Argomento 6 - Derivate

Soluzioni Esercizi

I Parte - Derivate

Sol. Ex. 6.1

1) $\frac{1}{x}-15x^2-2\sin x$

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3) $10[1+\tan^2(2x)]$

4) $2(2x+2-6e^{2x})-\cos x$

5) $\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

6) $\frac{2\log(x)}{x}$

7) $x+2^x\log 2$

8) $x^2-2\frac{1}{x\log 2}+3$

9) $x2^x(2+x\log 2)$

10) $\frac{(2x-4)}{\sqrt[3]{(3x^2-12x+16)^2}}$

11) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

12) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\cos(\sqrt{x}))$

13) $\frac{\log(x)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+2xe^x+x^2e^x$

14) $\frac{1}{1-\cos x}$

15) $-\frac{1}{(2x+1)^2}$

16) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

17) $\frac{3^x}{x^8}(x\log 3-7)$

18) $x^2(3\log_5 x+\frac{1}{\log 5})$

19) $\frac{-3\sqrt{x}}{2(x^3-5)^2}(x^3+5)$

20) $\frac{1+\cos x}{x+\sin x}$

21) $\frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$

22) $\frac{(1+\tan^2 x)}{3\sqrt[3]{\tan x^2}}$

23) $\frac{6x}{x^2+1}\log^2(x^2+1)$

24) $(\log x+1)x^x$

25) $\frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$

26) $-\frac{1}{2x\sqrt{\log^3 x}}$

27) $e^{\frac{x}{\log x}}\frac{\log x-1}{\log^2 x}$

28) $(2x+2)e^{x^2+2x}+(\log x+1)(-\sin(x\log x))$

29) $\frac{\log^2 x+x}{(x+\log x)^2}$

30) $\frac{(2x-\sin x-x^2-\cos x)e^x+2x-\sin x}{(e^x+1)^2}$

31) $\frac{5\cos x}{(1-3x)^2}-\frac{2x+1}{1-3x}\sin x$

32) $\frac{\sin(x^2-x+2)+(x-2x^2)\cos(x^2-x+2)}{\sin^2(x^2-x+2)}$

33) $\frac{x^2+2x-3}{(2x^2-3x+3)^2}$

34) $\frac{x^2+4x+2}{(x^2-2)(x^2+x)}$

35) $\frac{5(\sin(\tan\sqrt{x}))^4(\cos(\tan\sqrt{x}))(1+\tan^2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

36) $(x^2+1)^{\log x}\left(\frac{\log(x^2+1)}{x}+\frac{2x\log x}{x^2+1}\right)$

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.2}}$ Per ogni funzione f, diamo l'insieme di esistenza e la funzione derivata f':

1) $x \neq \frac{1}{3}$, $\dfrac{e^{2-x}(2+3x)}{(-1+3x)^2}$ 2) $x \neq 3$, $\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$ 3) $x \neq 0$, $\ln|x|+1$

4) $x \neq 2$, $\dfrac{e^{x^2}(2x^2-4x-1)}{(x-2)^2}$ 5) $x \neq 0, -1$, $\dfrac{2x^2-5x-4}{x^3\,(x+1)^2}$ 6) $x \neq 1$, $\dfrac{e^{x-2}\,|1-x|\,(x-2)}{(x-1)^3}$

7) $x \neq 0, -2$, $\dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ 8) $x \geq 0$, $\dfrac{e^x}{2\sqrt{(e^x-1)}} - 1$ 9) $x \neq -\frac{1}{2}$, $\dfrac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$

10) $\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x(e^{2x}+2e^x-3)}{(e^{2x}+3)\,(e^x+1)}$ 11) $x \neq 0$, $e^{\frac{|x-2|}{x}}\,\dfrac{2\,|x-2|}{(x-2)\,x^2}$ 12) $x < -2\,,\ x > 2$, $\dfrac{4}{(x^2-4)}$

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.3}}$ 1) $y = x+1$, 2) $x = 0$, 3) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \dfrac{\pi}{6}) + \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.4}}$ $x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.5}}$

1) f continua e derivabile in $\mathbf{R}$.
2) f continua in $\mathbf{R}$, derivabile in $\mathbf{R} - \{0\}$ (0 punto angoloso).
3) f continua in $\mathbf{R}$, derivabile in $\mathbf{R} - \{0\}$ (0 punto angoloso).

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.6}}$ $\alpha = 2$.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.7}}$

f continua e derivabile in $\mathbf{R}$ se e solo e $b = a+10$. Ci sono quindi infiniti valori di a e b che soddisfano la condizione. Se $f(1) = a+8 = 2$, $a = -6$ e quindi $b = 4$. In questo caso, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.8}}$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\cos\frac{1}{x}$, limite che non esiste.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.9}}$ $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$, essendo $f(0) = 1$ e $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2+1} + 1$.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.10}}$ $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(-2)} = \dfrac{1}{1/3} = 3.$

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 6.11}}$ La derivata di f in 2 esiste e vale $f'(2) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Sol. Ex. 6.12 **B**

Sol. Ex. 6.13 **A**

Sol. Ex. 6.14 **B**

Sol. Ex. 6.15 **D**

Sol. Ex. 6.16 **D**

Sol. Ex. 6.17 **B**

Sol. Ex. 6.18 **A**

Sol. Ex. 6.19 **D**

Sol. Ex. 6.20 **B**

Sol. Ex. 6.21 **C**

Sol. Ex. 6.22 **D**

Sol. Ex. 6.23 **D**

Sol. Ex. 6.24 **B**

Sol. Ex. 6.25 **C**

Sol. Ex. 6.26

1) $f' = 3x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x > \frac{\sqrt{3}}{3},$ f crescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ punti di massimo: $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $f' = -2x > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,$ f crescente in $(-\infty, 0)$

f decrescente in $(0, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = 0$

3) $f' = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,\ x > \frac{1}{4},$

f crescente in $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{1}{4}$ punti di massimo: $x = 0$

4) $f' = 2\,(2x-1)\,(x-2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x,\ x \neq 2,$

f crescente in $\left(\frac{1}{2}, 2\right), (2, +\infty)$

f decrescente in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{1}{2}$ punti di massimo: $x = 2$

5) $f' = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,\ x > 1,$

f crescente in $(-\infty, 0), (1, +\infty)$

f decrescente in $(0, 1)$

punti di minimo: $x = 1$ punti di massimo: *nessuno*

6) $f' = \dfrac{(2x+1)}{3\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x,\ x \neq 0, -1,$

f crescente in $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

punti di minimo: $x = -\frac{1}{2}$ punti di massimo: *nessuno*

7) $f' = -\left|x-1\right|\dfrac{x^2+4-2x}{(x-1)\left(x^2-4\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1,\ x \neq -2,$

f crescente in $(-\infty, -2), (-2, 1)$

f decrescente in $(1, 2), (2, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = 1$

8) $f' = \dfrac{17-2x-7x^2}{(x^2-3x+2)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-1-2\sqrt{30}}{7} < x < \frac{-1+2\sqrt{30}}{7},$

f crescente in $\left(\frac{-1-2\sqrt{30}}{7}, \frac{-1+2\sqrt{30}}{7}\right)$

f decrescente in $\left(-\infty, \frac{-1-2\sqrt{30}}{7}\right)$, $\left(\frac{-1+2\sqrt{30}}{7}, 1\right), (1, 2)$

punti di minimo: $x = \frac{-1-2\sqrt{30}}{7}$ punti di massimo: $x = \frac{-1+2\sqrt{30}}{7}$

9) $f' = 2x - 2\dfrac{|x|}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 0,\ x > 1,$

f crescente in $(-1, 0), (1, +\infty)$

f decrescente in $(-\infty, -1), (0, 1)$

punti di minimo: $x = 1, -1$ punti di massimo: $x = 0$

10) $f' = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2-1)}} > 0 \quad \Leftrightarrow x < -1,\ x > 1$

f crescente in $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

f decrescente: mai

punti di minimo: $x = 1$ punti di massimo: $x = -1$

11) $f' = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{x+1}}{\sqrt{\left(\frac{e^{x+1}}{e^x+1}\right)}\left(e^x+1\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},$

f crescente in $\mathbb{R}$

f decrescente: mai

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: *nessuno*

12) $f' = \dfrac{\sqrt{(x^2+1)} - x}{\sqrt{(x^2+1)}} > 0 \quad \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},$

f crescente in $\mathbb{R}$

f decrescente: mai

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: *nessuno*

13) $f' = 2\dfrac{2\cos x - 1}{(-2+\cos x)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi,$

f crescente in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$

f decrescente in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$

punti di minimo: $x = \frac{5}{3}\pi, 2\pi$ punti di massimo: $x = 0, \frac{\pi}{3}$

14) $f' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow 0 < x < e,$

f crescente in $(0, e)$

f decrescente in $(e, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = e$

Sol. Ex. 6.27

Per verificare l'invertibilità di $f(x) = \log x - \dfrac{1}{x^3}$ sul suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, dove f è anche derivabile, basta guardare il segno della sua derivata in tale intervallo: $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^4} > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, perciò f è strettamente crescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = -1$, $(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Sol. Ex. 6.28

Per verificare l'invertibilità di $f(x) = e^x + \sqrt{2x+1}$ sul suo insieme di definizione $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ basta guardare il segno della sua derivata : $f'(x) = e^x + \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} > 0$ per $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, perciò f è strettamente crescente e quindi invertibile. Poiché $f(0) = 2$, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

Sol. Ex. 6.29

1) $f'' = 6x > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0,$

f convessa in $(0, +\infty)$

f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: $x = 0$

2) $f'' = -2 > 0$ per nessun x,

f convessa mai

f concava in $\mathbb{R}$

punti di flesso: *nessuno*

3) $f'' = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0$

f convessa in $(0, +\infty)$

f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: $x = 0$

4) $f'' = 12\left(x^2 - 3x + 2\right) > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1,\ x > 2,$ $\quad f$ convessa in $(-\infty, 1), (2, +\infty)$

f concava in $(1, 2)$

punti di flesso: $x = 1, 2$

5) $f'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0,$ $\quad f$ convessa in $(0, +\infty)$

f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: *nessuno*

6) $f'' = -\dfrac{2}{9}\dfrac{x^2 + x + 1}{\left(x^2 + x\right)\left(\sqrt[3]{(x^2 + x)}\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 0,$ $\quad f$ convessa in $(-1, 0)$

f concava in $(-\infty, -1), (0, +\infty)$

punti di flesso: $x = -1, 0$

Sol. Ex. 6.30

Applicando i teoremi di De l'Hôpital (in 6 si deve prima trasformare in forma $\frac{0}{0}$), si ottiene:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = +\infty$ $\quad$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-1 - \frac{1}{\tan^2(x+\frac{\pi}{2})}} = -1$ $\quad$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty^+} \left(\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x^2}} = -\frac{1+x^2}{e^x}\right) = 0$

4) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = -3$ $\quad$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}}{-\sin x} = +\infty$ $\quad$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -1$

Sol. Ex. 6.31

1) Per il numeratore, $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0.$

2) Per il numeratore, $P_4(x) = \frac{1}{12}x^4$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4}{x^4} = \frac{1}{12}.$

3) Per il denominatore, $P_3(x) = \frac{1}{3}x^3$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\frac{1}{3}x^3} = 6.$

4) Per il numeratore, $P_1(x) = (x - 1)$, per il denominatore, $P_1(x) = \frac{1}{3}(x-1)$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{\frac{1}{3}(x-1)} = 3.$

5) Per il numeratore, $P_4(x) = \frac{1}{2}x^4$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2}.$

6) Per il numeratore, $P_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$, per il denominatore, $P_1(x) = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = 0.$