

Lezione 1

Insiemi e numeri

1. Nozione di insieme, sottoinsieme, appartenenza

Con la parola **insieme** intendiamo una collezione di oggetti detti suoi **elementi**. Ogni insieme è denotato con lettere maiuscole e i suoi elementi con lettere minuscole.

Esempio 1.1 Se A è l'insieme delle vocali della parola musica si scrive

$$A = \{u, i, a\}.$$

Esempio 1.2 I numeri $0, 1, 2, 3, \dots$ formano un insieme che indichiamo con \mathbb{N} e chiamiamo insieme dei **numeri naturali**.

Nel primo esempio abbiamo indicato un insieme (finito) elencando i suoi elementi. Un altro modo di definire un insieme può essere quello di dare una sua proprietà caratteristica, ad esempio: “sia B l'insieme dei numeri naturali divisibili per 3”. Possiamo allora scrivere:

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}.$$

Se A è un insieme e a è un suo elemento si scrive $a \in A$ e si legge “ a appartiene ad A ”. Per indicare che a non è un elemento di A si scrive $a \notin A$.

Ad esempio: $18 \in B$ e $5 \notin B$. Utilizzando il simbolo \in possiamo riscrivere in modo più preciso l'insieme B :

$$B = \{b \in \mathbb{N} \text{ tali che } b = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si dice che un insieme B è un **sottoinsieme** di A (o che B è **contenuto** in A) se ogni elemento b dell'insieme B è anche un elemento di A . In simboli:

$$B \subseteq A \quad (\text{o anche: } A \supseteq B).$$

Esempio 1.3 Siano $A = \{u, i, a\}$ e $B = \{u, i\}$, allora si ha $B \subseteq A$.

Esempio 1.4 Sia B l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e sia C l'insieme dei numeri naturali multipli di 12. Allora si ha $C \subseteq B$.

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$. Questo è il modo per verificare che i due insiemi A e B sono uguali (coincidono).

2. Intersezione e unione di insiemi. Insieme complementare

Definizione 1.5 L'insieme degli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B è detto **intersezione** di A e B e denotato $A \cap B$. Si scrive

$$A \cap B = \{s \text{ tali che } s \in A \text{ e } s \in B\}.$$

Esempio 1.6 Siano $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ e $B = \{c, d, 1, 2\}$. Allora

$$A \cap B = \{c, 1, 2\}.$$

Esempio 1.7 Sia A l'insieme dei numeri naturali multipli di 2 e sia B l'insieme dei numeri naturali multipli di 3. Determiniamo $A \cap B$.

Un elemento d è contemporaneamente in A e in B se e solo se è divisibile contemporaneamente per 2 e 3: ossia è un multiplo di 6. Cioè

$$A \cap B = \{0, 6, 12, \dots\} = \{d \in \mathbb{N} \text{ tali che } d = 6n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Due insiemi possono *non* avere elementi comuni. In tal caso si dice che essi sono **disgiunti**, o che la loro intersezione è l'**insieme vuoto**, indicato con \emptyset , insieme caratterizzato dal non avere elementi.

Esempio 1.8 Siano A e B gli insiemi costituiti dai punti di due rette diverse nel piano. Allora $A \cap B$ è l'insieme vuoto se le rette sono parallele; in caso contrario, $A \cap B$ è un solo punto del piano.

Definizione 1.9 L'insieme degli elementi che appartengono ad *almeno uno* degli insiemi A e B è detto **unione** di A e B e denotato $A \cup B$. Si scrive

$$A \cup B = \{s \text{ tali che } s \in A \text{ oppure } s \in B\}.$$

Esempio 1.10 Siano $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ e $B = \{c, d, 1, 2\}$, allora

$$A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}.$$

Esempio 1.11 Sia A l'insieme dei numeri naturali minori di 21 e B l'insieme dei numeri naturali maggiori di 21. Allora $A \cup B$ è l'insieme dei numeri naturali diversi da 21.

Se un insieme A è contenuto in un insieme S , si possono considerare gli elementi di S che non sono in A . A questa idea corrisponde la nozione di *insieme complementare*.

Definizione 1.12 Sia S un insieme che si suppone fissato e sia $A \subseteq S$. L'insieme degli elementi che appartengono ad S e non appartengono ad A è detto **complementare** di A (in S) e denotato con A^c . Si scrive:

$$A^c = \{s \in S \text{ tali che } s \notin A\}.$$

Esempio 1.13 Siano $S = \{a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$. Allora $A^c = \{d, e, f, 4, 5\}$.

Esempio 1.14 Siano $S = \mathbb{N}$ e A l'insieme dei numeri naturali pari. Allora A^c è l'insieme dei numeri naturali dispari.

3. Insiemi numerici

Abbiamo già introdotto l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} .

Denotiamo con \mathbb{Z} l'insieme degli **interi relativi**, ossia dei numeri: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$

Denotiamo con \mathbb{Q} l'insieme dei **numeri razionali**.

Ogni numero razionale può essere rappresentato da una frazione della forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ rappresentano lo stesso numero razionale quando $ad = bc$.

Quindi le frazioni $\frac{-14}{35}$ e $\frac{4}{-10}$ rappresentano lo stesso numero razionale che possiamo indicare più semplicemente con $-\frac{2}{5}$.

È spesso utile saper **confrontare** due frazioni (ossia stabilire quale delle due è maggiore). Siano $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ due frazioni con denominatore maggiore di zero (ossia $b > 0$ e $d > 0$). Diciamo che

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{se e solo se} \quad ad < bc.$$

Esempio 1.15 Confrontiamo le seguenti coppie di frazioni: $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{13}$ e $-\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{11}$.

- $\frac{3}{10} < \frac{4}{13}$ infatti $3 \cdot 13 = 39$, $4 \cdot 10 = 40$ e $39 < 40$.
- $-\frac{2}{7} < -\frac{3}{11}$ infatti $(-2) \cdot 11 = -22$, $(-3) \cdot 7 = -21$ e $-22 < -21$.

Ricordiamo che la **somma** e il **prodotto** di due frazioni si eseguono come segue

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Inoltre si ha: $\frac{a}{b} = 0$ se e solo se $a = 0$.

(Ricordiamo che il denominatore non può MAI essere uguale a zero.)

Data una frazione $\frac{a}{b}$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$ si dice **frazione reciproca** di $\frac{a}{b}$ la frazione $\frac{b}{a}$.
Abbiamo allora che

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Effettuare la **divisione** di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ (con $c \neq 0$ e $d \neq 0$) significa moltiplicare $\frac{a}{b}$ per il reciproco di $\frac{c}{d}$, cioè:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Esempio 1.16 $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} : \frac{9}{2} = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 6 - 1 \cdot 5}{30} = \frac{12 - 5}{30} = \frac{7}{30}$.

Esempio 1.17 Vogliamo determinare per quali interi $n > 0$ si ha che la differenza delle due frazioni

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

è minore di $\frac{1}{10}$. Deve essere

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{10},$$

ossia

$$n(n+1) > 10$$

che è evidentemente verificata per $n \geq 3$.

Ogni numero razionale può essere rappresentato con sviluppo decimale *finito* o *infinito periodico*.
Ad esempio:

$$-\frac{1}{4} = -0.25; \quad \frac{7}{5} = 1.4; \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}; \quad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}.$$

I numeri corrispondenti a sviluppi decimali *infiniti non periodici* come

$$\sqrt{2} = 1.414213562\dots \quad ; \pi = 3.141592654\dots$$

sono detti numeri **irrazionali**.

Definizione 1.18 L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali costituisce l'insieme dei numeri **reali**, che viene indicato con \mathbb{R} .

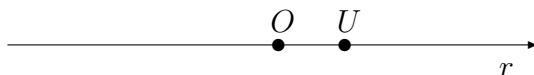
Una descrizione rigorosa dell'insieme dei numeri reali è al di là degli obiettivi di queste lezioni. Naturalmente si ha

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Dati i numeri reali a e b è sempre definita la somma $a + b$ (la sottrazione $a - b$) e la moltiplicazione $a \cdot b$ (e, se $b \neq 0$, la divisione $a : b$, che spesso si indica con la notazione $\frac{a}{b}$).

In particolare, dato il numero reale a , chiamiamo **opposto** di a il numero $-a$ e, se $a \neq 0$, chiamiamo **reciproco** di a il numero $\frac{1}{a}$.

È spesso comodo visualizzare i numeri reali come “punti di una retta”. Per far questo consideriamo la retta r e su di essa fissiamo un punto O (origine), un segmento OU come unità di misura e un verso di percorrenza da considerarsi positivo: in questo modo abbiamo costruito una **retta orientata**.

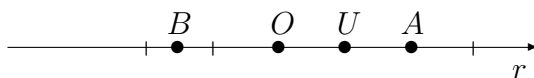


Sia ora a un numero reale non nullo: partendo da O ci muoviamo sulla retta orientata

- se $a > 0$ nel verso positivo della retta, di un segmento OA di lunghezza a ;
- se $a < 0$ nel verso negativo della retta, di un segmento AO di lunghezza $-a$.

In entrambi i casi associamo al numero a l'estremo finale del segmento OA . (Al numero 0 associamo il punto O .) Così ad ogni numero reale abbiamo associato un punto della retta orientata.

Ad esempio nella figura sottostante al numero 2 associamo il punto A , al numero reale $-\frac{3}{2}$ associamo il punto B .

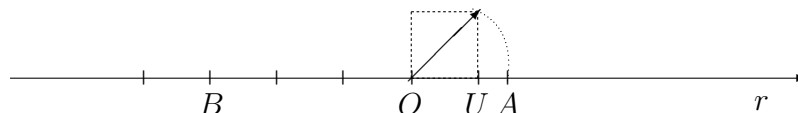


Viceversa, dato un punto A sulla retta orientata

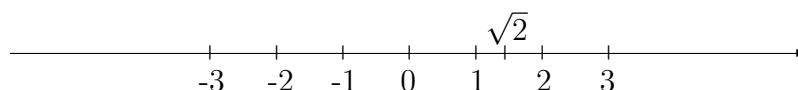
- se A segue O nel verso positivo della retta, associamo ad A il numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU ;
- se A precede O nel verso positivo della retta, associamo ad A l'opposto del numero reale che esprime la misura del segmento OA rispetto all'unità di misura OU .

Così ad ogni punto della retta orientata abbiamo associato uno (e un solo) numero reale.

Ad esempio nella figura sottostante al punto U associamo il numero reale 1, al punto A associamo $\sqrt{2}$ (OA è la diagonale del quadrato di lato OU), e al punto B associamo -3 .



Questo ci permette di identificare i punti della retta orientata con i numeri reali e quindi spesso si pongono sulla retta direttamente i numeri invece dei punti. In questo contesto i numeri si chiamano **ascisse** dei punti corrispondenti.



La distanza (rispetto all'unità di misura fissata) di un punto A di ascissa a da O è sempre un numero non negativo dato da:

- a se $a \geq 0$;
- $-a$ se $a < 0$.

Abbiamo così introdotto il **modulo** (o valore assoluto) $|a|$ del numero reale a che è così definito:

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{se } a < 0 \\ a & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

Ad esempio: $|-2| = -(-2) = 2$; $|3| = 3$; $|\frac{-2}{5}| = \frac{2}{5}$; $|0.4| = 0.4$; $|0| = 0$.

Concludendo $|a|$ rappresenta la distanza del punto di ascissa a dall'origine O , e quindi è sempre $|a| \geq 0$.

In generale, $|a - b|$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi A e B aventi ascisse a e b . Quindi è sempre $|a - b| = |b - a|$.

Esempio 1.19 L'insieme $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tali che } |a| < 2\}$ è costituito dai numeri reali che sono ascisse di punti a distanza minore di 2 dall'origine. Sono quindi tutti i numeri reali compresi tra -2 e 2 . Ossia

$$A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < a < 2\}.$$

Un sottoinsieme di \mathbb{R} della forma di quello dell'esempio precedente è un intervallo.

Si chiamano **intervalli** i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} :

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x < b\}$ intervallo limitato aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x \leq b\}$ intervallo limitato chiuso

- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra (e aperto a destra)
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x < b\}$ intervallo aperto illimitato (a sinistra) o semiretta
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \geq a\}$ intervallo illimitato (a destra) o semiretta
- $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ sono definiti analogamente.

L'insieme A dell'esempio precedente è quindi l'intervallo $(-2, 2)$.

4. Proporzioni, scale e percentuali

Consideriamo un treno che viaggia alla velocità costante di 110 chilometri all'ora. Ovviamente in 30 minuti percorre 55 chilometri, in due ore 220. E se volessimo sapere in quanto tempo ha percorso 242 chilometri?

Osserviamo che il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato è costante (purché spazi e tempi siano rispettivamente espressi nella stessa unità di misura), ossia

$$\frac{110}{60} = \frac{55}{30} = \frac{220}{120} = \dots$$

Quindi, detto T il tempo (in minuti) necessario a percorrere 242 chilometri si ha:

$$\frac{110}{60} = \frac{242}{T} \quad \text{cioè} \quad 110 \cdot T = 60 \cdot 242 \quad \text{cioè} \quad T = \frac{60 \cdot 242}{110} = 132,$$

ossia 2 ore e 12 minuti.

In generale, si usa esprimere l'uguaglianza dei rapporti: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ usando la scrittura

$$a : b = c : d$$

che si chiama **proporzione** e che si legge “ a sta a b come c sta a d ”.

Esempio 1.20 La tariffa applicata per chiamate da un telefono pubblico è a scatti e ogni scatto costa 10 centesimi di Euro. Per chiamate verso la Lituania la durata di ogni scatto è di 8.2 secondi. Vogliamo calcolare il costo C (in centesimi di Euro) a minuto che quindi soddisfa la proporzione

$$10 : 8.2 = C : 60$$

Ricaviamo quindi che $C = \frac{6000}{82} \simeq 73.17$ centesimi di Euro.

Esempio 1.21 La detrazione fiscale per lavoro dipendente è di 1150 Euro su base annuale (365 giorni di lavoro). Calcoliamo la detrazione D spettante ad un lavoratore che ha lavorato 87 giorni nel corso dell'anno. Si avrà

$$1150 : 365 = D : 87$$

Ricaviamo quindi che $D = \frac{1150 \cdot 87}{365} \simeq 274.1$ Euro.

Nel linguaggio topografico dire che una cartina, o un atlante, “è in scala 1 : 200 000” significa che il rapporto tra le distanze riportate sulla carta e quelle reali è $\frac{1}{200\,000}$.

Ossia, se su una cartina di questo tipo la distanza tra due paesi è di 3.5 centimetri, la loro distanza effettiva D (in centimetri!!) è tale che

$$1 : 200\,000 = 3.5 : D$$

cioè $D = 700\,000 \text{ cm} = 7\,000 \text{ m} = 7 \text{ km}$.

Il rapporto tra due grandezze omogenee (ossia dello stesso tipo⁽¹⁾) è un numero che non dipende dall'unità usata per misurare entrambe. Ad esempio, se, in una classe di 25 studenti, 3 hanno l'influenza, possiamo dire che i $\frac{3}{25}$ della classe è ammalato.

Si usa spesso esprimere il rapporto di grandezze omogenee in forma **percentuale** ossia scrivendo la frazione in modo che il denominatore sia 100. Nell'esempio

$$\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12.$$

Più brevemente si scrive 12% e si dice la percentuale di ammalati è il 12% (e si legge 12 *per cento*). Non sempre è possibile esprimere un rapporto esattamente in forma percentuale, talvolta bisogna approssimarlo: ad esempio

$$\frac{1}{3} = 33\% \text{ circa e si scrive } \frac{1}{3} \simeq 33\%.$$

Esempio 1.22 Il fondo di investimento “SoldiPiù” nel 2000 ha guadagnato il 25%, mentre nel 2001 ha perso il 20%. Vogliamo calcolare quale è stato il rendimento su base biennale.

Supponiamo che la somma investita all'inizio del 2000 fosse C . Alla fine del primo anno la somma è aumentata del 25% ossia è

$$C + \frac{25}{100} \cdot C = \frac{5}{4} \cdot C.$$

Nel 2001 quest'ultima è diminuita del 20% ossia è diventata:

$$\left(\frac{5}{4} \cdot C\right) - \frac{20}{100} \left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{4} \cdot C\right) = C.$$

Quindi il rendimento biennale è stato nullo, ossia il bilancio biennale è stato di perfetto pareggio.

Esempio 1.23 Il fondo di investimento “SoldiPiù Plus” ha perso nell'ultimo anno il 17.5%. Sapendo che ora le quote in possesso valgono 66 000 Euro, quale era il capitale investito l'anno scorso?

Detto C il capitale iniziale, sappiamo che dopo la perdita del 17.5% il capitale è diventato

$$C - \frac{175}{1\,000} \cdot C = \frac{33}{40} \cdot C = 66\,000$$

quindi $C = \frac{40}{33} \cdot 66\,000 = 80\,000$ Euro.

¹⁾ Ad esempio due lunghezze entrambe espresse in metri, oppure due capacità entrambe espresse in litri.