Argomento 7 - Studi di funzioni

Soluzioni Esercizi

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.1}}$ $\quad f(x) = \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

Insieme di definizione : $x > 0$

Limiti :

$$\lim_{x \to 0^+} \log 3x + \frac{4}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{(confronto tra infiniti in cui prevale la potenza)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log 3x + \frac{4}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \log 3x = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim \log 3x$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{3}{3x} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 4)$ e crescente in $(4, +\infty)$. In $x = 4$ presenta un punto di minimo (assoluto).

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} x\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 2)\,\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} = \frac{-x + 3\sqrt{x}}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x} > x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9$$

Quindi la funzione è convessa in $(0, 9)$ e concava in $(9, +\infty)$. In $x = 9$ presenta un flesso.

Grafico di $f(x) = \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

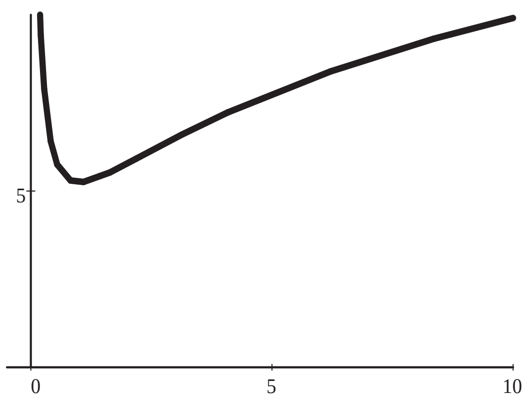


Figura 1: Ex.7.1

$\boxed{\textbf{Sol. Ex 7.2}}$ $\qquad f(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1$

Insieme di definizione: $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ o $x \geq 4$

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = 0, \qquad \lim_{x\to 4^+} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = 0$$

Notiamo che $f(x) \sim e^{\sqrt{x^2}}$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = e^{\sqrt{x^2-4x}} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \text{ o } x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Quindi la funzione è crescente in $(4, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 0)$.
In $x = 0$ e in $x = 4$ presenta punti di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1$

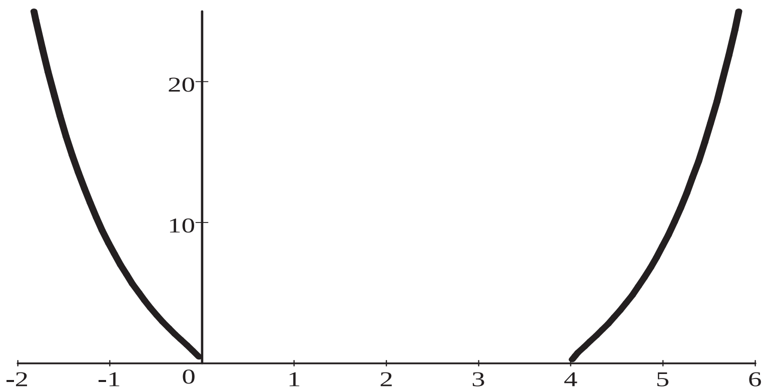


Figura 2: Ex.7.2

$\boxed{\textbf{Sol. Ex 7.3}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x}$

Insieme di definizione : $\quad \begin{cases} x^3 + 8 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^3+8}}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3+8}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+8}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x} = +\infty$$

Notiamo che per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \sqrt{x}$ e quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}x - \sqrt{x^3+8}}{x^2} = \frac{3x^3 - 2x^3 - 16}{2x^2\sqrt{x^3+8}} = \frac{x^3-16}{2x^2\sqrt{x^3+8}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 16 > 0 \\ x > -2 \text{ con } x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\sqrt[3]{2} \\ x > -2 \text{ con } x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2\sqrt[3]{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(2\sqrt[3]{2}, +\infty)$, decrescente in $(-2, 0)$, $(0, 2\sqrt[3]{2})$.
In $x = 2\sqrt[3]{2}$, presenta un punto di minimo (relativo) e in $x = -2$ uno di massimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x}$

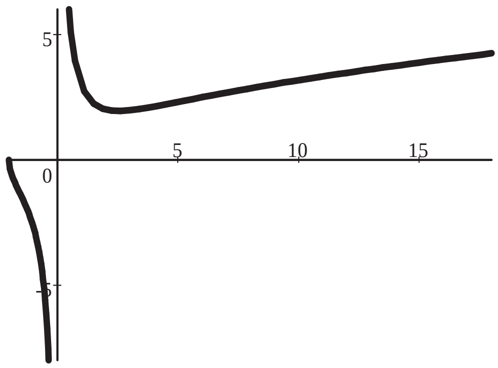


Figura 3: Ex.7.3

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f'(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^3-16}{2x^2\sqrt{x^3+8}} = -\infty$, la tangente richiesta ha equazione $x = -2$.

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.4}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}$

Insieme di definizione : $x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ o $x > 6$

Limiti :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}} = 0 \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to6^+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}} = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}} = +\infty$ (confronto tra ∞, in cui prevale l'esponenziale, il che ha anche come conseguenza che f non ha asintoti obliqui)

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{x^2-6x} - e^x\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}}}{x^2-6x} = \frac{e^x(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-6x}\,(x^2-6x)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+3>0 \\ x<0 \text{ e } x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{7-\sqrt{37}}{2} \text{ e } x>\frac{7+\sqrt{37}}{2} \\ x<0 \text{ e } x>6 \end{cases} \Leftrightarrow x<0 \text{ e } x>\frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(\frac{7+\sqrt{37}}{2}, +\infty)$, decrescente in $(6, \frac{7+\sqrt{37}}{2})$. In $x = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$, presenta un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}$

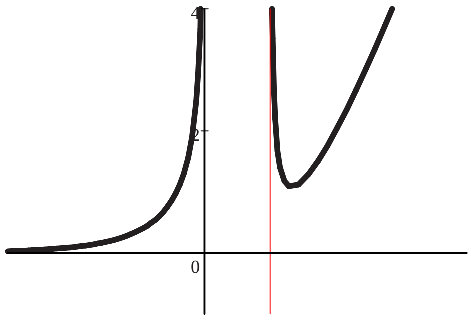


Figura 4: Ex.7.4

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.5}}$ $\quad f(x) = \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2$

Insieme di definizione : $\begin{cases} 2x+2>0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$

Limiti :

$$\lim_{x\to 0^+} \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2 = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2 = \lim_{x\to+\infty} \log(2x+2) = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim \log(2x+2)$ per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{2}{2x+2} - \frac{1}{x+1}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x+1}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

Quindi la funzione è crescente in $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ e decrescente in $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

In $x = \dfrac{1}{4}$, presenta un punto di minimo (assoluto) e in $x = 0$ un punto di massimo (relativo).

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{(x+1)}\frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-4x\sqrt{x} + 3x + 1}{4x\sqrt{x}\,(x+1)^2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x\sqrt{x} + 3x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 > 4x\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)^2 > 16x^3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(16x^2 + 7x + 1) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Quindi la funzione è convessa in $(0,1)$ e concava in $(1,+\infty)$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso.

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1}\left(\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\right) = -\infty$, la retta tangente nell'origine ha equazione $x = 0$.

Grafico di $f(x) = \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2$

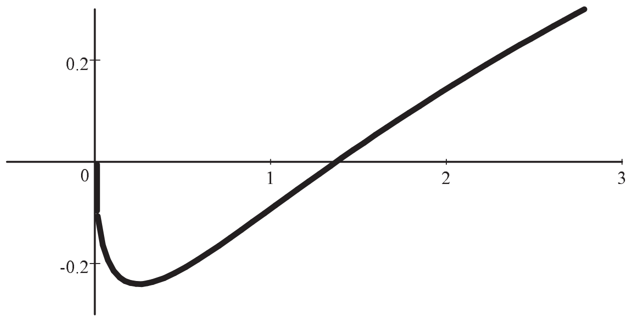


Figura 5: Ex.7.5

Sol. Ex. 7.6 $\quad f(x) = \log\left(x^2 + x\right) - x$

Insieme di definizione: $x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ o $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(x^2 + x\right) - x = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} \log\left(x^2 + x\right) - x = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} \log\left(x^2 + x\right) - x = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log\left(x^2 + x\right) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ (confronto tra infiniti, in cui prevale la potenza).

Notiamo che $f(x) \sim -x$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi potrebbe avere asintoti obliqui. Necessita dunque calcolare:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \log\left(x^2 + x\right) = +\infty$$

Si conclude quindi che f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} - 1 = \frac{-x^2+x+1}{x^2+x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 + 1 > 0 \\ x < -1 \text{ o } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < -1 \quad \text{o} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, decrescente in $(-\infty, -1)$ ed $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \log(x^2+x) - x$

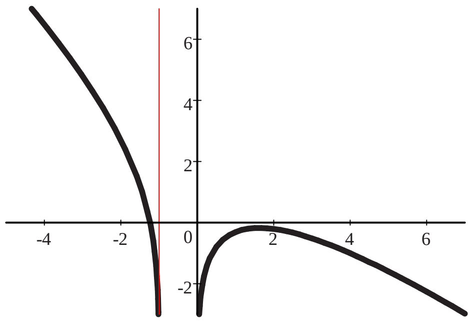


Figura 6: Ex.7.6

Sol. Ex. 7.7 $\qquad f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3$

Insieme di definizione : $x > 0$.

Intersezioni con l'asse x:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x} = x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1, 4.$$

Limiti :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Si ha dunque che $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{x-2}{x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x > 2$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 2)$ e crescente in $(2, +\infty)$.
In $x = 2$, presenta un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

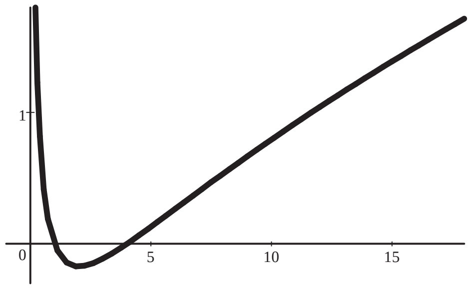


Figura 7: Ex.7.7

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.8}}$ $\quad f(x) = \sqrt{1+2x} - \log 4x$

Insieme di definizione: $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Limiti:

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1+2x} - \log 4x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+2x} - \log 4x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+2x} = +\infty$ (confronto tra infiniti in cui prevale la potenza).

Notiamo che $f(x) \sim \sqrt{1+2x}$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{1+2x}}{x\sqrt{1+2x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{1+2x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1+2x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 1-\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x > 1+\sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1+\sqrt{2}$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 1+\sqrt{2})$ e crescente in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$. $x = 1+\sqrt{2}$ è un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \sqrt{1+2x} - \log 4x$

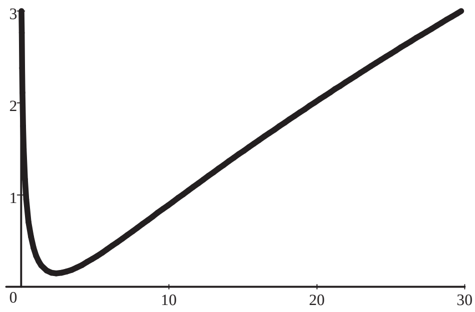


Figura 8: Ex.7.8

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.9}}$ $\qquad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Insieme di definizione: $2 + \frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} \geq 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \leq -\frac{1}{2}$ o $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \lim_{x \to -0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty\ , \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Notiamo che per $x \to -\infty$, $f(x) \sim \left(\frac{1}{3}\right)^x$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3 - \frac{1}{2x^2\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)}} < 0 \qquad \forall x \in E(f).$$

Quindi la funzione è decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ed in $(0, +\infty)$. Quindi $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

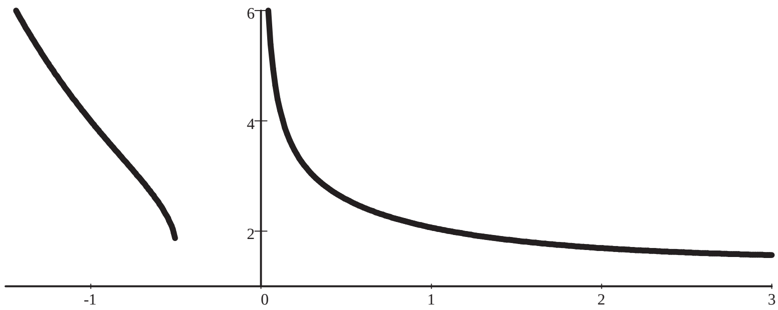


Figura 9: Ex.7.9

Sol. Ex. 7.10 $\quad f(x) = \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$

i) f è pari, in quanto $\dfrac{1}{\log(4-x^2)} = \dfrac{1}{\log(4-(-x)^2)}$

ii) **Insieme di definizione**: $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ \log(4-x^2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ 4-x^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Limiti: (poiché f è pari, la studiamo solo nella parte positiva dell'insieme di definizione).

$$\lim_{x\to+\sqrt{3}^-} \frac{1}{\log(4-x^2)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{3}^+} \frac{1}{\log(4-x^2)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\log(4-x^2)} = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\log^2(4-x^2)}\frac{-2x}{(4-x^2)} = \frac{2x}{(4-x^2)\log^2(4-x^2)}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(4-x^2)\log^2(4-x^2)}>0 \Leftrightarrow x>0 \quad e \quad x\neq+\sqrt{3}$$

Quindi f è crescente in $(0,+\sqrt{3})$, $(+\sqrt{3},2)$, decrescente in $(-2,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$ e ed ha un punto di minimo (relativo) in $x=0$.

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$

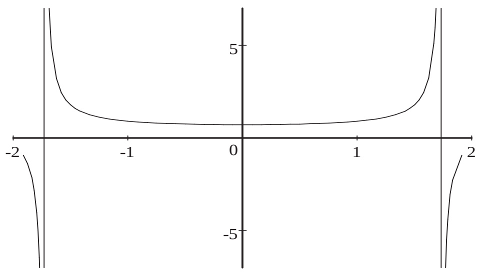


Figura 10: Ex.7.10

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.11}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1+\log x}{x^2}$

Insieme di definizione: $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log x}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\log x}{x^2} = 0 \ (\ x^2 \text{ prevale su } \log x \text{ per } x \to +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - (1+\log x)\,2x}{x^4} = \frac{x(1-2\,(1+\log x))}{x^4} = -\frac{1+2\log x}{x^3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\log x}{x^3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\log x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Quindi la funzione è crescente in $(0, e^{-\frac{1}{2}})$, decrescente in $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ ed ha un punto di massimo (assoluto) in $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Grafico di $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x^2}$

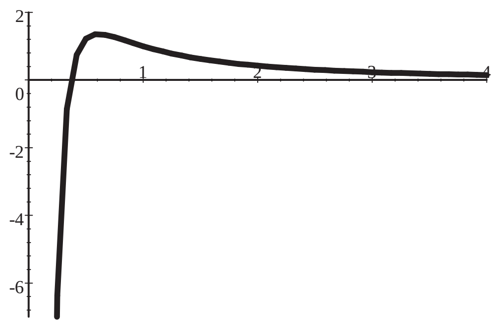


Figura 11: Ex.7.11

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.12}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}$

Insieme di definizione : $x \neq -1$.

Limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{(x+1)}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2} - \sqrt[3]{(x-1)}}{(x+1)^2} = \frac{\dfrac{x+1-3(x-1)}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2}}{(x+1)^2} = -\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2 (x+1)^2}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ con $x \neq \pm 1$.

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1)$ ed in $(-1, 2)$, decrescente in $(2, +\infty)$.
$x = 2$ è un punto di massimo (relativo).

Il punto di ascissa $x = 1$ è a tangente verticale, in quanto

$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1)}\right)^2 (x+1)^2} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1)}\right)^2 (x+1)^2} = +\infty.$$

Grafico di $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}$

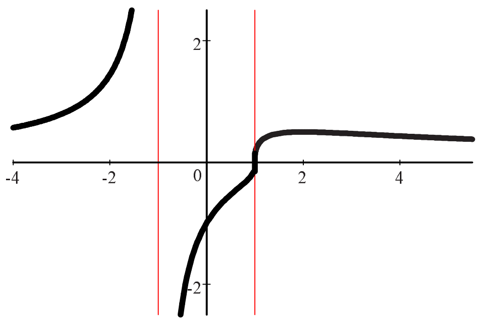


Figura 12: Ex.7.12

Sol. Ex. 7.13 $\qquad f(x) = \dfrac{e^{x+2}}{3x+3}$

Insieme di definizione: $x \neq -1$

Limiti:

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{3x+3} = +\infty$, (confronto tra infiniti, in cui prevale l'esponenziale, da cui si deduce anche che f non ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{3x+3} = 0, \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{e^{x+2}}{3x+3} = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{e^{x+2}}{3x+3} = -\infty.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{e^{x+2}(x+1) - e^{x+2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{3}e^{x+2}\frac{x}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Quindi $f(x)$ risulta essere crescente in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,-1),(-1,0)$.
Avrà quindi un punto di minimo (relativo) in $x=0$.

Grafico di $f(x)=\dfrac{e^{x+2}}{3x+3}$

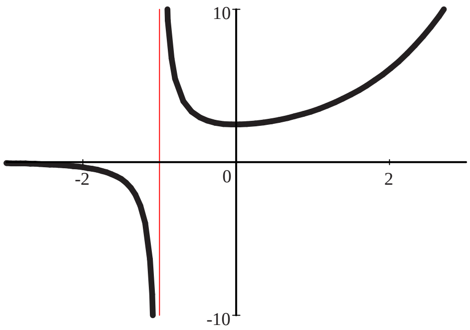


Figura 13: Ex.7.13

Sol. Ex. 7.14 $\qquad f(x)=\log\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{x}$

Insieme di definizione: $x>-2 \qquad \text{con} \qquad x\neq 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to0^-}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=+\infty$$

Notiamo che $f(x)\sim\log x$ per $x\to+\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2}{x+2}}\,\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+4x}{x^2\,(x+2)}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+5x+2}{x^2\,(x+2)}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x+2>0\\ x>-2 \text{ con } x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-5+\sqrt{17}}{2}<x<0 \qquad o \qquad x>0$$

Quindi $f(x)$ risulta essere crescente in $(\frac{-5+\sqrt{17}}{2},0)$ ed in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-2,\frac{-5+\sqrt{17}}{2})$.
In $x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ presenta un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x)=\log\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{x}$

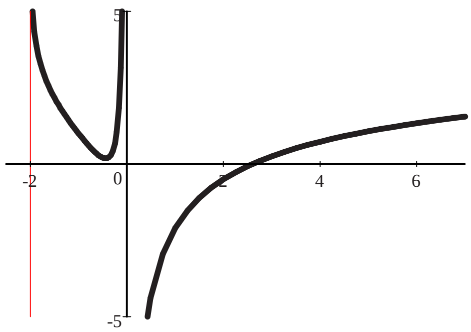


Figura 14: Ex.7.14

Sol. Ex. 7.15 $\qquad f(x) = (1+x^8)\arctan(x^4)$

Insieme di definizione: $\mathbb{R}$. La funzione è pari.

Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x^8)\arctan(x^4) = \lim_{x\to-\infty}(1+x^8)\arctan(x^4) = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim -\frac{\pi}{2}x^8$ per $x \to -\infty$ e che $f(x) \sim \frac{\pi}{2}x^8$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = 8x^7\arctan x^4 + (1+x^8)\frac{4x^3}{1+x^8} = 4x^3(2x^4\arctan x^4 + 1) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Quindi f è crescente in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,0)$. In $x=0$ ha un punto di minimo (assoluto).

$$f''(x) = 56x^6\arctan x^4 + 8x^7\left(\frac{4x^3}{1+x^8}\right) + 12x^2 = 4x^2(14x^4\arctan x^4 + \frac{8x^8}{1+x^8} + 3) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Quindi la funzione risulta convessa su tutto l'asse reale.

Grafico di $f(x) = (1+x^8)\arctan(x^4)$

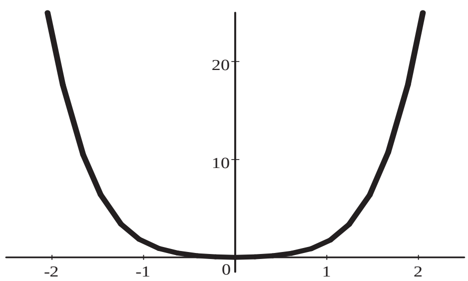


Figura 15: Ex.7.15

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.16}}$ $\qquad f(x) = -e^x + xe^x \log x$

Insieme di definizione: $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} (-e^x + xe^x \log x) = -1 + \lim_{x\to 0^+} (xe^x \log x) = -1 \quad \left(\text{in quanto } \lim_{x\to} 0^+ (x \log x) = 0\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} (-e^x + xe^x \log x) = \lim_{x\to +\infty} e^x (x \log x - 1) = +\infty$$

Notiamo che f ha ordine di infinito superiore a e^x per $x \to +\infty$. Di conseguenza non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = -e^x + xe^x \log x + e^x(\log x + 1) = e^x (\log x) (1 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Quindi f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$. In $x = 1$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = -e^x + xe^x \log x$

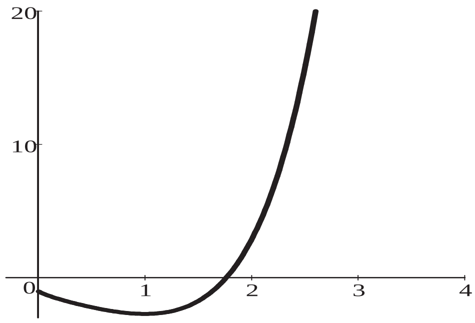


Figura 16: Ex.7.16

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.17}}$ $\qquad f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}$

Insieme di definizione:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x^2-9} \geq 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ (x^2 - 9) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 5 \leq 0 \\ (x^2 - 9) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 5 \\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 3 \quad \text{o} \quad x \geq 5$

quindi $E(f) = (-3, 3) \cup [5, +\infty)$.

Limiti:

$$\lim_{x\to -3^+} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = \lim_{x\to +3^-} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 5^+} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = f(5) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2}}=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}}}\frac{x^2-9-2x\,(x-5)}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}}}\frac{-\left(x^2-10x+9\right)}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+9<0\\-3<x<3\cup x>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<9\\-3<x<3\cup x>5\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3\cup 5<x<9$$

	-3 ○	1 ●	3 ○	5 ●	9 ●	
$f'(x)$	$-$	$+$	$\times$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	$\searrow$	

Quindi f è decrescente in $(-3,1)$ ed in $(9,+\infty)$ e crescente in $(1,3)$ ed in $(5,9)$. In $x=1$, presenta un punto di minimo, in $x=5$ un altro punto di minimo ed in $x=9$ un punto di massimo (relativo). Per stabilire se sono minimi relativi o assoluti, facciamo il confronto dei valori di minimo:

$f(1)=\sqrt{\frac{1-5}{1-9}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $f(5)=0.$

L'unico punto di minimo assoluto è quindi $x=5$.

Grafico di $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}$

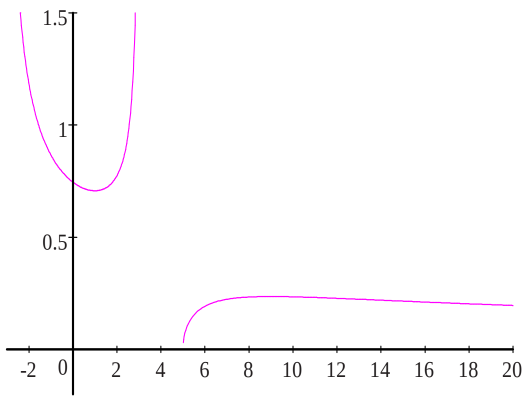


Figura 17: Ex.7.17

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.18}}$ $\qquad f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}}$

Insieme di definizione: $\begin{cases}2-x\geq 0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow\quad -2<x\leq 2.$

Limiti:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}} = +\,\infty, \qquad\qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}} = f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} e^{\sqrt{2-x}} \frac{1}{\sqrt{x+2}} - e^{\sqrt{2-x}} \frac{3}{2\sqrt{(x+2)^3}} < 0, \quad \forall x \in (-2,2)$$

Quindi f risulta decrescente sul suo dominio. In $x = 2$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}}$

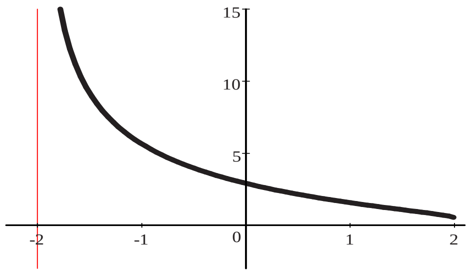


Figura 18: Ex.7.18

Sol. Ex. 7.19 $\qquad f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$

Insieme di definizione: $x > -1$

Limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1} = +\infty, \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1} = +\infty \text{ (l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

Notiamo che f è un infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$, quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{1}{x+1} - e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{1}{(x+1)^2} = e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{\sqrt{x+1}-2}{2(x+1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} > 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 4 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Quindi f è decrescente in $(-1,3)$ e crescente in $(3,+\infty)$. In $x = 3$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$

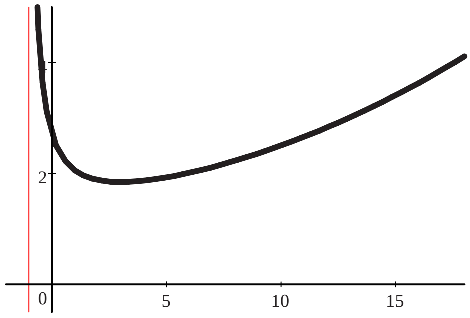


Figura 19: Ex.7.19

Sol. Ex. 7.20 $\quad f(x) = \log(31 + x) - \arctan x$

Insieme di definizione: $31 + x > 0 \quad \Leftrightarrow x > -31$

Limiti: $\lim\limits_{x\to -31^+} \log(31 + x) - \arctan x = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \log(31 + x) - \arctan x = \lim\limits_{x\to +\infty} \log(31 + x) = +\infty$

Notiamo che $f(x) \sim \log(31 + x)$ per $x \to +\infty$ e di conseguenza f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{31 + x} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2 - x - 30}{(31 + x)\,(1 + x^2)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 30}{(31 + x)\,(1 + x^2)} > 0 \\ x > -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 30 > 0 \\ x > -31 \end{cases} \Leftrightarrow -31 < x < -5 \quad e \quad x > 6$$

Quindi f è crescente in $(-31, -5)$ ed in $(6, +\infty)$, decrescente in $(-5, 6)$.
In $x = -5$ ha un punto di massimo (relativo) ed in $x = 6$ un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \log(31 + x) - \arctan x$

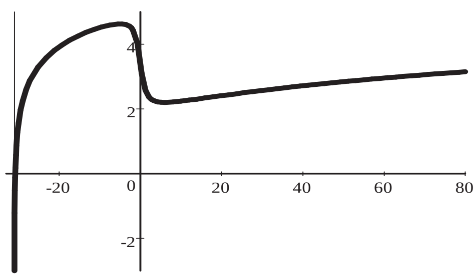


Figura 20: Ex.7.20

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.21}}$ $\quad f(x) = \log \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}}$

Insieme di definizione: $\dfrac{2x^2+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \log \sqrt{\frac{2x^2+1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log \sqrt{\frac{2x^2+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \log \sqrt{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log 2x = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim \dfrac{1}{2}\log 2x$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

Prima di calcolare la derivata, notiamo che $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}} = \dfrac{1}{2}\log \dfrac{2x^2+1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2x^2+1}{x}}\frac{4x\,(x) - (2x^2+1)}{x^2} = \frac{x}{2\,(2x^2+1)}\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right) = \frac{2x^2-1}{2x\,(2x^2+1)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{2x\,(2x^2+1)} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi f è decrescente in $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, crescente in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. In $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}}$

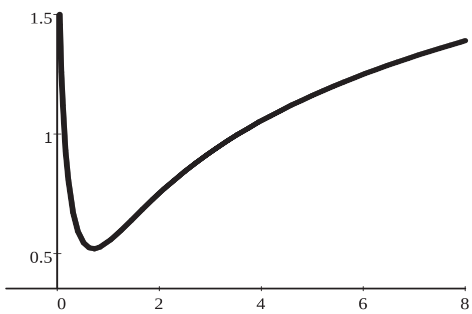


Figura 21: Ex.7.21

$\boxed{\text{Sol. Ex. 7.22}}$ $\quad f(x) = (x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}$

Insieme di definizione: $\dfrac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \; x+1 > 0 \Leftrightarrow \; x > -1$

Limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{t} = +\infty \qquad \text{(l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\, e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} = +\infty$, con f stesso ordine di infinito di x per $x \to +\infty$. Potrebbe quindi avere asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\, e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x+1)\, e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} - x = \lim_{x\to+\infty} x(e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} - 1) + e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{1}{x+1}} + e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} = +\infty.$$

Quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} - \frac{x+1}{2\,(x+1)^2\sqrt{\frac{1}{x+1}}} e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} = e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} \frac{\left(2\sqrt{x+1}-1\right)}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} \frac{\left(2\sqrt{x+1}-1\right)}{2\sqrt{x+1}} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x+1)} - 1 > 0 \\ x > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 > \frac{1}{4} \\ x > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{3}{4}$$

Quindi f è decrescente in $(-1, -\frac{3}{4})$, crescente in $(-\frac{3}{4}, +\infty)$. In $x = -\frac{3}{4}$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = (x+1)\, e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}$

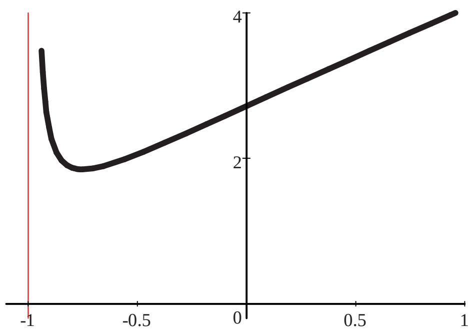


Figura 22: Ex.7.22

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.23}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^6}{x+1}$

Insieme di definizione: $x \neq -1$

Limiti:

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^6}{x+1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^6}{x+1} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim x^5$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = x^5 \frac{5x+6}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(5x+6) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{6}{5} \text{ e } x > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{6}{5} \text{ e } x > 0$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -\frac{6}{5})$ ed in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-\frac{6}{5}, -1), (-1, 0)$.
In $x = -\frac{6}{5}$ ha un punto di massimo (relativo) ed in $x = 0$ un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \dfrac{x^6}{x+1}$

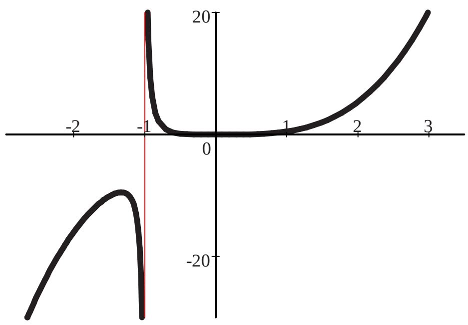


Figura 23: Ex.7.23

$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.24}}$ i) Dobbiamo determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} = 3.$$

Poiché non è un'equazione di tipo elementare, per determinare il numero delle radici possiamo dapprima studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ e poi intersecare il suo grafico con la retta di equazione $y = 3$, per vedere quante sono le eventuali soluzioni dell' equazione.

Insieme di definizione: $x > 0$

Limiti:

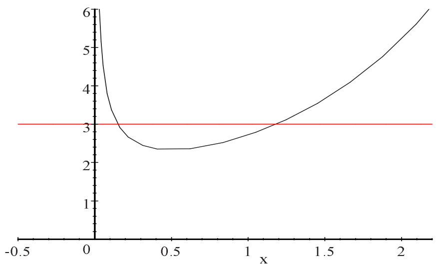
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{(l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

$$f'(x) = e^x \frac{2x-1}{2\left(\sqrt{x}\right)^3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Quindi f è decrescente in $(0, \frac{1}{2})$ e crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. In $x = \frac{1}{2}$ vi è un punto di minimo (assoluto) di valore $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} = \sqrt{2e}$.
In questo caso è necessario confrontare tale valore minimo di f con 3, in quanto vogliamo intersecare il grafico della funzione con la retta $y = 3$:

$\sqrt{2e} < 3$, in quanto $\left(\sqrt{2e}\right)^2 = 2e < 2 \times 3 = 6 < 3^2 = 9$.

Quindi la retta $y = 3$ interseca il grafico di f e lo interseca in 2 punti:



ii) Dobbiamo ora discutere, al variare di k reale, il numero delle radici dell'equazione:

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} = k.$$

Poiché la funzione al I membro dell'equazione è la stessa di prima, dobbiamo solo confrontare il grafico già determinato con la famiglia di rette $y = k$, con k variabile reale.
Abbiamo già visto nel punto precedente che f ha un minimo assoluto di valore $\sqrt{2e}$. Di conseguenza avremo i seguenti possibili casi:

Per $k < \sqrt{2e}$, nessuna soluzione (retta al di sotto del grafico).

Per $k = \sqrt{2e}$, 1 sola soluzione (retta tangente al grafico).

Per $k > \sqrt{2e}$, 2 soluzioni (retta intersecante il grafico in 2 punti).

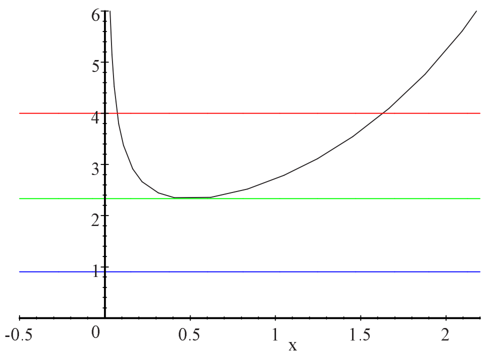


Figura 24: Ex.7.24

Sol. Ex. 7.25 Dobbiamo discutere il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$xe^x - \frac{x^2}{2} - x = k,$$

al variare di k reale, in modo del tutto analogo al precedente Ex. 7.24 ii). Occorre quindi dapprima studiare la funzione: $f(x) = xe^x - \dfrac{x^2}{2} - x$.

Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} xe^x - \dfrac{x^2}{2} - x = -\infty$ (nel confronto xe^x prevale e^x che tende a 0, nel confronto tra potenze, prevale $-\dfrac{x^2}{2}$)

$\lim_{x\to+\infty} xe^x - \dfrac{x^2}{2} - x = +\infty$ (nel confronto prevale xe^x)

$f'(x) = e^x + xe^x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x\,(1+x) - (1+x) > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)\,(1+x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} e^x - 1 > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ 1 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x < -1$ o $x > 0$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-1, 0)$. Ha quindi un massimo (relativo) in $x = -1$ di valore $M = f(-1) = -\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e-2}{2e} > 0$ ed un minimo (relativo) in $x = 0$ di valore $m = f(0) = 0$.

Abbiamo allora i seguenti possibili casi :

$k < 0$: una soluzione negativa

$k = 0$: due soluzioni, una negativa ed una nulla;

$0 < k < \dfrac{e-2}{2e}$: tre soluzioni, due negative ed una positiva;

$k = \dfrac{e-2}{2e}$: due soluzioni, una negativa ed una positiva;

$k > \dfrac{e-2}{2e}$: una soluzione positiva.

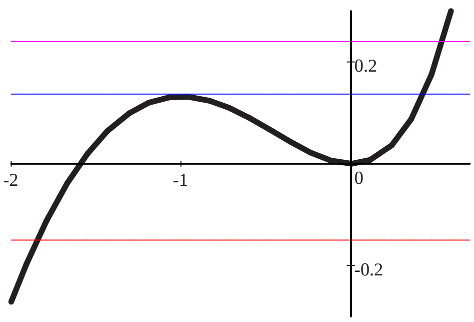
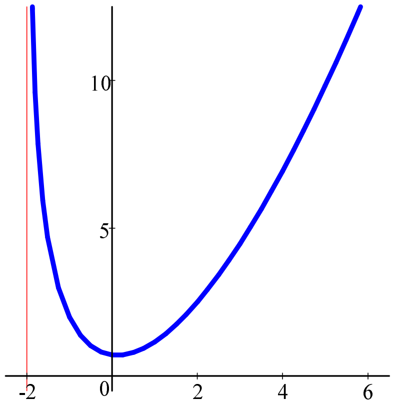
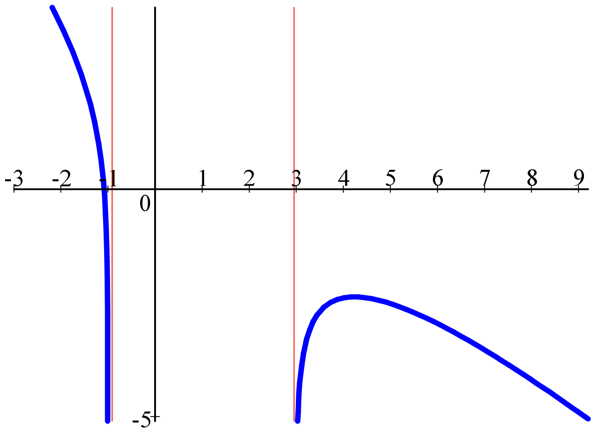


Figura 25: Ex.7.25

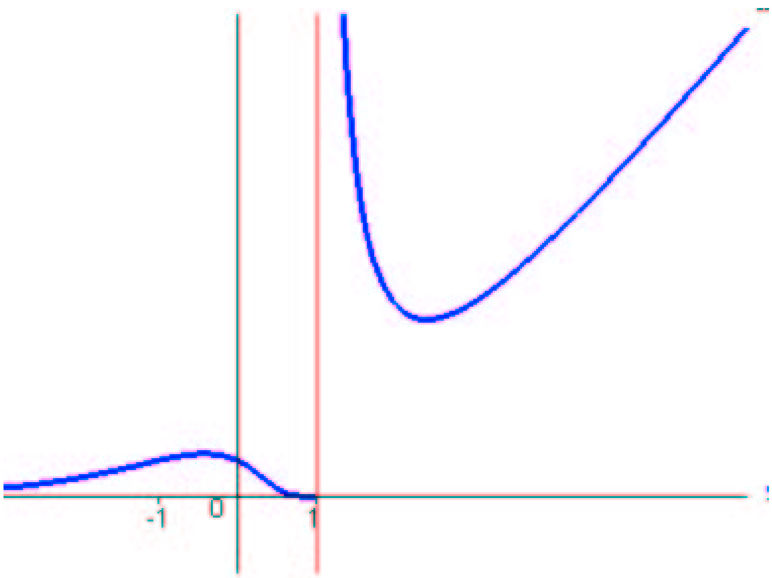
$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.26}}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}$



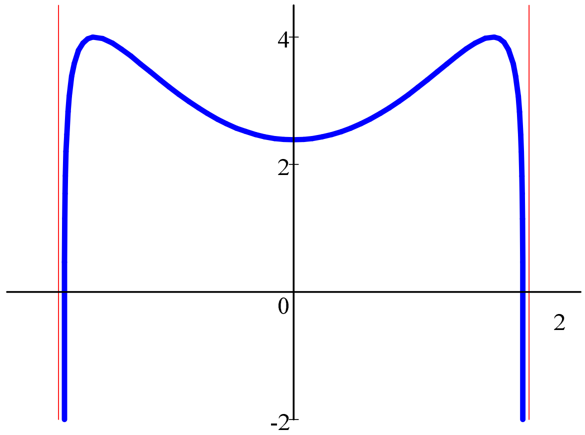
$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.27}}$ $\quad f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) - x$



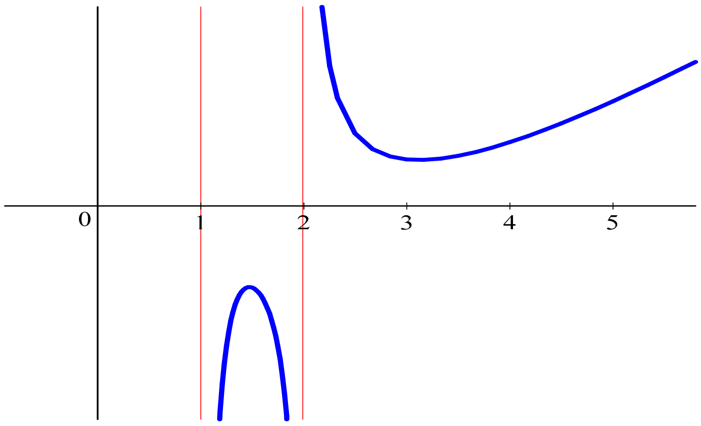
$\boxed{\textbf{Sol. Ex. 7.28}}$ $\quad f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$



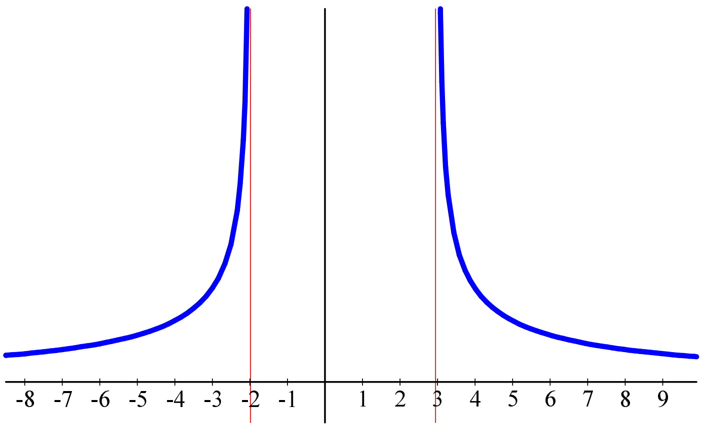
Sol. Ex. 7.29 $f(x) = x^2 + 1 + \log(4 - x^2)$



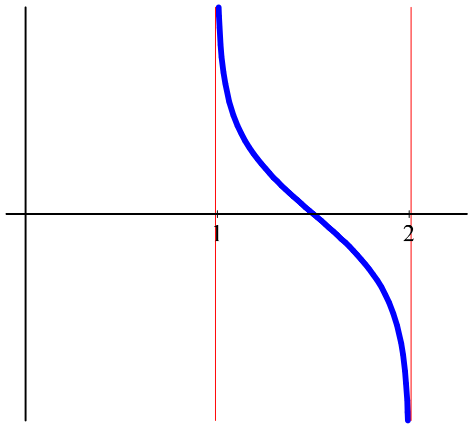
Sol. Ex. 7.30 $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \log(x-1)$



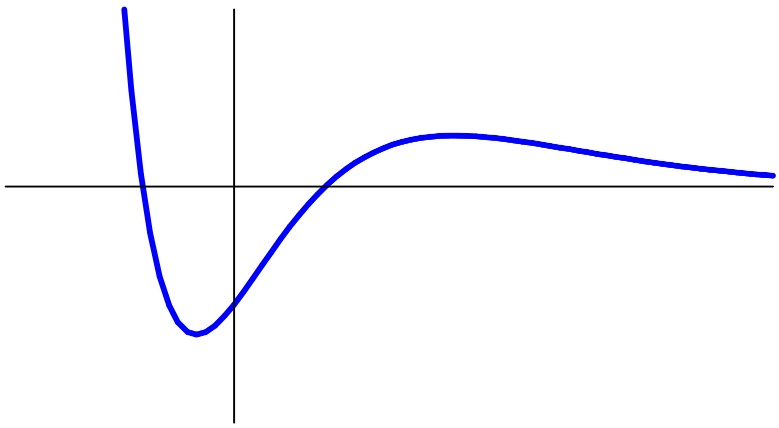
Sol. Ex. 7.31 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - x - 6}}$



Sol. Ex. 7.32 $f(x) = \log \dfrac{x-2}{1-x}$



Sol. Ex. 7.33 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$



Sol. Ex. 7.34 $f(x) = x\sqrt{x^2-3x+2}$