

## Lezione 8 - Esercizi

**ESERCIZIO 8.1)** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (3, -4)$  e  $B = (-2, 0)$ . Disegnare il vettore  $\overrightarrow{AB}$  e trovare il punto  $P$  tale che  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ ; calcolare infine le componenti del vettore.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.2)** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (3, -4)$ ,  $B = (-2, 0)$ ,  $C = (-1, 1)$  e  $D = (2, 4)$ . Calcolare la somma dei vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  con la regola del parallelogramma. Verificare il risultato calcolando la somma per componenti.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.3)** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (1, 3)$ ,  $B = (4, 7)$ ,  $C = (-2, -1)$  e  $D = (6, 5)$ . Quali tra i seguenti vettori sono uguali a  $-2\overrightarrow{AB}$ ?

A)  $\overrightarrow{AC}$

B)  $\overrightarrow{CD}$

C)  $\overrightarrow{BC}$

D)  $\overrightarrow{CB}$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.4)** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (2a_1, 2a_2)$  e  $D = (2b_1, 2b_2)$ . L'affermazione  $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$  è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di  $a_1, a_2, b_1, b_2$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.5)** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  e  $C = (2b_1, 2b_2)$ . L'affermazione  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$  è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di  $a_1, a_2, b_1, b_2$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.6)** Nel piano si considerino: un vettore  $\mathbf{v}$  di modulo 4 avente la direzione e il verso dell'asse  $x$ , una retta  $r$  tale che  $\widehat{xr} = \pi/4$  e una retta  $s$  tale che  $\widehat{xs} = -\pi/3$ . Si determinino geometricamente i vettori componenti di  $\mathbf{v}$  secondo le direzioni delle due rette e si calcoli il valore dei loro moduli.

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.7)** Nello spazio si considerino il vettore  $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$  ed il punto  $A = (1, 0, 2)$ . Quali sono le coordinate del punto  $B$  tale che  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ ?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.8)** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$  e  $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$ . È vero che  $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ? Qualunque sia la risposta, si spieghi che cosa significa.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.9)** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$  e  $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ . Si calcoli il modulo di  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.10)** A che cosa è uguale il prodotto scalare  $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4)$ ?

**A)**  $(3, -2, -8)$

**B)**  $-7$

**C)**  $(6, 10, 7)$

**D)**  $13$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.11)** Nel piano si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (4, 3)$  e  $\mathbf{v} = (-1, 2)$ . Si calcoli il vettore componente di  $\mathbf{v}$  nella direzione di  $\mathbf{u}$ .

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.12)** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (2, -\sqrt{5}, -1)$  e  $\mathbf{v} = (1, \sqrt{5}, 2)$ . Si dica se l'angolo da essi formato vale (in radianti)

- A)  $-\pi/3$       B)  $2\pi/3$       C)  $\pi/3$       D)  $\pi/6$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.13)** Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-1, 1, 2).$$

Si dica se  $\mathbf{u}$  forma con  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  angoli uguali.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.14)** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  e  $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$ . Si trovi un vettore  $\mathbf{w}$  non nullo ortogonale ad entrambi. È unico?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.15)** A che cosa è uguale il prodotto vettoriale  $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1)$ ?

- A)  $(3, -2, 0)$       B)  $1$       C)  $(2, 1, 7)$       D)  $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.16)** Come devono essere fatti i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}?$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.17)** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (-2, -4, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$  e  $\mathbf{w} = (1, -1, 2)$ . Si stabilisca se  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.18)** Si stabilisca per quali valori reali di  $h$  i vettori

$$\mathbf{u} = (h, -1, h) \text{ e } \mathbf{v} = (2 - h, 1, 0)$$

sono ortogonali e per tali valori si trovi il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.19)** Si trovi un vettore  $\mathbf{w}$  di modulo 1 che sia contemporaneamente ortogonale a  $\mathbf{u} = (2, 1, -4)$  e a  $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$ . È unico?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.20)** Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (-2, -4, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (1, -1, 2).$$

Si stabilisca se sono complanari.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.21)** Come devono essere fatti i vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})?$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.22)** Spiegare perché per ogni coppia di vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  si ha  $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$  mentre, se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non sono proporzionali, il vettore  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$  è sempre non nullo.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.23)** Mostrare che per ogni numero reale  $h$  risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{u} + h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \\ (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u})) \bullet \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} + h\mathbf{u}). \end{aligned}$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.24)** Quali delle seguenti scritture hanno senso?

$$\text{A) } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \quad \text{B) } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \quad \text{C) } ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} \quad \text{D) } ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u}$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.25)** Quali delle seguenti scritture hanno senso?

$$\text{A) } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{B) } ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{C) } (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})) \bullet \mathbf{u}$$

*Argomento*

*Soluzione*

## Applicazioni fisiche

**ESERCIZIO 8.26)** Una renna trascina una slitta mediante una bretella con una forza di  $20N$ . La bretella forma un angolo  $30^\circ$  con il suolo. Determinare il valore della forza che fa muovere la slitta ed il valore della forza che tende a sollevarla.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.27)** La renna dell'esercizio precedente trascina la slitta in linea retta lungo il suolo per  $16m$ . Trovare il lavoro effettuato dalla forza applicata alla slitta.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 8.28)** Un battello che si muove con una velocità di  $16km/h$  deve attraversare un fiume la cui corrente, costante in ogni suo punto, è di  $8km/h$ . Quale angolo rispetto alla riva deve mantenere il battello per raggiungere la riva opposta compiendo il tragitto minimo?

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*