Argomento 5
Continuità e teoremi sulle funzioni continue

I. Continuità

Consideriamo un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ ed una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Per poter dare un senso alla definizione che segue, è necessario che x_0, oltre ad essere un punto del dominio di f, sia anche un punto di accumulazione per f (cioè, vd. Arg.3, che in ogni intorno di x_0 esistano punti del dominio di f diversi da x_0). Infatti, ci serve poter parlare sia del valore $f(x_0)$ che del limite di f per x che tende a x_0.

Definizione 5.1 *La funzione f è* **continua nel punto** x_0 *se accade che*

$$\boxed{(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

È utile osservare che nella scrittura $(*)$ sono contenute almeno <u>tre</u> informazioni:

i) la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

ii) il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito;

iii) inoltre, questo limite e il valore $f(x_0)$ coincidono.

Esempi:

5.2 La funzione $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 0$, perchè $f(0) = 0$, e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

5.3 La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ non è definita per $x = 0$, e quindi non ha senso chiedersi se è continua in $x_0 = 0$.

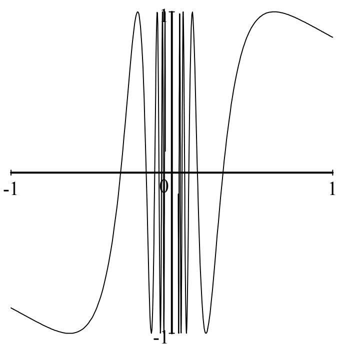
5.4 La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ non esiste.

5.5 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè (vd. Arg.4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$.

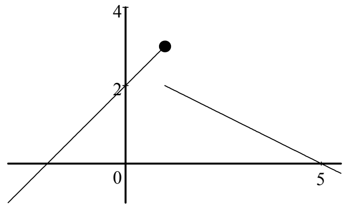
È invece continua in $x_0 = 0$ la funzione $\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ che si ottiene dalla f cambiando il valore $f(0) = 0$ con il valore $\overline{f}(0) = 1$.

5.6 La funzione $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{5 - x}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 1$, perchè $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ non esiste.

Più precisamente, esistono sia il limite destro che quello sinistro, ma sono diversi tra loro.



Esempio 5.4



Esempio 5.6

II. Continuità (nei punti di un intervallo)

Nel seguito ci occupiamo solo del caso in cui l'insieme A in cui è definita la funzione f è un <u>intervallo</u>.

Definizione 5.7 La funzione f è **continua in** A se è continua in ogni punto di A ([1]).

Ad esempio, le funzioni costanti sono palesemente continue in tutti i punti di un qualsiasi intervallo A in cui noi si decida di definirle. È anche semplice vedere che questo vale anche per la funzione $f(x) = x$.

Tutti i punti di un intervallo, tranne eventualmente gli estremi, sono punti interni (vedi Arg.3), cioè sono punti dai quali è possibile spostarsi un poco, sia verso sinistra che verso destra, senza uscire da A; equivalentemente, ognuno di questi punti ammette un intorno tutto contenuto in A.

Osservazione 5.9 Quando x_0 è un punto <u>interno</u> all'intervallo A, le informazioni **ii) e iii)** contenute nella definizione $(*)$ possono essere riformulate con più precisione; se la funzione f è continua in x_0 allora:

i') la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

ii') esistono, sono finiti, e sono uguali tra loro i limiti (unidirezionali) destro $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e sinistro $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$;

iii') inoltre, questi due limiti e il valore $f(x_0)$ coincidono, cioè

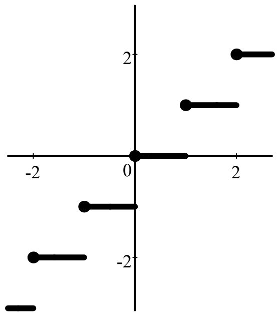
$$(**) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Osservazione 5.10 Nel caso in cui il valore $f(x_0)$ coincida con uno dei due limiti unidirezionali, ma non con l'altro (come nell'Esempio 5.6), si usa parlare di continuità unidirezionale. Più precisamente, se accade che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, si dice che in x_0 la funzione f è **continua da sinistra** (ma non da destra!). Ovviamente, per un punto x_0 interno ad A la funzione è continua se e solo se è continua sia da sinistra che da destra.

Esempio 5.11 La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte intera di x) associa ad ogni numero reale x il più grande intero che non supera x. Ad esempio, $\lfloor 51.287 \rfloor = 51$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.73 \rfloor = -3$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Se x_0 è un numero intero, ad esempio $x_0 = 4$, per x appena più piccolo di 4 la funzione vale 3, mentre per

[1] In questo caso si usa dire che f appartiene alla classe della funzioni continue in A, cioè che $f \in \mathcal{C}(A)$.

$x = 4$ e per x appena più grande di 4 abbiamo $f(x) = 4$. Così, f è continua da destra in $x_0 = 4$, ma non da sinistra. Questo discorso può essere ovviamente ripetuto per ogni altro punto a coordinata intera $x = n$, in cui $f(n) = n$. Si ottiene un grafico a gradini, composto da segmenti orizzontali che contengono l'estremo sinistro, ma non quello destro.



Esempio 5.11

Osservazione 5.12 Quando x_0 è un punto estremo appartenente all'intervallo A, i punti ii') e iii') dell'Osservazione 5.9 non hanno più senso. In questo caso si potrà parlare solo di limite sinistro (o destro), e quindi le quantità coinvolte in $(**)$ sono solo due, e non tre.
Così, se $A = (a, x_0]$ la funzione f è continua in x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ cioè se, nella notazione dell'Oss.5.10, f è continua da sinistra.

Esempio 5.13 La funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ è definita in $[-1, 1]$; poichè $f(1) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, diciamo che f è continua nel punto $x = 1$. Analogamente $f(-1) = 0 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, e quindi f è continua anche in $x = -1$.

Esempio 5.14 La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ristretta al solo intervallo $[0, 1]$, assume i valori

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \\ 1 & x = 1 \end{cases} .$$

Perciò, relativamente a questo intervallo f è continua in $x = 0$, ma non lo è in $x = 1$.

Osservazione 5.15 Frequentemente si incontrano situazioni in cui una funzione f è definita in un insieme del tipo $A \setminus \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$, cioè nell'intervallo (a, b) privato del punto interno x_0. Se esiste, finito, il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, è possibile definire, in tutto $A = (a, b)$, una nuova funzione $\overline{f}$ come

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases} .$$

Questa funzione risulta essere continua in x_0, e viene detta **prolungamento per continuità** di f in x_0. Chiaramente, se f è continua in $A \setminus \{x_0\}$, la funzione $\overline{f}$ è continua in A.
Analogamente, se $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ e se esiste, finito, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$, possiamo prolungare per continuità la f all'intervallo $(a, x_0]$.

Esempio 5.16 Le funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \ , \ f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ , \ f_3(x) = \frac{\sin x}{x} \ , \ f_4(x) = \frac{x}{|x|}$$

sono tutte definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, come vedremo più avanti, sono continue in ogni $x \neq 0$. La f_3 può essere prolungata per continuità a tutto $\mathbb{R}$, come visto nell'Esempio 5.5. Per le altre questo non è possibile.

III. Operazioni sulle funzioni continue

La continuità di una funzione f in un punto x_0 può essere espressa, in modo elementare, dalla seguente affermazione:

a "piccole" variazioni della variabile x corrispondono "piccole" variazioni dei valori $f(x)$.

Questa affermazione è solo qualitativa, senza pretesa di fornire informazioni sulla relativa grandezza delle variazioni. Nella vita pratica è utilizzata di frequente, dando spesso per scontato di avere a che fare con funzioni continue. Ad esempio, dovendo farci un'idea approssimativa del valore del numero $\sqrt{101}$ tutti noi siamo portati a rispondere che non deve essere molto diverso da $\sqrt{100} = 10$. Il ragionamento, magari inconscio, che facciamo è il seguente: 101 è una "piccola" variazione da 100, e quindi le loro radici quadrate deve essere "vicine". Quel che dà validità a questo discorso è il fatto che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua nel punto $x_0 = 100$, come vedremo tra breve.
Così, conoscere un'ampia classe di funzioni ed avere informazioni sulla loro continuità può risultare utile.

♦ Le funzioni elementari più comunemente utilizzate

$$f(x) = x^\alpha \ , \ f(x) = |x| \ , \ f(x) = \sin x \ , \ f(x) = \cos x \ , \ f(x) = a^x \ , \ f(x) = \log_a x$$

sono continue nel loro insieme di definizione.

♦ Se f e g sono continue nel punto x_0, lo sono anche $f+g$, $f-g$, fg, e (pur di avere $g(x_0) \neq 0$) anche $\frac{f}{g}$.

♦ Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, la funzione composta $(g \circ f)$ è continua in x_0.

♦ Se f è invertibile nell'intervallo A e continua in $x_0 \in A$, la funzione inversa f^{-1} è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Esempio 5.17 Utilizzando le tre affermazioni precedenti, sono funzioni continue:

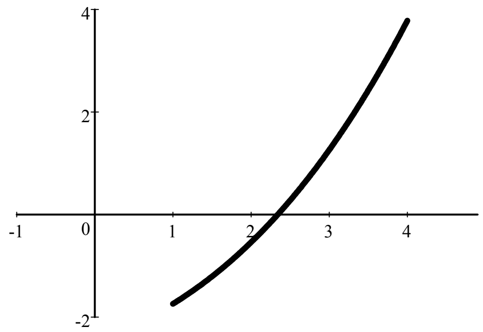
i polinomi in tutto $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan x$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $f(x) = \sqrt{7 - x^2}$ per $x \in \left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$.

IV. Principali teoremi sulle funzioni continue

♦ **Teorema della permanenza del segno** *Se f è definita in un intorno U di x_0, se è continua in x_0, e se $f(x_0) > 0$, allora esiste un opportuno intorno V di x_0, $V \subset U$, in cui f assume solo valori positivi.*

Osservazione 5.18: Il teorema dice che non si arriva, in modo continuo, a valori positivi in x_0 senza un comportamento "coerente" un po' prima e un po' dopo. Ovviamente vale anche l'enunciato analogo con valori negativi, se $f(x_0) < 0$.

♦ **Teorema degli zeri** *Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, ed ha segni discordi in $x = a$ e $x = b$, allora esiste almeno un $x_0 \in (a, b)$ in cui si ha $f(x_0) = 0$.*



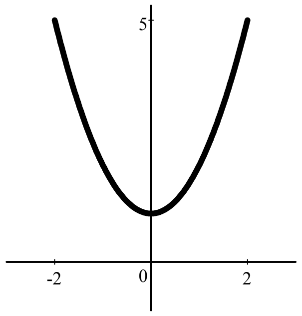
$a = 1 \ , \ b = 4 \quad ; \quad f\,(a) < 0 < f\,(b)$

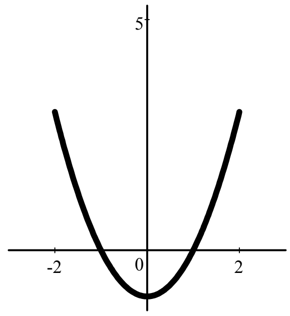
Osservazioni 5.19:

a) Non è importante sapere quale tra $f(a)$ e $f(b)$ sia positivo, l'importante è che il prodotto $f(a)f(b)$ sia negativo.

b) Il teorema non dice quante volte f si annulla in (a, b), dice solo che ciò accade almeno una volta. Ad esempio, la funzione $f(x) = \cos x$ si annulla una sola volta in $(0, \pi)$, ma tre volte in $(0, 3\pi)$.

c) Nel caso $f(a)f(b) > 0$, non è possibile affermare nulla sugli eventuali zeri di f. Ad esempio, relativamente all'intervallo $[-2, 2]$ la $f(x) = x^2+1$ soddisfa $f\,(-2)\,f\,(2) = 25 > 0$, ed f non si annulla mai; invece, relativamente allo stesso intervallo, la $f(x) = x^2 - 1$ soddisfa $f\,(-2)\,f\,(2) = 9 > 0$ ma f si annulla due volte.





Applicazioni 5.20:

a) Utilizzando questo teorema, possiamo garantire che *"Ogni polinomio f di grado dispari si annulla, in $\mathbb{R}$, almeno una volta"*. Infatti, se il termine di grado più alto ha coefficiente positivo si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e quindi esistono certamente un $a < 0$ ed un $b > 0$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. (Nel caso in cui il coefficiente del termine di grado più alto è negativo, basta ragionare sul polinomio $-f$).

b) Un'altra conseguenza è: *"Ogni numero $\alpha > 0$ ammette, per ogni intero $n \geq 1$, almeno una radice n-sima positiva"*. Infatti, la funzione $f(x) = x^n - \alpha$ ha valore negativo in $x = 0$, e valore positivo per qualche x sufficientemente grande.
Altre considerazioni sulla monotonìa di f permettono in realtà di stabilire che questa radice n-sima è unica, denotata con il simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$.

c) Un possibile utilizzo del teorema degli zeri è legato al calcolo approssimato degli zeri di una funzione, mediante il cosiddetto "metodo di bisezione", che illustriamo con un esempio.
La funzione $f(x) = 8x^3 + 4x - 2$ si annulla almeno una volta in un punto $x_0 \in (0,1)$, perchè $f(0) = -2 < 0 < 10 = f(1)$. Inoltre, nel punto medio dell'intervallo $(0,1)$ si ha $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$, per cui $0 < x_0 < \frac{1}{2}$. Continuando a valutare f nei punti medi degli intervalli in cui abbiamo "intrappolato" il punto x_0 abbiamo: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{8} < 0$, per cui $\frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{64} < 0$, per cui $\frac{3}{8} < x_0 < \frac{1}{2}$; ...

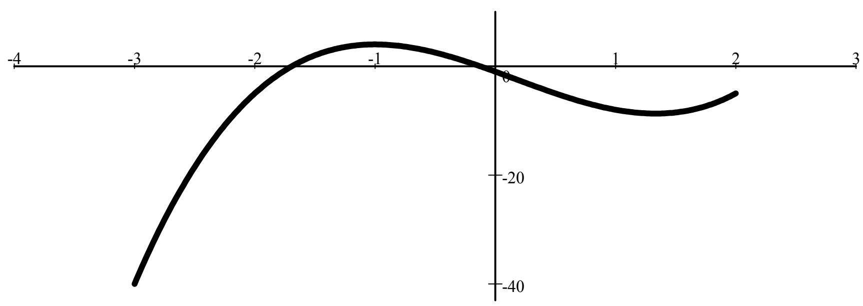
♦ **Teorema di <u>Darboux</u> (o dei <u>valori intermedi</u>)** *Se f è continua in un intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

Osservazioni 5.21:

a) Attenzione, non si sostiene che f assume <u>solo</u> i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, ma che almeno una volta <u>tutti</u> quei valori vengono assunti. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$, e l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, e quindi il teorema garantisce che tutti i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ vengono assunti da f quando x percorre l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.
Vale la pena osservare che in questo intervallo la f assume per ben tre volte i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ed assume anche tutti i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1 e tutti quelli compresi tra -1 e $-\frac{1}{2}$.

b) Una buona traduzione intuitiva di questo teorema può essere *"Una funzione continua in un intervallo non fa salti"*.

♦ **Teorema di <u>Weierstrass</u>** *Se f è continua in un intervallo $[a,b]$, assume massimo e minimo (assoluti) in $[a,b]$.*



$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x - 1; \ \max_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-1) = 4; \ \min_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-3) = -40.$$

Osservazioni 5.22:

a) Una prima informazione contenuta nella tesi del teorema di Weierstrass è: *"Se f è continua in $[a, b]$, allora è limitata in $[a, b]$"*. In più, oltre ad affermare che f è limitata, il teorema è più preciso, perchè garantisce l'esistenza di almeno due punti $x_0, x_1 \in [a, b]$ per i quali si ha

$$m = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = M \qquad\qquad \forall x \in [a, b].$$

b) Per la validità del teorema di Weierstrass è fondamentale che l'intervallo di continuità di f sia chiuso e limitato come mostrato nel seguente

Esempio 5.23 La funzione $f(x) = x$ è continua e limitata in $(0, 1]$, ma non assume minimo.
La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $[1, +\infty)$, ammette massimo ma non minimo.
La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $(0, 1]$, assume minimo, ma non è limitata.
La funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ non è continua in $[0, 1]$, ammette minimo ma non massimo.

♦ I teoremi di Weierstrass e Darboux possono essere unificati nel seguente teorema:

> *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, assume tutti i valori compresi tra il proprio minimo assoluto ed il proprio massimo assoluto.*

V. Classificazione delle discontinuità

Un **punto di discontinuità** di f è un punto x_0 in cui f è definita, ma non è continua. Alla luce delle osservazioni contenute nel paragrafo II, possiamo dare tre diverse tipologie per questi punti. Per semplicità, ci occupiamo ancora di funzioni definite su intervalli.

♦ Discontinuità eliminabile:

i) Quando x_0 è un punto interno ad A, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste, è finito, ma è diverso da $f(x_0)$.
Questo significa che se ci avviciniamo ad x_0 sia da destra che da sinistra f ammette lo stesso limite, ma in x_0 il valore di f è diverso.
L'aggettivo "eliminabile" ci dice che la discontinuità può essere rimossa semplicemente cambiando il valore assunto da f in x_0, e ponendolo uguale a quello del limite. È la situazione incontrata nell'Esempio 5.5, dove la discontinuità è stata rimossa costruendo la funzione $\overline{f}$.

ii) Sono anche eliminabili quelle discontinuità situate in punti estremi di un intervallo, in cui il limite unilaterale esiste, è finito, ma diverso da $f(x_0)$.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.14, in cui la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$. Cambiando il suo valore in $f(1) = 0$ otteniamo una funzione continua nell'intervallo $[0, 1]$.

♦ **Discontinuità di I specie:**

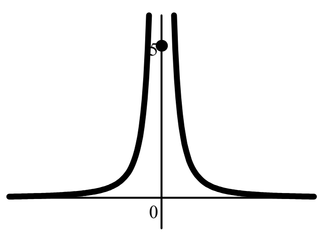
È un punto interno ad A, in cui esistono, finiti, i due limiti unidirezionali, ma sono diversi tra loro. In questo caso non c'è possibilità di eliminare la discontinuità. Possiamo solo, come nell'Oss.5.10, eventualmente avere continuità da destra o da sinistra.
È il caso della funzione dell'Esempio 5.6, che ha un punto di discontinuità di I specie in $x = 1$. Per la funzione dell'Esempio 5.11 tutti i punti ad ascissa intera sono discontinuità di I specie.

♦ **Discontinuità di II specie:**

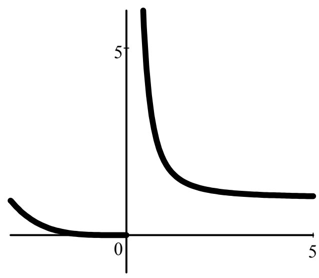
È un punto di A in cui f non è continua, e nessuno dei due casi precedenti si applica. Questo significa che: se il punto è interno ad A, almeno uno dei due limiti unidirezionali di f non esiste, oppure esiste ma non è finito; se il punto è un estremo per l'intervallo A, l'unico limite unidirezionale calcolabile non esiste, oppure esiste ma non è finito.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.4, dove non esiste nessuno dei due limiti unidirezionali in $x_0 = 0$.
Altri esempi sono:

Esempio 5.24 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non ha limite finito per $x \to 0$.

Esempio 5.25 La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha limite infinito per $x \to 0^+$.



Esempio 5.24



Esempio 5.25