

Argomento 12 - Esercizi

ESERCIZIO 12.1) Dati i vettori (con le componenti allineate in colonna)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare:

- a) $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$; b) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \sqrt{2}\mathbf{v}_4$; c) $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$;
d) $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2$; e) $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3$; f) $\mathbf{v}_3 \bullet \mathbf{v}_4$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile,

- a) $A + B$; b) $C - D^T$; c) $A + A^T$; d) $B + C$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

calcolare

- a) A^T ; b) $A + B$; c) $A - 2B$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.4) Date le matrici e i vettori colonna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare

a) $A\mathbf{v}_1$; b) $A\mathbf{v}_2$; c) $A\mathbf{v}_3$; d) $B\mathbf{v}_1$; e) $B\mathbf{v}_2$; f) $B\mathbf{v}_3$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare

a) AB ; b) BA ; c) AC ; d) BC ; e) CD ; f) DA ; g) DB ; h) DC .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.6) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

determinare per quali valori del parametro reale a si ha:

a) $AB = BA$; b) $AC = CA$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.7) Date le matrici e il vettore colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcolare i prodotti: $A\mathbf{c}$ e AB .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, mostrare che vale la relazione

$$7A - A^2 = 14I$$

(dove $A^2 = AA$ e I è la matrice identica).

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.9) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare quali coppie di matrici diverse possono essere moltiplicate tra loro ed eseguire le moltiplicazioni.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.10) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- a) Calcolare le matrici: $A + B$, AB e BA ;
- b) Verificare che: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$;
- c) Verificare che: $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.11) Calcolare il determinante delle seguenti matrici.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.12) Determinare per quali valori del parametro reale k si ha $\det A = 0$, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.13) Date le matrici

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, & \text{b)} & B = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{c)} & C = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}, & \text{d)} & D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \end{array}$$

calcolarne, se possibile, le inverse.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.14) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

- a) Calcolare i complementi algebrici di tutti gli elementi di A ;
- b) Scrivere A^{-1} .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.15) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolarne l'inversa.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.16) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{b)} & B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \\ \text{c)} & C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, & \text{d)} & D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.17) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 12.18) Determinare, al variare del parametro reale k , la caratteristica delle matrici

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 & 8k-8 \\ 2 & k & k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & -2-k \\ 1 & 2 & k^3 & k \\ 0 & k-2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 12.19) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ k & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

A) se $k \neq 6$, allora $\det A \neq 0$; **B)** se $k = 6$, allora $\text{Car } A = 2$;
C) se $k \neq -6$, allora $\text{Car } A \neq 3$; **D)** se $k = -6$, allora $\det A = 0$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 12.20) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$, ha caratteristica 3

A) per ogni valore di k ; **B)** per nessun valore di k ;
C) per un solo valore di k ; **D)** per ogni valore di k tranne uno.

Argomento

Soluzione