Argomento 6
Derivate

Derivata in un punto

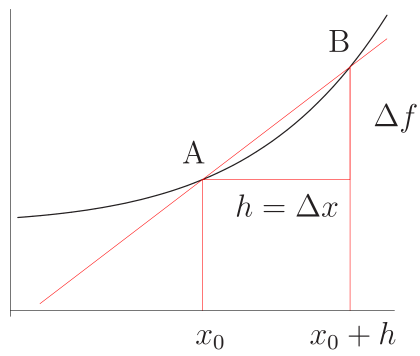
Definizione 6.1 Data una funzione f definita su un intervallo I e $x_0 \in I$, si chiama *rapporto incrementale di f in x_0* di incremento $h = x - x_0 = \Delta x$ il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

per $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x \in I$.

Da un punto di vista geometrico, il rapporto incrementale di f in x_0 di incremento $h = \Delta x$ rappresenta il coefficente angolare della retta secante il grafico di f nei due punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$:

($\Diamond$)



Esempio 6.2 Se $f(x) = \sin x$, il rapporto incrementale in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ di incremento $h = x - \frac{\pi}{2}$ è dato da:

$$\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(h + \frac{\pi}{2}) - 1}{h}.$$

Definizione 6.3 Una funzione f si dice *derivabile* in x_0 interno ad I se esiste <u>finito</u> il

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (*)$$

In tal caso, il valore di tale limite si chiama *derivata di f in x_0* e si indica con $f'(x_0)$, oppure con $(Df)(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ quando tale limite esiste finito.}}$$

Esempio 6.4 Per vedere quindi se $\sin x$ è derivabile in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ed, in tal caso, calcolarne la derivata, occorre prendere il rapporto incrementale calcolato in Es. 6.2 e calcolare il

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h + \frac{\pi}{2}) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} =^{(1)} \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{2}h = 0.$$

Quindi $\sin x$ è derivabile in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ e $(D\sin)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Definizione 6.5 Se esiste finito il $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tale limite si chiama *derivata destra di f in x_0* e si indica con $f'_+(x_0)$. Analogamente, se esiste finito $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tale limite si chiama *derivata sinistra di f in x_0* e si indica con $f'_-(x_0)$.

Esempio 6.6 Consideriamo la funzione $|x|$. Calcoliamo il limite destro del rapporto incrementale in 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Quindi la derivata destra di $|x|$ esiste in 0 e vale 1.

Analogamente per il limite sinistro del rapporto incrementale in 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

Quindi la derivata sinistra di $|x|$ esiste in 0 e vale -1. Allora, visto che il limite destro ed il limite sinistro del rapporto incrementale esistono, ma sono diversi, il limite completo non esiste (vedi Arg. 3) e quindi la funzione $|x|$ non è derivabile in 0. Vale in generale che

- Se x_0 è interno a I, la funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e sono coincidenti.

Se invece x_0 è l'estremo destro (sinistro) di I, si dice che la funzione f è *derivabile* in x_0 se e solo se esiste la derivata sinistra (destra), cioè la sola che si può calcolare.

Esempio 6.7 Sia $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. Il campo di esistenza di f è $[0, +\infty)$ e 0 ne è l'estremo sinistro. Allora si può vedere solo se esiste la derivata destra di f in 0, in quanto possiamo calcolare solo il

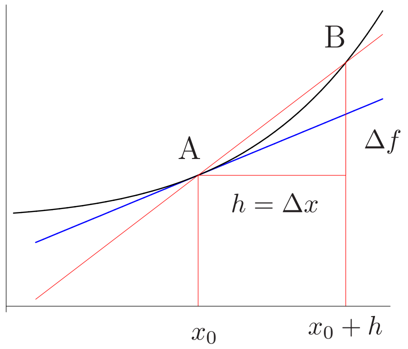
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}} - 0e^{\sqrt{0}}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}} = 1.$$

Quindi f è derivabile in 0 e la derivata vale 1.

[1] $\cos h - 1 \sim -\frac{1}{2}h^2$ per $h \to 0$, vedi Arg. 4.

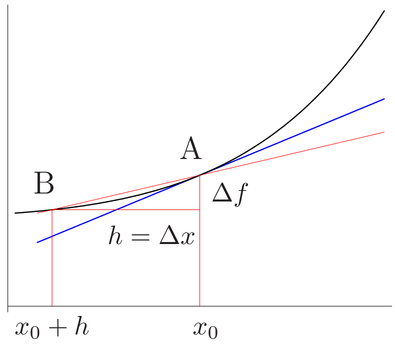
Significato geometrico della derivata

Dal punto di vista geometrico, l'esistenza della derivata di f in un punto interno x_0 comporta l'esistenza di una posizione limite di tangenza al grafico di f nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ per la retta secante ($\Diamond$), quando l'incremento h tende a zero, sia da destra che da sinistra, come si può osservare animando i grafici successivi:



Caso $h > 0$

Vai all'animazione



Caso $h < 0$

Vai all'animazione

Possiamo concludere che:

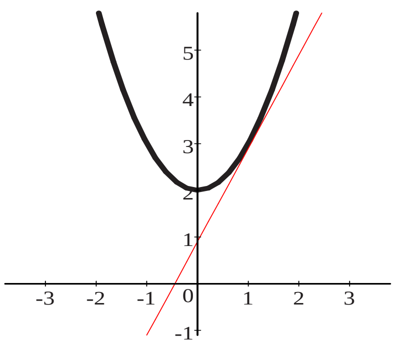
- Una funzione è derivabile in un punto interno x_0 se e solo se il suo grafico ammette *tangente non verticale* nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ e $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare di tale tangente. In tal caso l'equazione della retta tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ è:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Esempio 6.8 Consideriamo $f(x) = x^2 + 2$. f è derivabile in $x_0 = 1$ ed in tale punto ha derivata uguale a 2, in quanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2.$$

Di conseguenza il suo grafico ammette tangente non verticale nel punto $A = (1, 3)$ di equazione $y = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1$:



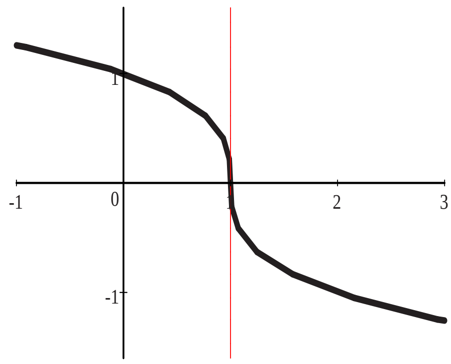
Diversa è la situazione se, per h che tende a 0, la retta secante tende a porsi in posizione verticale, in quanto per le rette verticali non è definito il coefficiente angolare:

- Una funzione f ha grafico che ammette *tangente verticale* nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ per x_0 interno se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ o $-\infty$. In tal caso l'equazione della tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ è $\boxed{x = x_0.}$

Esempio 6.9 Consideriamo $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$. In $x_0 = 1$ si ha:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 0}{x-1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t}}{-t} = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = -\infty.$$

Di conseguenza il suo grafico ammette tangente verticale nel punto $A = (1, 0)$ di equazione $x = 1$, come mostra il grafico seguente:



Osservazione 6.10 Se x_0 è un estremo destro (sinistro) di I, tutto quanto detto relativamente all'esistenza di una tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ si può ripetere considerando il limite sinistro (destro) del rapporto incrementale al posto di quello completo.

Funzione derivata

Definizione 6.11 Sia $A' = \{x \in E(f) |\ f$ è derivabile in $x\}$ l'insieme di derivabilità della funzione f. Su A' si può definire una funzione, detta *derivata di* f ed indicata con f', che associa ad ogni $x \in A'$, la derivata $f'(x)$, cioè

$$f' : A' \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x).$$

Notazione. La derivata di f si indica anche con Df o con $\frac{df}{dx}$.

Esempio 6.12 Data $f(x) = \sqrt{x}$, ove $E(f) = [0, +\infty)$, possiamo vedere che il suo insieme di derivabilità è $A' = (0, +\infty)$, in quanto, $\forall\ x_0 > 0$, si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \overset{\diamond}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0}\left(\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1\right)}{h} =^{(2)} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0}\frac{1}{2}\frac{h}{x_0}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$ mentre in 0 si ha che

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Di conseguenza la funzione derivata di $f(x)=\sqrt{x}$ coincide con $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Derivate successive

Definizione 6.13 Sia f derivabile su A', dove risulta essere definita, come visto precedentemente, la funzione f'. Sia ora f' derivabile su $A'' \subseteq A'$; su A'' si può quindi definire la derivata di f', detta *derivata seconda* di f ed indicata con f''.
Se f'' è a sua volta derivabile su A''', si può ripetere il procedimento e definire f''', *derivata terza* di f e così via, per arrivare a $f^{(n)}$, *derivata n-esima* o *derivata di ordine n di f*.

Esempio 6.14 Per $f(x)=\sqrt{x}$, abbiamo visto nell' esempio precedente che $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ è definita in $A'=(0,+\infty)$. Questa funzione è a sua volta derivabile in $A''=A'$, in quanto, se $x_0>0$, si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x_0+h}}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{2h\sqrt{(x_0+h)(x_0)}} \text{ (vedi } \diamond) = \lim_{h\to 0} -\frac{\sqrt{x_0}\frac{1}{2}\frac{h}{x_0}}{2h\sqrt{(x_0+h)(x_0)}} = -\frac{1}{4x_0\sqrt{x_0}}.$$

Quindi f è derivabile 2 volte su $A''=A'$ e la sua derivata seconda coincide con $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$, come si può anche verificare più facilmente applicando le regole di derivazione delle potenze date nella sezione successiva sul calcolo delle derivate. (Si può in realtà derivare f su $A^{(n)}=A'$ n volte, con n qualunque naturale).

Calcolo di derivate

Derivate delle funzioni elementari

- Le funzioni elementari sono derivabili.

Esempio 6.15 Dimostriamo che e^x è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $x_0\in\mathbb{R}$ e consideriamo il limite per $h\to 0$ del rapporto incrementale in x_0, nella forma $(*)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} =^{(3)} \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}h}{h} = \lim_{h\to 0}e^{x_0} = e^{x_0}.$$

Quindi e^x è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ed ha derivata in x_0 uguale a e^{x_0}.

In modo analogo (tranne che per la tangente e l'arcotangente, vedi Es. 6.18 ed Es. 6.20) possiamo ottenere le derivate delle funzioni elementari.

[2] $\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1 \sim \frac{1}{2}\frac{h}{x_0}$, per $h\to 0$, vedi Arg. 4.

[3] $e^h-1\sim h$, per $h\to 0$, vedi Arg. 4.

Qui sotto si riporta una tabella delle loro derivate:

f	c	x^α	e^x	a^x	$\log x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\arccos x$
f'	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \log a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \log a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Regole di derivazione

Poiché trattiamo funzioni ottenibili da funzioni elementari mediante somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa, avendo a disposizione le derivate delle funzioni elementari, per la derivazione ci basta sapere come si comporta la derivata rispetto a tali operazioni, comportamento descritto dalle cosiddette *"regole di derivazione"*. Qui sotto riportiamo una tabella riassuntiva di tali regole, supponendo che le funzioni f' e g' esistano dove richiesto.

	Regole di derivazione
Somma: $f+g$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Prodotto: $f \cdot g$	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quoziente: $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$)	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Composta: $g \circ f$	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Inversa: f^{-1}	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, dove $\begin{matrix} f'(x) \neq 0 \\ y = f(x) \end{matrix}$

Esempio 6.16 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = x^2 + \sin x$: è una somma di funzioni elementari e quindi avremo che $f'(x) = 2x + \cos x$.

Esempio 6.17 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x} \log x$, per $x > 0$: è un prodotto di funzioni elementari e quindi avremo che $f'(x) = (\sqrt{x})' \log x + \sqrt{x}\,(\log x)' = (x^{\frac{1}{2}})' \log x + (x^{\frac{1}{2}})\,(\log x)' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) \log x + (x^{\frac{1}{2}})\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)$.

Esempio 6.18 Vogliamo calcolare la derivata di $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: è un quoziente di funzioni elementari e quindi avremo che

$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$ (♠)

Esempio 6.19 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt[3]{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{3}}$: è una composizione di funzioni elementari e quindi prima di tutto bisogna capire da quali funzioni ed in quale ordine si ottiene la composizione:

$$x \xrightarrow{\sin(\ )} \sin x \xrightarrow{(\ )^{\frac{1}{3}}} (\sin x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sin x}.$$

Allora dovremo operare derivando in ordine inverso: prima si deriva l'ultima funzione applicata, cioè $(\ )^{\frac{1}{3}}$, e si calcola la sua derivata, che è $\frac{1}{3}(\ )^{\frac{1}{3}-1}$, in $\sin x$. Poi si moltiplica quanto ottenuto per la derivata di $\sin x$, cioè $\cos x$. Possiamo riassumere il procedimento nel seguente schema:

$$x \underset{\cos(\ )}{\longleftarrow} \sin x \underset{\frac{1}{3}(\ )^{\frac{1}{3}-1}}{\longleftarrow} (\sin x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sin x}.$$

In conclusione si ottiene: $f'(x) = \frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{1}{3}-1}\cos x = \dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

Esempio 6.20 Vogliamo calcolare la derivata dell'arcotangente, inversa della tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (vedi Arg. 2), applicando la regola di derivazione della funzione inversa:

Per $y = \tan(x)$, $D(\arctan)(y) = \dfrac{1}{D(\tan x)} \overset{(\spadesuit)}{=} \dfrac{1}{1 + (\tan x)^2} = \dfrac{1}{1 + y^2}$, da cui si ricava che la funzione arcotangente è derivabile su $\mathbb{R}$ e ha derivata $D(\arctan)(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Esempio 6.21 Data $f(x) = e^x + x$, invertibile sul suo insieme di definizione, in quanto (vedi Arg. 1) strettamente crescente (vedi Es. 6.35), dobbiamo calcolare la derivata della sua funzione inversa f^{-1} in 1. Applicando la regola di derivazione della funzione inversa, avremo che:

$$\text{Se } f'(x) \neq 0,\ (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ ove } x \text{ è tale che } f(x) = 1.$$

Dobbiamo quindi dapprima trovare l'unico valore di x tale per cui $f(x) = e^x + x = 1$. Per $x = 0$, avremo $f(0) = e^0 + 0 = 1$ e quindi è 0 il valore di x che stavamo cercando. Calcoliamo ora f', applicando la regola di derivazione di somme:

$$f'(x) = (e^x)' + (x)' = e^x + 1, \quad \text{quindi} \quad f'(0) = e^0 + 1 = 2 \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Derivabilità e continuità

(Per la nozione di continuità, si veda l'Argomento 5.)

Teorema 6.22 *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

Osservazione 6.23 Non è vero il viceversa, cioè esistono funzioni continue non derivabili. [4]

[4] Per esempio $f(x) = |x|$ e $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ in $x_0 = 0$ sono continue, ma non derivabili.

Nel caso di $|x|$, come mostrato in Es. 6.6, si ha che $f'_+(0) = 1$, mentre $f'_-(0) = -1$. (In questo caso, 0 è detto *punto angoloso*).

Nel caso di $\sqrt[3]{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$. (In questo caso, 0 è detto *punto di cuspide*).

Teorema 6.24 (Condizione sufficiente per la derivabilità di funzioni definite a tratti) *Sia f continua in x_0 e derivabile in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Se* $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, *allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = c$.*[5]

Osservazione 6.25 Questa condizione può risultare molto utile, ma attenzione a controllare tutte le ipotesi prima di applicarla: la funzione $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per} \quad x < 0 \\ x-1 & \text{per} \quad 0 \le x \end{cases}$ è tale per cui $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$, ma non è certo derivabile in 0, in quanto in 0 non è continua!

Esempio 6.26 Sia $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{per} \quad x < 0 \\ e^x - x & \text{per} \quad 0 \le x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{per} \quad x \ge 2 \end{cases}$.

Per questa funzione definita a tratti, i punti di incollamento sono 0 e 2. Poiché f è derivabile in $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ ed in $(2, +\infty)$, vorremmo sapere se è derivabile anche in 0 e 2, applicando se possibile il teorema appena dato. Prima di tutto bisogna controllare che f sia continua:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 + 1 = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - x = 1 = f(0).$$

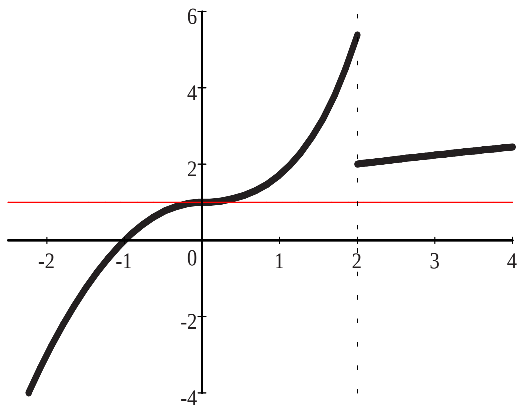
f è continua in 0, quindi possiamo applicare il teorema precedente e calcolare i limiti destro e sinistro della derivata in 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0.$$

I due limiti coincidono, di conseguenza f è derivabile anche in 0 con derivata nulla. In 2 :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} e^x - x = e^2 - 2 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x+2} = 2 = f(2).$$

Notiamo che i due limiti non coincidono, quindi f presenta in 2 un punto di discontinuità. Di conseguenza f non può essere derivabile in 2, come possiamo vedere dal grafico:



[5] Nel caso in cui f sia continua in x_0, ma derivabile solo a sinistra (o a destra) di x_0 e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = c$ (o $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = c$), allora esiste solo la derivata sinistra (o destra) di f in x_0, con $f'_-(x_0) = c$ (o $f'_+(x_0) = c$).

Teoremi su funzioni derivabili

Definizione 6.27 x_0 si dice *punto di massimo (di minimo) relativo* per una funzione f se esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 ($U^+(x_0)$ o $U^-(x_0)$ se x_0 è un estremo) in cui f sia definita e x_0 sia un punto di massimo (di minimo) per f in tale intorno, cioè :

$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))\,, \qquad$ per ogni x in $U(x_0)$ ($U^+(x_0)$ o $U^-(x_0)$ se x_0 è un estremo)

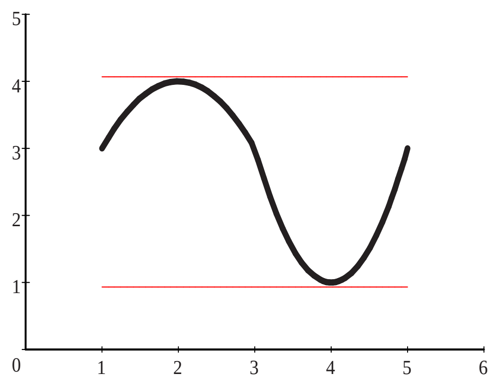
Teorema 6.28 (di Fermat)
Sia f definita in un intorno di x_0 ed x_0 sia un punto interno di massimo o minimo relativo per f. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazione 6.29 i) Non è vero il viceversa : ci sono punti non di massimo o minimo relativo per f in cui la derivata è nulla, come per esempio, l'origine per $f(x) = x^3$.
ii) Il teorema di Fermat risulta utile nel vedere se un punto x_0 di derivabilità per f non è un punto interno di massimo o minimo relativo: infatti basta controllare che la derivata $f'(x_0)$ sia $\neq 0$.
iii) Ci sono punti di massimo o minimo relativi in cui non esiste $f'(x_0)$, come, per esempio, l'origine per $f(x) = |x|$.
iv) Ci sono punti non interni di massimo o di minimo in cui la derivata (destra o sinistra) esiste ed è diversa da zero, come, per esempio, l'origine per $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x$.

Possiamo allora concludere che i punti di massimo o di minimo per f vanno ricercati tra i punti interni all'insieme di definizione di f in cui o la derivata è nulla o non esiste, oppure tra i punti non interni all'isieme di definizione di f.

Teorema 6.30 (di Rolle)
*Sia f definita e continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e sia $f(a) = f(b)$.
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

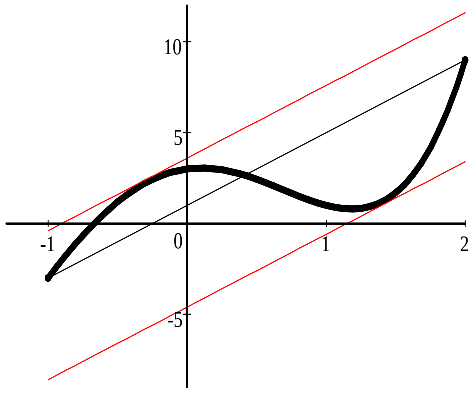
Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è orizzontale (da notare che possono esistere più punti con tale proprietà, come mostra l'esempio seguente):



$f(1) = f(5) = 3,\ f'(2) = 0,\ f'(4) = 0$

Teorema 6.31 **(di Lagrange o del valor medio)**
Sia f definita e continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b).
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta che unisce i punti $A = (a, f(a)), B = (b, f(b))$. Da notare che possono esistere più punti con tale proprietà (come mostra l'esempio seguente):



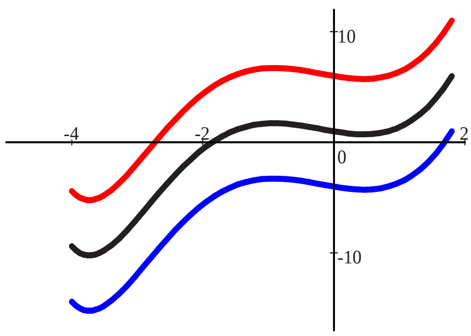
Conseguenze del Teorema di Lagrange

I - *Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b).*
Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, allora $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$.

Questo significa che le uniche funzioni derivabili con derivata nulla in tutti i punti di un intervallo sono le funzioni costanti.

II - *Siano f e g continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b).*
Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, allora $g(x) = f(x) + c, \forall x \in [a, b]$.

Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che funzioni con la stessa derivata su un intervallo hanno grafici ottenibili uno dall'altro per traslazioni lungo l'asse y :



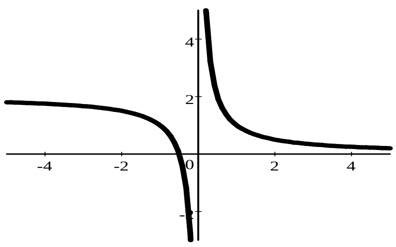
$x^3 + e^{-x}$, $x^3 + e^{-x} + 5$, $x^3 + e^{-x} - 5$

III - Relazione tra monotonia e segno della derivata su intervalli.

Sia f derivabile su I intervallo.
Se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, allora *$f$ è strettamente crescente su I* (vedi Arg. 1.)
Se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, allora *$f$ è strettamente decrescente su I* (vedi Arg. 1.)

Osservazione 6.32 Non è vero il viceversa.[6]

Osservazione 6.33 Questa relazione tra monotonia e segno della derivata vale su <u>intervalli</u>.
Per esempio $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ ha derivata sempre negativa $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ nel suo campo di esistenza, pur non essendo strettamente decrescente su di esso, in quanto $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 < f(2) = \frac{1}{2}$, ma $-1 < 2$. Il suo campo di esistenza è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, cioè l'unione di due intervalli, su ognuno dei quali (ma separatamente) la funzione è strettamente decrescente, come mostra il suo grafico :



Corollario 6.34 Se la derivata di una funzione derivabile è sempre positiva (o sempre negativa) su un intervallo I, la funzione è invertibile su I (in quanto iniettiva perché strettamente monotona).

Esempio 6.35 Verifichiamo la stretta monotonia della funzione $f(x) = e^x + x$ dell'Es. 6.21. Tale funzione è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, che è un intervallo; calcolando la sua derivata $f'(x) = e^x + 1$, che è ovviamente strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$, ricaviamo che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Esempio 6.36 Vogliamo studiare la monotonia di $f(x) = \log x + \frac{1}{x-1}$. Questa funzione è definita in $E(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, quindi nell'unione di due intervalli. Poiché è derivabile nel suo campo di esistenza, possiamo avere informazioni sulla monotonia di f studiando il segno della sua derivata:

$$\frac{d}{dx}\left(\log x + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)^2} > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 0 \text{ in } E(f) \Longleftrightarrow$$

$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ in $E(f)$:

	0 ○		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ●		1 ○		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ●	
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Di conseguenza f sarà crescente in $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ed in $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, decrescente in $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$ ed in $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

[6] Infatti ci sono funzioni strettamente crescenti su intervalli con derivata non strettamente positiva, ad esempio $f(x) = x^3$ su $\mathbb{R}$. Per avere un' equivalenza bisogna rinunciare alla monotonia stretta, cioè vale che:
Sia f derivabile su I intervallo.
$f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, se e solo se *$f$ è debolmente crescente su I.*
$f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, se e solo se *$f$ è debolmente decrescente su I.*

Ricerca di punti interni di massimo o minimo relativo attraverso la derivata

Sia f continua in x_0 e derivabile in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.
Se $f'(x) > 0$ in (a, x_0) e $f'(x) < 0$ in (x_0, b), allora x_0 è punto di massimo relativo.
Se $f'(x) < 0$ in (a, x_0) e $f'(x) > 0$ in (x_0, b), allora x_0 è punto di minimo relativo.

Quindi se a sinistra di x_0 la derivata esiste con un certo segno, a destra di x_0 la derivata esiste con segno opposto, dopo aver controllato che f è definita e continua in x_0, si può concludere che x_0 è punto di massimo o minimo relativo, anche senza sapere nulla di $f'(x_0)$.

Si ha un criterio analogo nel caso in cui x_0 sia ***un estremo*** *del campo di esistenza di f :*
nel caso di estremo sinistro, se f è continua in $[x_0, b)$, derivabile con derivata positiva (negativa) in (x_0, b), x_0 è punto di minimo (massimo) relativo.
Analogamente si opera nel caso di estremo destro.

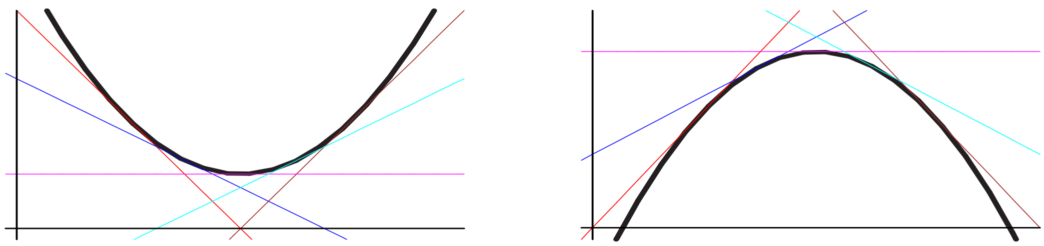
Esempio 6.37 Per la funzione $f(x) = \log x + \frac{1}{x-1}$ dell'esempio precedente, possiamo concludere che $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo.

Relazione tra convessità e segno della derivata seconda su intervalli.

Dobbiamo premettere dapprima come descrivere la convessità (vedi Arg. 1) di una funzione derivabile su un intervallo attraverso il comportamento delle rette tangenti al grafico:

Teorema 6.38 *Sia f derivabile sull'intervallo I.*

f è strettamente convessa su I se e solo se, per ogni punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f su I, la retta tangente al grafico di f in P sta al di sotto del grafico di f.
f è strettamente concava su I se e solo se, per ogni punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f su I, la retta tangente al grafico di f in P sta al di sopra del grafico di f .



f derivabile e convessa su I $\qquad$ f derivabile e concava su I

Dal precedente risultato si può dedurre la seguente relazione esistente tra la convessità di una funzione derivabile su un intervallo e la monotonia della sua derivata.

Teorema 6.39 *Sia f derivabile sull'intervallo I.*

f è strettamente convessa su I se e solo se f' è strettamente crescente su I.
f è strettamente concava su I se e solo se f' è strettamente decrescente su I.

Avendo trasferito il problema della convessità di f su quello della monotonia di f', nel caso in cui f' sia a sua volta derivabile su I, possiamo applicare quanto visto prima (III) a f' ed ottenere:

Teorema 6.40 *Sia f derivabile due volte sull'intervallo I.*
Se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, allora f è strettamente convessa su I.
Se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, allora f è strettamente concava su I.

Definizione 6.41 *Sia f derivabile sull' intervallo I ed x_0 punto interno ad I. x_0 è detto* **punto di flesso** *per f se f cambia concavità in x_0, cioè se in un intorno sinistro di x_0 f è concava (convessa) ed in un intorno destro di x_0 f è convessa (concava).*

Ovviamente se f è derivabile due volte su I, x_0 punto interno ad I è punto di flesso per f se f'' cambia segno in x_0, cioè se a sinistra di x_0 è negativa (positiva), in x_0 è nulla e a destra è positiva (negativa).

Esempio 6.42 Sia $f(x) = \log x + x^2$. La funzione f ha come campo di esistenza l'intervallo $(0, +\infty)$ ed è derivabile almeno due volte, quindi possiamo cercare i suoi intervalli di convessità studiando il segno della sua derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

$$f''(x) = \frac{-1+2x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi f è concava in $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e convessa in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. f ha un flesso in $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Applicazioni al calcolo di limiti

Per le nozioni utili sui limiti, si vedano gli Argomenti 3 e 4.

Teorema 6.43 (de l'Hôpital, forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$)
Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo $I = (x_0, b)$ con $g'(x) \neq 0$ in I e con

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0 \qquad \left(\text{caso } \frac{0}{0}\right)$$

oppure

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \pm\infty \qquad \left(\text{caso } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Se $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste (finito od infinito), allora

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{esiste} \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazione 6.44 Il teorema precedente vale anche:

- per il calcolo del limite sinistro $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (a, x_0)$;
- per il calcolo del limite completo $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, se le ipotesi valgono su $(a, x_0) \cup (x_0, b)$;

- per il calcolo del limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (a, +\infty)$;

- per il calcolo del limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (-\infty, b)$.

Osservazione 6.45 Attenzione a non applicare i teoremi di de l'Hôpital quando non sono verificate tutte le ipotesi, in particolare quando non si è di fronte a forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ (vedi [7]), o quando il limite del rapporto delle derivate non esiste (vedi [8]), in quanto ciò potrebbe portare a risultati del tutto sbagliati!

Esempio 6.46 Con il teorema di de l'Hôpital nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, possiamo anche verificare la gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$ enunciata nell'Arg. 4, pag. 3:

$\lim_{x\to+\infty} e^x/x = \lim_{x\to+\infty} e^x/1 = +\infty$, da cui si ha che e^x è un infinito di ordine superiore ad x per $x \to +\infty$.

(Notare che questo ci serve anche per risolvere il limite $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$, in quanto con un cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, si ha che $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} e^t/t = +\infty$).

La stessa cosa si può verificare per e^x e x^α, con $\alpha > 0$, applicando ripetutamente (se necessario) il teorema di de l'Hôpital fino ad ottenere al denominatore una potenza $x^{\alpha-k}$, con $\alpha - k \leq 0$, in modo da togliere l'indeterminazione, ottenendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}} = +\infty$. In conclusione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \text{per ogni} \quad \alpha > 0$$

Consideriamo ora $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x}$, con $\alpha > 0$. Applicando de l'Hôpital, si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$. Da questo possiamo ottenere che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log^k x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha/k}}{\log x}\right)^k = +\infty, \quad \text{per ogni} \quad \alpha > 0,\ k > 0.$$

Teorema 6.47 (di Taylor)

Sia f derivabile n volte in x_0. Si consideri il polinomio:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

[7] Consideriamo per esempio il $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\log x}$: se applicassimo il Teorema di de l'Hôpital in questo caso (cosa non possibile, in quanto questa NON è una forma indeterminata), otterremmo $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1/x} = 1$, mentre $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\log x} = +\infty$.

[8] Consideriamo per esempio il $\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x}$: per applicare il Teorema di de l'Hôpital nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, dovremmo prima calcolare il limite del rapporto delle derivate, che in questo caso non esiste, essendo uguale a $\lim_{x\to+\infty} 1 + \cos x$. Questo non vuole dire che il limite di partenza non esiste, ma solo che non è risolubile con questo metodo. ($\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1$, per il Criterio del confronto (vedi Arg. 3)).

Esiste un intorno $U(x_0)$ tale che, per ogni $x \in U(x_0)$, la funzione

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$, cioè (vedi Arg. 4):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0, \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

Definizione 6.48 Il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

che compare nel precedente teorema si chiama *Polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0* e l'uguaglianza

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

si chiama *Formula di Taylor di ordine n in x_0*.
Nel caso particolare $x_0 = 0$, il polinomio prende il nome di *Polinomio di Mc Laurin di ordine n* ed assume la forma:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Osservazione 6.49 Il teorema di Taylor permette di approssimare in un intorno di x_0 una funzione derivabile n volte in x_0 con un polinomio, in quanto si ha che:

se $P_n(x)$ non è identicamente nullo [9], $\quad f(x) \sim P_n(x) \quad$ per $x \to x_0 \qquad (\otimes)$

ed in particolare, se $f^{(\tilde{n})}(x_0)$ è la prima derivata non nulla in x_0,

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f^{(\tilde{n})}(x_0)}{\tilde{n}!}(x-x_0)^{\tilde{n}} \qquad \text{per } x \to x_0$$

(da notare che $f(x) = P_n(x)$ se e solo se f è un polinomio di grado $\leq n$.)

Di conseguenza possiamo applicare tale risultato al calcolo di limiti per $x \to x_0$.
In particolare possiamo calcolare la Formula di Taylor per le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\log(x+1)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ per $x \to 0$ e ottenere i seguenti sviluppi di McLaurin [10], che sono la generalizzazione di quanto mostrato nelle tabelle dei limiti notevoli in Arg. 4 ed alquanto utili per risolvere forme indeterminate nei limiti per $x \to 0$:

[9] $P_n(x)$ è identicamente nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, cioè se e solo se tutte le derivate di f fino all' ordine n sono nulle in x_0. Quindi la relazione $f(x) \sim P_n(x)$ è valida solo se esiste almeno una derivata di f di ordine minore od uguale ad n che sia non nulla in x_0.

[10] Possiamo notare nella tabella che nel polinomio di Taylor di $\sin x$ ed $\arctan x$ compaiono solo potenze dispari di x, mentre in quello di $\cos x$ compaiono solo potenze pari: questo non è un caso, visto che le prime due sono funzioni dispari, mentre il coseno è una funzione pari (vedi Arg. 1).

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$, per $x \to 0$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$, per $x \to 0$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1})$, per $x \to 0$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, per $x \to 0$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$, per $x \to 0$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$, per $x \to 0$

Esempio 6.50 Dobbiamo calcolare il $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+x-8}+2}{x}$, che presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Il denominatore è già un polinomio di grado 1. Il numeratore è una funzione f derivabile in 0 e quindi possiamo determinare il polinomio di Mc Laurin di ordine 1 dato da $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$. Poiché $f(0) = 0$, abbiamo solo bisogno di conoscere $f'(0)$ e quindi calcoliamo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+x-8)^{-\frac{2}{3}}(2x+1), \quad \text{da cui} \quad f'(0) = \frac{1}{3}(-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$$

Quindi $P_1(x) = \frac{1}{12}x$ non è identicamente nullo e possiamo allora applicare la relazione $(\otimes)$ e ottenere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+x-8}+2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x}{x} = \frac{1}{12}.$$

Esempio 6.51 Ci sono casi in cui non basta fermarsi al primo ordine, proprio perchè $P_1(x)$ risulta identicamente nullo, come per $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+x)}$. Infatti, se utilizziamo lo sviluppo $\sin(x) = x + o(x)$ di Mc Laurin per $\sin(x)$ di ordine 1, otteniamo che il polinomio $P_1(x)$ di Mc Laurin del numeratore coincide con il polinomio nullo. In tali casi, occorre proseguire con gli ordini successivi, sempre che sia possibile. Abbiamo quindi bisogno del termine successivo non nullo, cioè di $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \to 0$, quindi al numeratore si ottiene :

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x = -\tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\tfrac{1}{6}x^3 \text{ per } x \to 0$$

Al denominatore possiamo usare $\log(1+x) = x + o(x) \sim x$ per $x \to 0$ ed ottenere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x\to 0} -\tfrac{1}{6}x^2 = 0.$$