Argomento 10
Suggerimenti

Ex. 10.4.

1) La funzione integranda è continua in $[2, +\infty)$. Quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa in un intorno di $+\infty$. Poichè per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{(x-1)^a} \sim \frac{1}{x^a}$, si ottiene ....

2) La funzione integranda è continua in $(1, 2]$, ed è illimitata in un intorno destro del punto $x = 1$, per ogni $a > 0$. Quindi la convergenza dell'integrale va studiata in tale intorno. Con la sostituzione $t = x - 1$ si ottiene: $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^a}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{t^a}\,dt$, e quindi ......

3) L'integranda è continua in $(1, +\infty)$, ed è illimitata in un intorno destro del punto $x = 1$ per ogni $a > 0$. Quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa in tale intorno e in un intorno di $+\infty$. Per ogni $1 < x_0 < +\infty$ l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge solo se convergono i due integrali $\int_1^{x_0} f(x)\,dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$. Ma per quanto visto nei due punti precedenti ....

Ex. 10.5 In tutti questi esercizi la funzione integranda è continua nell'intervallo $[x_0, +\infty)$ indicato, e quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa per gli intorni di $+\infty$.

Ex. 10.6 In tutti questi esercizi, eccetto il 5), la funzione integranda è continua nell'intervallo $(0, b]$ indicato, ed è illimitata per $x \to 0^+$. La convergenza dell'integrale improprio va discussa per gli intorni destri di $x = 0$. Nell'esercizio 5) la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 1$; è invece illimitata se $x \to (1/2)^-$.

Ex. 10.7

1) La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è continua in $[-2, 0) \cup (0, 1]$, ed illimitata se $x \to 0$. Per la convergenza di $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ debbono convergere sia $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ che $\int_0^1 f(x)\,dx$.

2) L'integranda $f(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)}$ è continua in $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$, e non è limitata in un intorno di 0. Per ogni $0 < x_0 < +\infty$, l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente solo se sono convergenti i tre integrali $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$, $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3) L'integranda $f(x)$ è continua in $(0, +\infty)$ e non è limitata in un intorno destro di 0. Per ogni $0 < x_0 < +\infty$ l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente solo se sono convergenti i due integrali $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

4) La funzione $f(x) = \dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}}$ è continua in $[-1, 0) \cup (0, 3)$, e l'integrale converge solo se convergono contemporaneamente gli integrali $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$, $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ e $\int_{x_0}^{3} f(x)\,dx$, con $0 < x_0 < 3$.

5) La funzione integranda $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)}$ è continua in $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, ed è illimitata per $x \to \dfrac{1}{2}$.

6) Funzione integranda continua in $(-1,0) \cup (0,2]$, illimitata per $x \to (-1)^+$, ma per $x \to 0$ ...

Ex. 10.8. Utilizzare il teorema del confronto (Teor. 10.11)

Argomento 10
Soluzioni

Sol. Ex. 10.1

1) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = 1$.

2) No, la funzione integranda è continua (e quindi limitata) in $[2, 10]$.

3) No, la funzione integranda è prolungabile con continuità in $[0, 3]$, ponendo $f(0) = 1$.

4) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = -4$.

5) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = 0$.

6) No, la funzione integranda è prolungabile con continuità in $[0, 5]$, ponendo $f(0) = 2$.

Sol. Ex. 10.2

1) $\displaystyle\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\, dx = \lim_{c\to 3^+} \left[2\sqrt{x-3}\right]_c^{12} = 6$

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx = \lim_{c\to +\infty} \left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right]_2^{c} = \frac{1}{2}$

3) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx = \lim_{c\to 1^+} \left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right]_c^{3} = +\infty$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}}\, dx = \left[2\sqrt{x+4}\right]_1^{c} = +\infty$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{7} e^x\, dx = \lim_{c\to -\infty} \left[e^x\right]_c^{7} = e^7$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{c\to +\infty} \left[\arctan x\right]_0^{c} = \frac{\pi}{2}$

Sol. Ex. 10.3

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{c\to -\infty} \left[(x-1)\, e^x\right]_c^{0} = -1$

2) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\log x}\, dx = \lim_{c\to +\infty} \left[\log|\log\ x|\right]_e^{c} = +\infty$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\, dx = \lim_{c\to +\infty} \left[-\frac{1}{x^2+3x}\right]_1^{c} = \frac{1}{4}$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\,(\log x)^3\right]_2^c = +\infty$

5) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{c\to0^+} [x\ \log x - x]_c^1 = -1$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\, dx = \lim_{c\to\pi/2} [-\log(\cos x)]_0^c = +\infty$

Sol. Ex. 10.4

1) $a > 1$; 2) $a < 1$; 3) nessun a.

Sol. Ex. 10.5

1) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{4+x}{2+x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, quindi l'integrale diverge.

2) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(2+x^2)}} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$, quindi l'integrale converge.

3) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

4) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

5) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt[3]{x} - \sin x}{x\,(1+3x)} \sim \dfrac{1}{3x^{5/3}}$,quindi l'integrale converge.

6) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{e^{-x} + \sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

Sol. Ex. 10.6

1) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(2-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, quindi l'integrale converge.

2) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{\sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$, quindi l'integrale diverge.

3) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{x\sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale converge.

4) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{\cos^2 x}{x\,(5-\sqrt{x})} \sim \dfrac{1}{5x}$, quindi l'integrale diverge.

5) Per $x \to (1/2)^-$ si ha $\dfrac{\sin x}{x\,(1-2x)} \sim \dfrac{\sin(1/2)}{\left(\dfrac{1}{2}-x\right)}$, quindi l'integrale diverge.

6) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{(\sin x)^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$, quindi l'integrale diverge.

Sol. Ex. 10.7

1) Entrambi gli integrali $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ e $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ convergono. Quindi l'integrale $\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ converge.

2) Per $x \to 0$ si ha $f\,(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)} \sim \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, quindi entrambi gli integrali $\int_{-1}^{0} f\,(x)\;dx$ e $\int_{0}^{x_0} f\,(x)\;dx$ convergono, qualunque sia $x_0 > 0$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f\,(x)\;dx$ converge, $\forall\; x_0 > 0$.
Di conseguenza l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f\,(x)\;dx$ converge.

3) Per $x \to 0^+$ si ha $f\,(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt[4]{x\,(1+x)}} \sim \dfrac{x/2}{x\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}$, quindi l'integrale $\int_{0}^{x_0} f\,(x)\;dx$ converge, $\forall\; x_0 > 0$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt[4]{x\,(1+x)}} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}$, quindi l'integrale$\int_{x_0}^{+\infty} f\,(x)\;dx$ diverge, $\forall$ $x_0 > 0$.
Di conseguenza l'integrale $\int_{0}^{+\infty} f\,(x)\;dx$ non converge.

4) Per $x \to 0$ si ha $f\,(x) = \dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}} \sim \dfrac{2}{x\sqrt{3}}$, quindi l'integrale $\int_{-1}^{0} f\,(x)\;dx$ diverge. Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{3} f\,(x)\;dx$ non converge.

5) Per $x \to \dfrac{1}{2}$ si ha $\cos(\pi x) = \cos\left[\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right] \sim -\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,
per cui $f\,(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)} \sim \dfrac{-1}{\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$, e quindi gli integrali $\int_{0}^{1/2} f\,(x)\;dx$ e $\int_{1/2}^{1} f\,(x)\;dx$ divergono. Di conseguenza, l'integrale $\int_{0}^{1} f\,(x)\;dx$ non converge.

6) Per $x \to -1^+$ si ha $f\,(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{x\sqrt{1+x}} \sim -\dfrac{\log 2}{\sqrt{x+1}}$, e quindi l'integrale $\int_{-1}^{x_0} f\,(x)\;dx$, con $-1 < x_0 < 0$, converge. Osserviamo poi che per $x \to 0$ si ha $f\,(x) \sim x$, e quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$, ponendo $f\,(0) = 0$. Così, f è continua nell'intervallo $[x_0, 2]$, e $\int_{x_0}^{2} f\,(x)\,dx$ è un normale integrale definito.
Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{2} f\,(x)\,dx$ converge.

Sol. Ex. 10.8

1) Si ha $\sqrt{x}e^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$ (almeno) per ogni x abbastanza grande. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, per il teorema del confronto converge anche $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$.

2) Per ogni x abbastanza grande si ha $\log x \le \sqrt{x}$, per cui $\dfrac{\log x}{x^2} \le \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ converge, per il teorema del confronto converge anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$.

3) Si ha $\dfrac{2+\sin x}{1+x} \ge \dfrac{1}{1+x}$ per ogni x. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ diverge, per il teorema del confronto diverge anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{1+x}\,dx$.

4) Per $x \to 0^+$ si ha $\left(\sqrt{1+x^2}-1+\sqrt{x}\right) \sim \sqrt{x}$ e $[x + x^3 \log(1+2x)] \sim x$, per cui $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.
Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \dfrac{x}{x^3 \log x} = \dfrac{1}{x^2 \log x} \le \dfrac{1}{x^2}$, e anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
Di conseguenza, l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

5) Per $x \to -1^+$ si ha $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x}} \sim \dfrac{\log 2}{\sqrt{x+1}}$, e quindi l'integrale $\int_{-1}^{x_0} f(x)\,dx$ converge, per ogni $x_0 > -1$. Se $x \to +\infty$, $f(x) \ge \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, e per il teorema del confronto $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

6) Per x abbastanza grande in valore assoluto, ma negativo, si ha $e^x \le \dfrac{1}{x^4}$, per cui $f(x) = x^2 e^x \le \dfrac{1}{x^2}$, e l'integrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ converge.

7) Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)\log(1+x)} \sim \dfrac{1}{x}$, per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

8) Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) = \dfrac{e^{-x}+\sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, e l'integrale non converge.

9) Per ogni x si ha $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{x^2+3} \le \dfrac{2}{x^2+3}$, e l'integrale converge.