Lezione 7
Trigonometria

1. Angoli e loro misure (gradi e sottomultipli)

Definizione 7.1 Due semirette con la stessa origine dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali è detta **angolo**. Le due semirette si dicono **lati** dell'angolo e la loro comune origine **vertice** dell'angolo. L'angolo si dice **convesso** se non contiene i prolungamenti dei lati, **concavo** in caso contrario.
Un angolo potrà essere indicato con varie scritture:

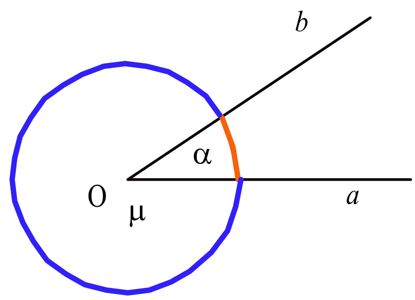
- utilizzando una lettera, di solito dell'alfabeto greco, come α, β, γ, μ (alfa, beta, gamma, miu),

oppure

- con la scrittura $a\widehat{O}b$, se indichiamo con a e b i lati e con O il vertice dell'angolo,

oppure

- con la scrittura $\widehat{AOB}$, se fissiamo un punto A su un lato ed un punto B sull'altro:



α angolo convesso, μ angolo concavo di lati a, b

Quando i due lati coincidono, uno degli angoli viene detto **angolo nullo**, mentre l'altro (che coincide con il piano) viene detto **angolo giro**.
L'angolo giro ci serve per introdurre un'unità di misura per gli angoli, **il grado** (sessagesimale).

Definizione 7.2 Si dice che l'angolo dato dalla 360-esima parte di un angolo giro misura 1 grado (che indichiamo con $1°$).

Di conseguenza, l'angolo giro misura $360°$, un angolo piatto (dove i due lati sono uno il prolungamento dell'altro) $180°$, un angolo retto (lati perpendicolari) $90°$. Ma quanto misura un dodicesimo di angolo retto? Dovremmo fare $\left(\frac{90}{12}\right)^{\circ} = (7.5)^{\circ}$.
Abbiamo bisogno di sapere come indicare la metà di un grado (e più in generale i suoi sottomultipli). Analogamente alla misura del tempo, dove un'ora si divide in 60 minuti, anche il grado si suole dividere in 60 parti, ognuna delle quali detta **minuto primo** (o, più brevemente, **minuto**, indicato con $'$) ed ogni minuto si divide a sua volta in 60 parti, dette **minuti secondi** (o, più brevemente, **secondi**, indicati con $''$). Quindi $\frac{1}{2}$ grado corrisponde a $30'$ e $(7.5)^{\circ} = 7°30'$.

Esempio 7.3 Spesso le calcolatrici scientifiche usano una suddivisione del grado in centesimi invece che sessagesimi: vediamo come passare dalla suddivisione centesimale a quella in minuti primi e secondi. Esprimiamo $(27.38)^\circ$ utilizzando i primi ed i secondi: $(27.38)^\circ = 27^\circ + \left(\frac{38}{100}\right)^\circ = 27^\circ + \left(\frac{38}{100} \times 60\right)' = 27^\circ + (22.8)' = 27^\circ + 22' + \left(\frac{8}{10}\right)' = 27^\circ + 22' + \left(\frac{8}{10} \times 60\right)'' = 27^\circ 22' 48''$.

Esempio 7.4 Vogliamo sapere a quanti gradi, minuti e secondi corrispondono $12345''$. Dividendo il numero di secondi per 60, otteniamo 205 con il resto di 45, cioè $12345'' = 205'45''$. Dividendo il numero di minuti per 60, vediamo che $205' = 3^\circ 25'$, quindi $12345'' = 3^\circ 25' 45''$.

Esempio 7.5 Vogliamo sapere quanti gradi, minuti e secondi misura un settimo di angolo piatto. Dobbiamo calcolare $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ = 25^\circ + \left(\frac{5}{7}\right)^\circ = 25^\circ + \left(\frac{5}{7} \times 60\right)' = 25^\circ + 42' + \left(\frac{6}{7}\right)' = 25^\circ + 42' + \left(\frac{6}{7} \times 60\right)'' = 25^\circ 42' 51'' + \left(\frac{2}{7}\right)''$. In questo caso, gradi, minuti e secondi ci danno dell'angolo solo una misura approssimata (ai secondi): $25^\circ 42' 51''$.

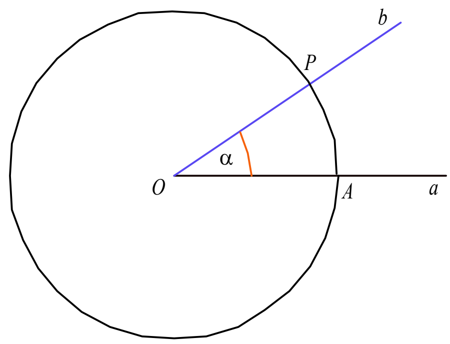
In generale, nelle misurazioni di un angolo fatte utilizzando i gradi, i minuti ed i secondi si ottiene una misura approssimata. Infatti solo un numero finito di angoli (a meno di congruenze [1]) ha una misura esatta espressa in gradi, minuti e secondi. Per avere approssimazioni più fini, possiamo aver bisogno di ulteriori sottomultipli dei secondi (solitamente espressi in decimali), come per fare una misurazione fine di una lunghezza può servire andare ben oltre i centimetri.

2. Angoli e loro misure (radianti)

Consideriamo un angolo $a\widehat{O}b = \alpha$ di vertice O. In una visione dinamica, si può pensare di avere ottenuto α facendo ruotare il lato a con perno in O fino a raggiungere il lato b oppure di averlo ottenuto facendo ruotare il lato b con perno in O fino a raggiungere il lato a. Utilizzando i due possibili versi di rotazione, definiamo il concetto di **angolo orientato**.

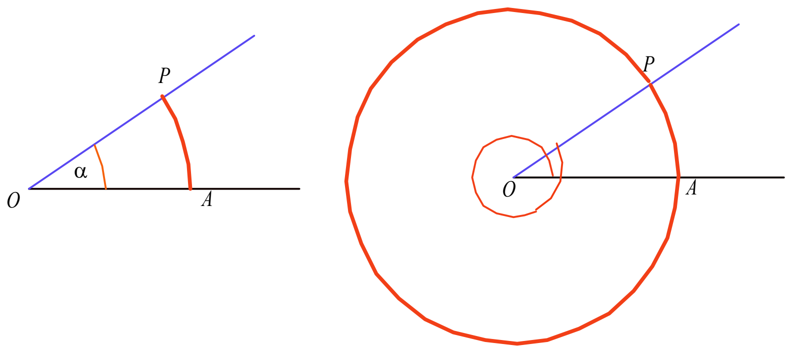
Definizione 7.6 Un angolo si dirà **orientato positivamente** se ottenuto da una rotazione in senso antiorario, **negativamente** se ottenuto da una rotazione in senso orario.

Tracciamo ora una circonferenza con centro in O e raggio r: siano A e P le sue intersezioni con i lati a e b di $\alpha = \widehat{AOP}$

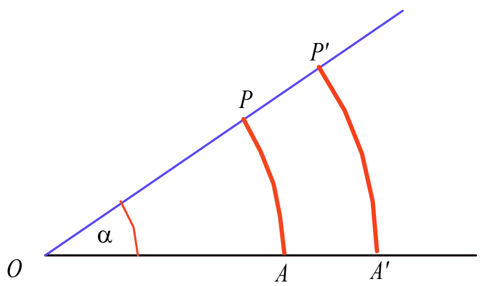


[1] cioè considerando identiche due figure se si può ottenerne una traslando, ruotando o ribaltando l'altra.

Al ruotare della semiretta OP, P descrive un arco di circonferenza AP la cui lunghezza dipende dall'angolo α di rotazione (oltre che dal raggio r). Se la semiretta OP compie un giro completo, P descrive tutta la circonferenza (di lunghezza $2\pi r$) e se la semiretta ruota ancora di α nello stesso verso, il punto P si ritrova nella stessa posizione del caso precedente, ma dopo aver percorso un tragitto più lungo del precedente di $2\pi r$



Da qui nasce l'esigenza di misurare un angolo in modo da tener conto anche degli eventuali giri completi effettuati (e del loro verso).
A parità di angolo α la lunghezza di un percorso lungo una circonferenza dipende dal raggio; cioè, se P' è un altro punto sulla semiretta OP e A' è il punto in cui la circonferenza di raggio $r' = OP'$ taglia la semiretta OA, il cammino che compie P' per descrivere l'angolo α a partire da A' è diverso da quello che compie P a partire da A.



Invece, il rapporto tra la misura della lunghezza di tale cammino e quella del raggio resta costante, cioè $\dfrac{l(AP)}{r} = \dfrac{l(A'P')}{r'}$; poiché dipende solo dall'angolo α, esso si presta a darne una "misura" che tiene conto anche dell'orientamento.

Definizione 7.7 Si dice **misura in radianti** dell'angolo α il rapporto $\dfrac{l(AP)}{r}$ preso con segno positivo se α è orientato positivamente, oppure con segno negativo se α è orientato negativamente.

Ad esempio, l'angolo descritto dalla lancetta delle ore al passare dalle 4:00 alle 7:00 di mattina (nel corso dello stesso giorno) misura in radianti $-\dfrac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Il rapporto $\dfrac{l(AP)}{r}$ è un numero puro (senza unità di misura) che non dipende dal raggio: è comodo allora lavorare con una circonferenza di raggio unitario, detta **circonferenza goniometrica**. Infatti su tale circonferenza si vede immediatamente che:

- la misura in radianti dell'angolo giro, percorso in senso antiorario, equivale a 2π, ovvero al valore della lunghezza della circonferenza;
- π è la misura dell'angolo piatto orientato positivamente;
- se, per descrivere l'angolo $\widehat{AOP}$, P compie meno di un giro, la misura α_{rad} in radianti di $\widehat{AOP}$ coincide (a meno del segno) con la misura dell'arco di circonferenza AP e quindi la misura α_{gr} in gradi di tale $\widehat{AOP}$ è correlata ad α_{rad} dalla semplice proporzione

$$\boxed{\alpha_{gr} : 180° = \alpha_{rad} : \pi}, \qquad \text{da cui} \qquad \boxed{\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°}\alpha_{gr}} \text{ e } \boxed{\alpha_{gr} = \frac{180°}{\pi}\alpha_{rad}}$$

- se P compie più di un giro in senso antiorario (od in senso orario), nella misura in radianti di $\widehat{AOP}$ si tiene conto del numero k di giri compiuti sulla circonferenza aggiungendo $2k\pi$ (o $-2k\pi$) alla misura dell'arco AP.

Notiamo che un qualunque numero reale può rappresentare la misura in radianti di un angolo orientato.

Dalla relazione tra misura in radianti e misura in gradi ricaviamo immediatamente la misura in radianti di alcuni angoli notevoli:

α_{gr}	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
α_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Esempio 7.8 Sia data una circonferenza di raggio $r = 3$ m ed un angolo al centro di misura $\alpha_{gr} = 32°$. L'arco di circonferenza corrispondente ha una lunghezza l determinata dalla misura in radianti dell'angolo moltiplicata per il raggio della circonferenza, quindi
$l = r \times \alpha_{rad} = r \times \alpha_{gr} \times \frac{\pi}{180°} = (3 \times 32° \times \frac{\pi}{180°})\text{ m} = \left(\frac{8}{15}\pi\right)\text{ m} \simeq 1.675\text{ m}.$

Esempio 7.9 Se un angolo ha misura in radianti data da $\alpha_{rad} = 2.2$, la sua misura in gradi sarà data da $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \frac{180°}{\pi} = 2.2 \times \frac{180°}{\pi}$, cioè circa $(126.05)° = 126°\ 3'$.

Esempio 7.10 Dato un arco di circonferenza lungo 20 cm e di raggio 4 cm, la misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente si ottiene immediatamente dal rapporto $\alpha_{rad} = \frac{20\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 5$. La corrispondente misura in gradi di tale angolo è allora $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \frac{180°}{\pi} = 5 \times \frac{180°}{\pi}$, cioè circa $(286.48)° = 286°\ 28'48''$.

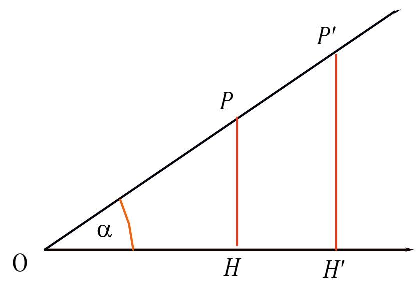
Esempio 7.11 Un tratto curvilineo di pista d'atletica larga 10 m ha bordi a forma d'arco circolare e percorrendo la pista all'interno si fanno 16 metri in meno che all'esterno: si vuole sapere quanto vale l'angolo di curvatura, cioè la misura dell'angolo al centro corrispondente agli archi. La misura α_{rad} in radianti di tale angolo è data da $\alpha_{rad} = \dfrac{L}{R} = \dfrac{l}{r}$, dove R, r, L, l sono rispettivamente i raggi di curvatura e le lunghezze dei bordi esterni ed interni, e quindi $L = l + 16$ ed $R = r + 10$. Sostituendo si ha l'uguaglianza

$$(l+16)\,r = (r+10)\,l \qquad \text{cioè } 16r = 10l$$

e quindi $\alpha_{rad} = \dfrac{l}{r} = \dfrac{16}{10} = 1.6$. Allora $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \dfrac{180°}{\pi} = 1.6 \times \dfrac{180°}{\pi} \simeq (91.67)\,° = 91°40'12''$.

3. Seno, coseno e tangente di un angolo acuto

Consideriamo un angolo acuto α e i due triangoli POH e $P'OH'$ (rettangoli rispettivamente in H e H') disegnati in figura:

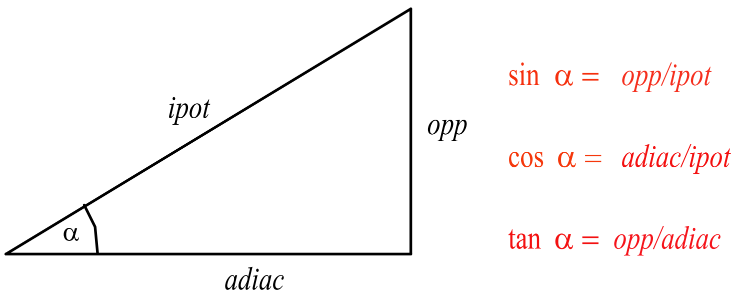


Essi sono simili in quanto sono rettangoli e hanno l'angolo in O in comune; dunque hanno lati proporzionali, cioè $\dfrac{OP}{OP'} = \dfrac{OH}{OH'} = \dfrac{HP}{H'P'}$. Ne consegue che $\dfrac{H'P'}{OP'} = \dfrac{HP}{OP}$ e similmente per le altre coppie di lati corrispondenti.

Quindi, *se si misurano tutti i lati nella stessa unità di misura*, dato un angolo acuto α, dipendono solo da α - e non dal triangolo rettangolo costruito su α - i seguenti numeri (vedere alla pagina seguente la figura riassuntiva!):

- il rapporto $\dfrac{opp}{ipot}$ tra la misura del cateto opposto all'angolo α e quella dell'ipotenusa [2]: esso è detto **seno** dell'angolo α e si denota con $\sin\alpha$ (o sen α);
- il rapporto $\dfrac{adiac}{ipot}$ tra la misura del cateto adiacente all'angolo α e quella dell'ipotenusa: esso è detto **coseno** dell'angolo α e si denota con $\cos\alpha$;
- il rapporto $\dfrac{opp}{adiac}$ tra la misura del cateto opposto e quella del cateto adiacente all'angolo α: esso è detto **tangente** dell'angolo α e si denota con $\tan\alpha$ (o con tgα).

[2] Dunque, conoscendo tale rapporto, dalla misura di OP possiamo conoscere quella di HP e viceversa.

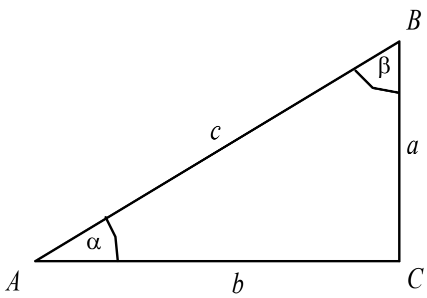


Osserviamo che, poiché $\dfrac{opp}{adiac} = \dfrac{opp}{ipot} \cdot \dfrac{ipot}{adiac}$, si ha che $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.}$

Esempi 7.12

- Se l'angolo α misura $\dfrac{\pi}{6}$ in radianti (cioè 30°), ogni triangolo POH costruito su α è metà di un triangolo equilatero di lato OP e quindi $\dfrac{HP}{OP} = \dfrac{1}{2}$ e, applicando il Teorema di Pitagora, $\dfrac{OH}{OP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque: se α misura $\dfrac{\pi}{6}$ in radianti, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
- Se l'angolo α misura $\dfrac{\pi}{4}$ in radianti (cioè 45°), ogni triangolo rettangolo costruito su α è la metà di un quadrato e quindi $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, mentre $\tan\alpha = 1$.

Osservazione 7.13 In un triangolo ABC rettangolo in C come quello in figura



indicati con α e β gli angoli nei vertici A e B e con a e c le misure dei lati opposti ad A e C si ha

$$\sin\alpha = \frac{opp(\alpha)}{ipot} = \frac{a}{c} = \frac{adiac(\beta)}{ipot} = \cos\beta,$$

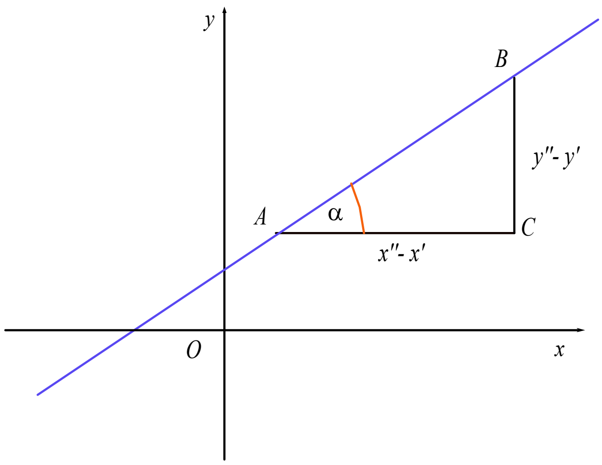
cioè il seno di α coincide con il coseno di β ed analogamente il seno di β coincide con il coseno di α. Poiché α e β sono complementari, si vede che

il coseno di un angolo coincide con il seno del suo complementare [3].

[3] Di qui il nome: co-seno = seno del co-mplementare.

Esempio 7.14 Un angolo β che misura $60°$ $\left(\text{cioè } \frac{\pi}{3} \text{ radianti}\right)$ è complementare dell'angolo α che ne misura $30°$ $\left(\text{cioè } \frac{\pi}{6} \text{ radianti}\right)$: quindi dall'Es. 7.12 si ha immediatamente che $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Osservazioni 7.15 Il concetto di tangente ha un'*interpretazione in geometria analitica*. In un sistema di riferimento ortogonale consideriamo una retta di equazione $y = mx + q$ con coefficiente angolare m positivo e due suoi punti $A = (x', y')$ e $B = (x'', y'')$: si vede [4] che $m = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ e d'altra parte A e B insieme a $C = (x'', y')$ costituiscono un triangolo rettangolo in C e quindi $\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \tan\left(\widehat{BAC}\right)$, cioè il coefficiente angolare m coincide proprio con la tangente dell'angolo α formato dalla retta con l'asse x (ed ogni sua parallela):



Per estendere questa interpretazione anche al caso di coefficiente angolare negativo, dobbiamo però estendere la definizione di tangente ad un qualunque angolo orientato: per quanto detto prima, ciò significa estendere anche la definizione di seno e coseno.

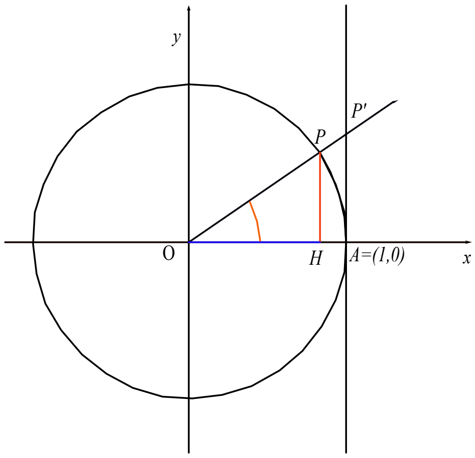
4. Seno, coseno e tangente di un angolo orientato

Per brevità d'ora in poi identificheremo ogni angolo orientato con la sua misura (positiva o negativa) in radianti [5]. Fissato un sistema di riferimento ortogonale con uguali unità di misura sui due assi, tracciamo una circonferenza goniometrica (cioè di raggio unitario) centrata nell'origine O e pensiamo come semiretta origine di tutti gli angoli il semiasse positivo delle ascisse, che interseca in A la circonferenza goniometrica.

Definizioni 7.16 Se α è la misura, espressa in radianti, di un angolo orientato individuato da un punto P sulla circonferenza goniometrica

[4] Infatti A appartiene alla retta $\iff y' = mx' + q$, B appartiene alla retta $\iff y'' = mx'' + q$, e quindi $y'' - y' = m\,(x'' - x')$.

[5] Diremo quindi ad esempio *l'angolo* $-\frac{\pi}{6}$ invece di *l'angolo che in radianti misura* $-\frac{\pi}{6}$ oppure *il coseno di* $\frac{\pi}{3}$ invece di *il coseno dell'angolo che in radianti misura* $\frac{\pi}{3}$.



chiamiamo [6]:

- **seno di** α l'ordinata del punto P,
- **coseno di** α l'ascissa del punto P,
- **tangente di** α l'ordinata del punto P' intersezione della retta passante per P e per l'origine con la retta tangente alla circonferenza in A; la tangente quindi è definita solo quando tali rette non sono parallele.

Denotiamo ancora tali numeri [7] rispettivamente con: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$, visto che nel caso di angoli acuti la definizione equivale a quella già data.

Osservazioni 7.17

1. P è un punto della circonferenza goniometrica che ha raggio uno; quindi

$$-1 \le \sin\alpha \le 1 \quad \text{e} \quad -1 \le \cos\alpha \le 1, \qquad \text{per tutti gli } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo HOP della figura, si trova l'*identità fondamentale*:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \text{per tutti gli } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

3. Per similitudine dei triangoli rettangoli HOP e AOP', si ha che

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \text{per tutti gli } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

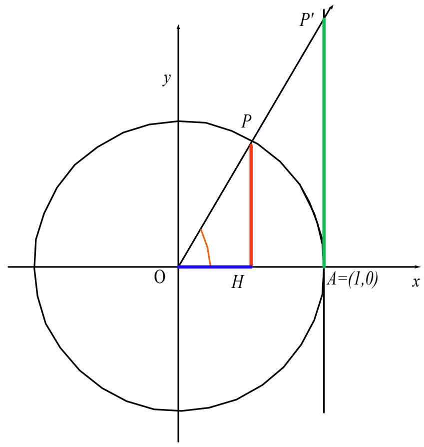
Inoltre:

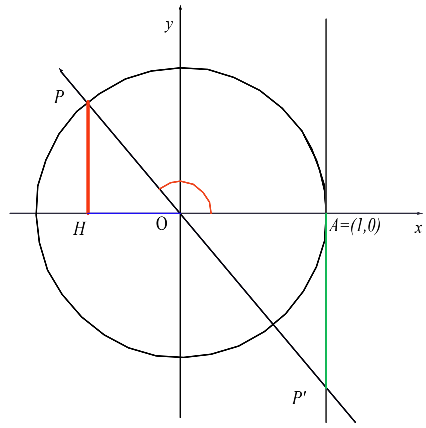
- $\sin\alpha$ è positivo quando P si trova sulla semicirconferenza al di sopra dell'asse x, negativo quando P si trova su quella al di sotto;

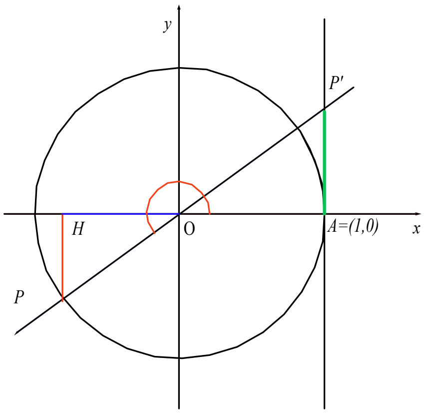
[6] Le definizione qui date di seno, coseno e tangente di un angolo orientato dipendono fortemente dal fatto che si sta considerando una circonferenza di raggio 1. In realtà si possono usare definizioni indipendenti dal raggio della circonferenza scelta, in cui si rapportano le misure dei segmenti coinvolti con il raggio della circonferenza.

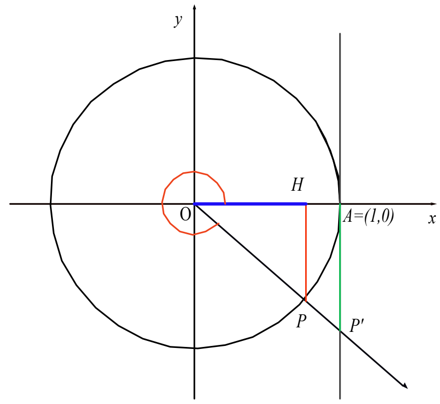
[7] Ricordiamo che ascissa e ordinata sono dei puri numeri.

- $\cos\alpha$ è positivo quando P si trova sulla semicirconferenza a destra dell'asse y, negativo quando P si trova su quella a sinistra;
- la tangente $\tan\alpha$ può assumere qualsiasi valore reale ed è positiva quando P si trova nel I o nel III quadrante, negativa quando P si trova nel II o nel IV quadrante,









Esempi, definizioni ed osservazioni precedenti permettono di trovare i valori di seno coseno e tangente di angoli particolari [8] :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non è definita	0	non è definita	0

[8] Si possono trovare valori (approssimati) di seno, coseno e tangente di un qualunque angolo usando una semplice calcolatrice, stando attenti alla "modalità", che dovrà essere DEG se la misura dell'angolo è data in gradi e RAD se la misura dell'angolo è data in radianti.

5. Proprietà di seno, coseno, tangente

Fin qui abbiamo ancora calcolato seno, coseno e tangente solo di angoli compresi tra 0 e 2π. Vediamo come calcolarli per angoli negativi o maggiori di 2π.

Se la posizione P sulla circonferenza goniometrica è raggiunta dopo aver percorso un certo numero di giri in senso antiorario (od in senso orario), la misura in radianti dell'angolo α tiene conto del numero di giri compiuti, ma la posizione di P no. Quindi [9]

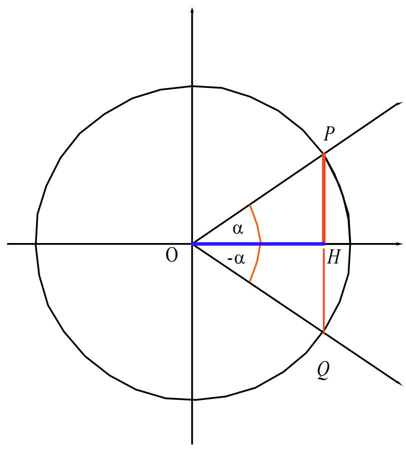
$$\begin{aligned} &\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, && \forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \\ &\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha && \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Esempi 7.18

- $\alpha = \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \sin\dfrac{7\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} - \pi \quad \Longrightarrow \quad \tan\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

Come si visualizza sulla figura successiva, dalla definizione di seno, coseno e tangente segue che:

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.}$$



Esempio 7.19

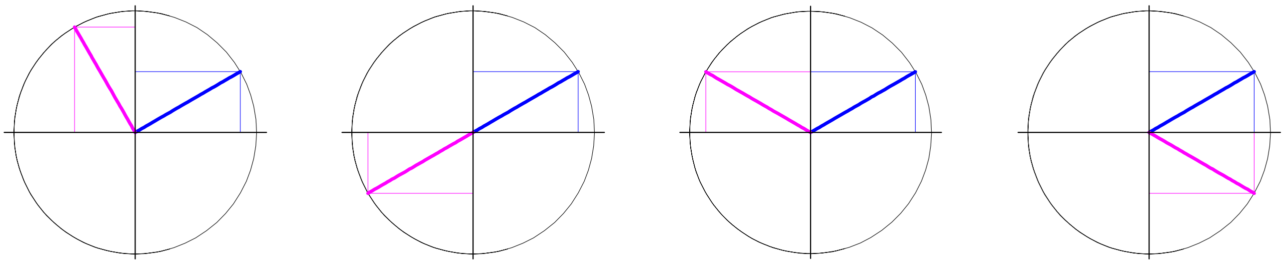
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\ ; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \quad \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Sappiamo già che i valori del seno e del coseno si scambiano tra di loro passando da un angolo acuto α al suo complementare $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Questa relazione vale in realtà per qualunque coppia di angoli α e β tali che $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ed è tradotta dalle uguaglianze

[9] Si usa fare riferimento a queste proprietà dicendo che seno e coseno hanno periodo 2π, mentre la tangente ha periodo π.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

Considerazioni di geometria elementare analoghe alle precedenti, illustrate da queste figure:



(a) (b) (c) (d)

portano alle seguenti relazioni, che possono servire [10] per calcolare valori di seno e coseno per angoli ottenibili da quelli riportati nella tabella del paragrafo 4:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha, & \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha & \forall\alpha\in\mathbb{R} \\
\text{(b)} & \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha & \forall\alpha\in\mathbb{R} \\
\text{(c)} & \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, & \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha & \forall\alpha\in\mathbb{R} \\
\text{(d)} & \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha & \forall\alpha\in\mathbb{R}
\end{array}$$

Esempio 7.20 Vogliamo calcolare i valori del seno e del coseno per gli angoli $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$.

- $\frac{3\pi}{4}$ è un angolo compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e π e quindi può essere visto come $\frac{\pi}{2}+\alpha$ o come $\pi-\alpha$; se scriviamo $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

- $\frac{4\pi}{3}$ è un angolo compreso tra π e $\frac{3\pi}{2}$ e quindi può essere visto come $\pi+\alpha$; scrivendo $\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$, si ha:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

[10] In realtà piuttosto che memorizzare queste relazioni conviene abituarsi a visualizzare la posizione del punto P della circonferenza goniometrica corrispondente all'angolo di cui si vogliono calcolare il seno o il coseno e poi ricondursi, con considerazioni geometriche come quelle illustrate sopra, ad angoli di misura compresa tra 0 e $\pi/2$.

- $\frac{7\pi}{4}$ è un angolo compreso tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e quindi può essere visto come $2\pi - \alpha$; scrivendo $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

6. Altre formule

Per il calcolo di seno, coseno e tangente di alcuni angoli, possono essere utili le cosiddette *formule di addizione* [11]:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, && \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ &\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, && \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ &\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, && \forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R},\ \text{con } \alpha\pm\beta\neq\frac{(2k+1)}{2}\pi \end{aligned}$$

Come caso particolare, per $\alpha = \beta$ si hanno le formule di duplicazione:

$$\begin{aligned} &\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, && \forall\alpha\in\mathbb{R} \\ &\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, && \forall\alpha\in\mathbb{R} \\ &\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, && \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \end{aligned}$$

Dato che $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$, dalla formula di duplicazione del coseno e dall'identità fondamentale, si ottengono immediatamente anche le formule di bisezione:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \qquad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Le formule di addizione e quelle di duplicazione sono frequentemente usate quando gli angoli in esame sono variabili; si sconsiglia invece l'uso delle formule di bisezione quando non siano noti i segni che devono assumere seno, coseno e tangente.

Esempio 7.21 Calcoliamo $\cos\frac{\pi}{12}$, $\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right)$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\left(\frac{13}{8}\pi\right)$.

- Poiché $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, per le formule di addizione e quelle sugli angoli opposti abbiamo:
  $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$
  $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

[11] Val la pena di evidenziare che, come è ovvio da un punto di vista geometrico, il seno della somma di due angoli NON è la somma dei seni dei due angoli e similmente per coseno e tangente.

- Poiché $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, per le formule sugli angoli complementari risulta:

  $$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}$$

  Da $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, per le formule di addizione e quelle sugli angoli opposti abbiamo:

  $$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}\cdot(-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = 2-\sqrt{3}$$

  e quindi $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$.

- Poiché $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$, dalle formule di bisezione otteniamo che:

  $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}$ (si è scelto il segno positivo perché $\frac{\pi}{8}$ è compreso tra 0 e π, intervallo in cui il seno è positivo);

  $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}$ (si è scelto il segno positivo perché $\frac{\pi}{8}$ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, intervallo in cui il coseno è positivo).

- Poiché $\frac{13\pi}{8} = 2\pi - \frac{3\pi}{8}$, si ha $\sin\left(\frac{13}{8}\pi\right) = \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

  Poiché $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, si ha $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}$ e quindi

  $\sin\left(\frac{13}{8}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

  Il segno è negativo, coerentemente con il fatto che l'angolo è compreso tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

7. Risoluzione di triangoli

Con l'espressione "risolvere" un triangolo si intende la determinazione della misura [12] dei suoi elementi costitutivi, ovvero lati e angoli.

Sappiamo dalla geometria elementare che due triangoli sono congruenti[13] quando hanno tre opportuni elementi congruenti, almeno uno dei quali sia un lato. Questo significa che la conoscenza di tre opportuni elementi di un triangolo permette la determinazione degli altri elementi incogniti.

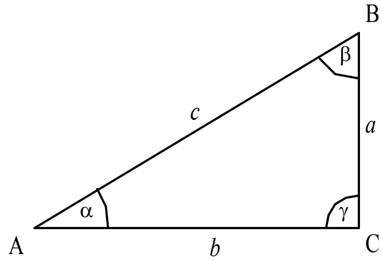
In alcuni casi, per esempio nei triangoli rettangoli, conoscendo tre opportuni elementi di un triangolo, con le sole nozioni di seno, coseno, tangente si può "risolvere" il triangolo [14].

---

12) Per brevità nel seguito spesso denomineremo le lunghezze dei segmenti con la stessa lettera che indica il segmento. Si intende che le lunghezze dei tre lati di un triangolo sono misurate rispetto alla stessa unità di misura.

13) cioè sovrapponibili traslando, ruotando ed eventualmente ribaltando uno dei due.

14) Per risolvere un triangolo rettangolo, avendo a disposizione i tre lati è necessario conoscere le funzioni trigonometriche inverse, che qui non tratteremo.

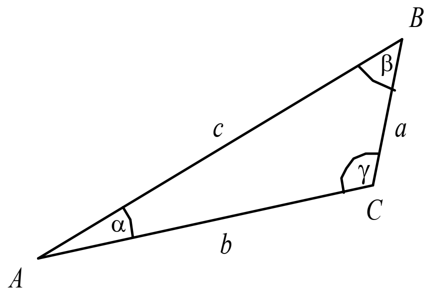


Sia ABC un triangolo rettangolo di cateti a, b ed ipotenusa c, e rispettivi angoli opposti α, β, γ: poiché γ è retto, basta conoscere un altro angolo, per esempio α, per averli tutti, in quanto $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Supponiamo dunque noto α.
Ricordando che $\sin\alpha = \frac{opp}{ipot} = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{adiac}{ipot} = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{opp}{adiac} = \frac{a}{b}$, si vede che:

conoscendo	α e l'ipotenusa c	*si ricavano:*	$a = c\sin\alpha$	e	$b = c\cos\alpha$
conoscendo	α e il cateto a	*si ricavano:*	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	e	$b = \dfrac{a}{\tan\alpha}$
conoscendo	α e il cateto b	*si ricavano:*	$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	e	$a = b\tan\alpha$

Esempio 7.22 Da una nave ancorata al largo di un porto, si vede la cima del faro di quel porto sotto un angolo di $\frac{\pi}{12}$. Sapendo che la cima del faro è alta 200 m sul livello del mare, a che distanza dal faro si trova la nave?
Stiamo cercando b, noti $\alpha = \frac{\pi}{12}$ e $a = 200$ m. Poiché $\tan\frac{\pi}{12} \simeq 0.268$, troviamo che la nave dista dal porto circa $\frac{200}{0.268}$ m $= 746$ m.

In altri casi, abbiamo bisogno di opportuni teoremi, che sono applicabili ad un triangolo ABC qualunque



Teorema 7.23 (Teorema dei seni) *In un qualunque triangolo le lunghezze dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti*, cioè

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Esempio 7.24 Sia ABC un triangolo, di cui si conoscono la misura di un lato $c = 3$ e dei due angoli ad esso adiacenti, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = \frac{\pi}{12}$. Vogliamo risolvere tale triangolo, cioè determinare i rimanenti elementi. Ovviamente $\gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Per applicare il teorema dei seni, calcoliamo $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$, da cui $a = 2\sqrt{3}\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{6} \simeq 2.45$. Per ottenere la misura del restante lato, occorre calcolare $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$, da cui $b = 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} \simeq 0.9$.

Teorema 7.25 (Teorema di Carnot o del coseno). *In un qualunque triangolo, note le misure a e b di due lati e l'angolo γ tra essi compreso, si può trovare la misura c del terzo lato. Infatti vale la relazione*[15]:

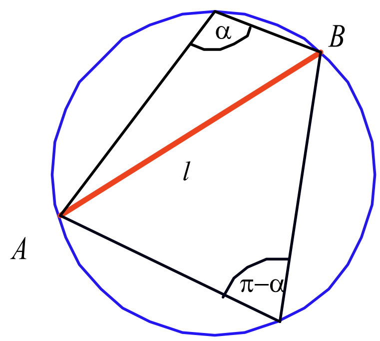
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Esempio 7.26 Sia ABC un triangolo, di cui si conoscono le misure di due lati $a = 5$, $b = 2$ e dell'angolo compreso $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Vogliamo determinare la misura c del rimanente lato. Per il Teorema di Carnot, si ha $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 25 + 4 - 20 \cdot \frac{1}{2} = 19$, da cui $c = \sqrt{19} \simeq 4.36$.

In alcuni problemi è anche utile il seguente teorema (che serve per dimostrare la validità dei teoremi precedenti, anche se non è strettamente connesso con la risoluzione dei triangoli):

Teorema della corda *Data una circonferenza di raggio r ed un angolo alla circonferenza α che insiste su una corda AB di lunghezza l, si ha che*

$$l = 2r\sin\alpha.$$



(Gli angoli alla circonferenza che insistono su corde congruenti sono fra loro congruenti o supplementari e quindi, in entrambi i casi, hanno lo stesso seno).

[15] Se il triangolo ABC è rettangolo, con angolo retto in C, si ha $\cos\gamma = 0$ e quindi il teorema di Carnot ci dà $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2$, cioè esattamente il teorema di Pitagora!