se f e g sono derivabili in I lo è anche il loro prodotto e

$$(f \cdot g)'\,(x) = f'\,(x) \cdot g(x) + f\,(x) \cdot g'(x).$$

Questa formula può essere riletta come:

$$f\,(x) \cdot g\,(x) = \int f'\,(x) \cdot g(x)\ dx + \int f\,(x) \cdot g'(x)\ dx$$

e quindi

$$\boxed{\int f\,(x) \cdot g'(x)\ dx = f\,(x) \cdot g\,(x) - \int f'\,(x) \cdot g(x)\ dx.} \qquad (\clubsuit)$$

La ($\clubsuit$) non risolve il problema di determinare una primitiva di $f\,(x) \cdot g'(x)$, ma lo trasforma nel problema di determinare una primitiva di $f'\,(x) \cdot g(x)$; talvolta, se siamo fortunati e operiamo attentamente, questo è più semplice.
(In ($\clubsuit$) il termine $f(x)$ si chiama *fattore finito*, mentre $g'(x)$ è detto *fattore differenziale*).

Esempio 8.13 $\quad \displaystyle\int xe^x\ dx$

Applicando la formula di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ottiene

$$\int xe^x\, dx \ = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + c = (x-1)\, e^x + c.$$

Esempio 8.14 $\displaystyle\int \log x\,dx$

Applicando la formula di integrazione per parti con $f(x) = \log x$ e $g'(x) = 1$ si ha:

$$\int 1 \cdot \log x\,dx \;=\; x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \;=\; x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$$

Esempio 8.15 $\displaystyle\int x\sin x\;dx$

In questo caso è molto facile ricavare una funzione $g(x)$ sia scegliendo $g'(x) = x$ che scegliendo $g'(x) = \sin x$. Nell'applicazione della formula (♣) con la scelta $g'(x) = x$ si ottiene

$$\int x\sin x\;dx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\;dx$$

ma purtroppo la nuova funzione da integrare ha un aspetto più ostile di quella di partenza. Invece la scelta di $g'(x) = \sin x$ porta a

$$\int x\sin x\;dx = -x\cos x + \int \cos x\;dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Può anche capitare di dover applicare la formula (♣) più di una volta come nel seguente

Esempio 8.16 $\displaystyle\int e^x\cos x\;dx$

In questo caso la scelta $f(x) = e^x$ porta a:

$$\int e^x\cos x\;dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\;dx$$

Dobbiamo ora determinare una primitiva di $e^x\sin x$. Riapplicando (♣), ancora con $f(x) = e^x$ si ottiene

$$\int e^x\sin x\;dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\;dx.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\;dx &= e^x\sin x - \int e^x\sin x\;dx\\ &= e^x\sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x\cos x\;dx\right)\\ &= e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x\cos x\;dx.\end{aligned}$$

Da cui

$$2\int e^x\cos x\;dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

e quindi si ottiene

$$\int e^x\cos x\;dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c.$$

8.5 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste un metodo generale che permette di calcolare l'integrale indefinito di funzioni razionali, ossia di funzioni che sono il rapporto di due polinomi $N(x)$ e $D(x)$

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

purché si riesca a scomporre il denominatore in fattori di primo grado e/o fattori irriducibili di secondo grado. Per polinomi reali questa scomposizione esiste sempre, e la sua determinazione richiede la conoscenza delle radici del polinomio (cosa che non è sempre realizzabile in modo concreto).
Ricordiamo che se il grado del numeratore $N(x)$ è maggiore o uguale al grado di $D(x)$ la divisione tra polinomi (vedi MiniMat, Lezione 3) porta a

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

dove $Q(x), R(x)$ sono polinomi, e il grado di $R(x)$ è inferiore a quello di $D(x)$. Perciò, poichè il calcolo di $\int Q(x)\,dx$ è immediato, ci occupiamo solo di frazioni del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ dove il grado di $N(x)$ è inferiore a quello di $D(x)$.
Non esponiamo il metodo in generale per il calcolo di

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

ma ci limitiamo ad illustrare alcuni esempi, in cui il denominatore $D(x)$ ha grado al più 2.

1. Se il denominatore è un polinomio di primo grado la funzione ha la forma

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}$$

con $\alpha \neq 0$. In questo caso l'integrazione è semplice e si ottiene

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}\log|\alpha x + \beta| + c$$

2. Consideriamo il caso in cui il denominatore ha grado 2 (ossia $D(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, con $\alpha \neq 0$); in questo caso il numeratore ha grado minore o uguale ad 1. Il procedimento da seguire per determinare l'integrale generale è diverso a seconda che il denominatore abbia discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ positivo, nullo o negativo.

   (a) Caso $\Delta > 0$. La frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{mx+q}{x^2+\beta x+\gamma}$ può sempre essere scritta come somma di due frazioni con denominatori di I grado. Per farlo, è sufficiente trovare le due radici di $D(x)$. Ad esempio:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

   con A e B costanti opportune. Per determinare queste costanti, sviluppiamo i calcoli dell'ultima uguaglianza:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

da cui

$$x + 1 = (A + B)x - 2A - B \ .$$

Ciò deve valere per ogni x, per cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases} .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}\, dx &= \int \frac{(-2)}{x-1}\, dx + \int \frac{3}{x-2}\, dx = \\ &= -2 \log|x-1| + 3 \log|x-2| + c \end{aligned}$$

(b) Caso $\Delta = 0$. In questo caso $D(x)$ è il quadrato di un binomio di I grado. Analogamente a prima, cerchiamo due costanti A e B in modo che $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ si scriva come somma di due frazioni; ad esempio:

$$\frac{x+3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x-1)^2}.$$

Risolvendo il sistema che si ottiene ponendo che, per ogni x, valga l'uguaglianza

$$Ax - A + B = x + 3$$

si ottiene $A = 1$ e $B = 4$ e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2 - 2x + 1}\, dx &= \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\, dx \\ &= \log|x-1| - \frac{4}{x-1} + c. \end{aligned}$$

(c) Caso $\Delta < 0$. Il denominatore $D(x)$ non ha radici reali. Scriviamo $N(x)$ come $AD'(x) + B$ con A, B costanti opportune (e dove $D'(x)$ è la derivata del denominatore). Ad esempio:

$$\frac{6x+7}{x^2 + 4x + 5} = \frac{A(2x+4) + B}{x^2 + 4x + 5}.$$

da cui si ricava $A = 3$ e $B = -5$.
Il termine $\dfrac{D'(x)}{D(x)}$ porta alla primitiva $\log|D(x)|$ e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{x^2 + 4x + 5}\, dx &= 3 \int \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 5}\, dx - 5 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx \\ &= 3 \log\left|x^2 + 4x + 5\right| - 5 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx \end{aligned}$$

Ora, conviene ricordare che un trinomio di II grado con discriminante negativo non cambia mai segno, per cui è sempre positivo, o sempre negativo, a seconda che lo sia il coefficiente di x^2 (o, se ci piace di più, a seconda che lo sia il termine noto). Se, come nell'esempio, il trinomio è sempre positivo, possiamo innanzitutto eliminare il valore assoluto. Inoltre, scriviamo il trinomio come somma di quadrati nel modo seguente

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$$

da cui $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1}\, dx.$
Mediante la sostituzione $x + 2 = t$ si ottiene

$$\int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c, \qquad \text{cioè} \qquad \int \frac{dx}{1 + (x + 2)^2} = \arctan(x + 2) + c$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{6x + 7}{x^2 + 4x + 5}\, dx &= 3\log(x^2 + 4x + 5) - 5\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx \\ &= 3\log(x^2 + 4x + 5) - 5\arctan(x + 2) + c.\end{aligned}$$

Illustriamo il procedimento da seguire in quest'ultimo caso con un altro esempio.

Esempio 8.17 Determinare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

Il trinomio $D(x) = x^2 + x + 1$ ha discriminante $\Delta = -3 < 0$ e termine noto $1 > 0$, per cui assume sempre valori positivi. La sua derivata è $D'(x) = 2x + 1$, per cui cerchiamo due costanti A e B tali che, per ogni x, valga

$$A(2x + 1) + B = x.$$

Si trova che $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 + x + 1}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx\end{aligned}$$

Inoltre, il denominatore può essere scritto come somma di quadrati nel seguente modo

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Infine con il cambio di variabile $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = t$ (e quindi $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$) ci si riporta ad un integrale di un arcotangente e si ottiene

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

In definitiva si ha quindi che

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\, dx &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c.\end{aligned}$$

Esempio 8.18 Determinare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{4x+5}{x^2+2x+1}.$$

Il trinomio $D(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ ha derivata $D'(x) = 2(x+1)$ e quindi $N(x) = 2D'(x)+1$. Perciò:

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+1}\, dx = 2\int \frac{D'(x)}{D(x)}\, dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = 4\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + c.$$