Argomento 3
Limiti e calcolo dei limiti I

Distanza e intorni

In tutta la trattazione che segue si parlerà indistintamente di un *numero reale* o del corrispondente *punto* sulla retta euclidea (vedi Arg.1).

Definizione 3.1 Si definisce **distanza** tra due numeri reali o punti della retta euclidea a e b il modulo della loro differenza $|b-a| \ = |a-b|$.

Esempio 3.2 La distanza tra 1 e 4 è $|1-4| = |4-1| = 3$, la distanza tra -1 e 5 è $|-1-5| = |5-(-1)| = 6$.

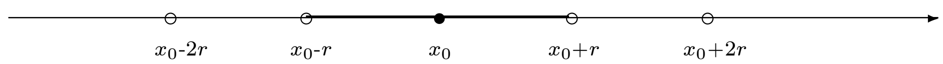
Utilizziamo ora la distanza per poter esprimere, attraverso la nozione di intorno, il concetto di "mettersi nelle vicinanze" di un numero reale:

Definizione 3.3 Si chiama **intorno** del numero reale x_0 di raggio $r > 0$ l'insieme dei numeri che distano da x_0 meno di r, cioè l'intervallo limitato aperto (vedi Arg.1):

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad -r < x - x_0 < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Esempio 3.4 L'intorno $U(2,1)$ di 2 di raggio 1 è l'intervallo aperto $(2-1, 2+1) = (1,3)$.

Esistono infiniti intorni di x_0, uno per ogni possibile raggio:

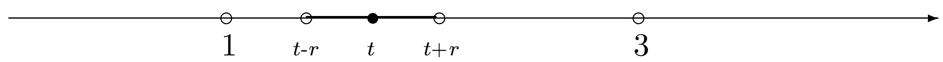


La scelta di un intorno è quindi data dalla scelta del suo raggio, cioè dalla scelta di un numero reale positivo. L'intersezione di due intorni di x_0 è data dall'intorno di raggio minore.
In generale si indicherà con $U(x_0)$ un qualunque intorno di x_0.

Definizione 3.5 Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, x_0 è detto **punto interno** di A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A.

Esempi 3.6

- Verifichiamo che ogni $t \in (1,3)$ è un punto interno di $(1,3)$: si prenda r minore del minimo tra le distanze $|t-1|$ e $|3-t|$. Allora $1 < t-r < t+r < 3$ e di conseguenza l'intorno $U(t,r) = (t-r, t+r)$ risulta contenuto in $(1,3)$:



Ciò vale in generale per qualunque intervallo aperto (a,b): ogni punto di (a,b) è interno.

- L'estremo a dell'intervallo $[a, b)$ non è un suo punto interno, in quanto ogni suo intorno contiene numeri minori di a che quindi non appartengono a $[a, b)$. Nello stesso modo si verifica in generale che gli estremi di un qualsiasi intervallo non sono punti interni.
- L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non contiene punti interni.

Dalla definizione di intorno segue che avvicinarsi a un numero reale x_0 significa "muoversi" in intorni di x_0 di raggio sempre più piccolo.
Per i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non ha senso parlare in modo analogo di distanza. Con l'espressione "avvicinarsi" a $+\infty$ si intende muoversi verso destra lungo semirette illimitate a destra, con "avvicinarsi" a $-\infty$ muoversi verso sinistra lungo semirette illimitate a sinistra. Si può allora generalizzare a $+\infty$ e $-\infty$ la definizione di intorno.

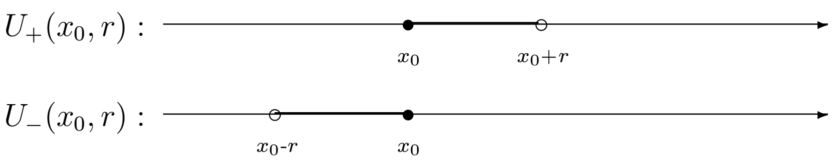
Definizioni 3.7

- Si chiama **intorno di** $+\infty$ di estremo sinistro a l'intervallo aperto illimitato a destra
$$U(+\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x > a\} = (a, +\infty)\ .$$
- Si chiama **intorno di** $-\infty$ di estremo destro a l'intervallo aperto illimitato a sinistra
$$U(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x < a\} = (-\infty, a)\ .$$

Se P rappresenta un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$, si indicherà in generale con $U(P)$ un intorno di P.
Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si possono anche dare le nozioni di intorno destro e di intorno sinistro, che tengono conto rispettivamente dei punti "vicini a x_0" maggiori di x_0 e dei punti "vicini a x_0" minori di x_0.

Definizioni 3.8

- Si chiama **intorno destro di** x_0 di raggio r l'intervallo
$$U_+(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq x_0, |x - x_0| < r\} = [x_0, x_0 + r)$$
- Si chiama **intorno sinistro di** x_0 di raggio r l'intervallo
$$U_-(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \leq x_0, |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0]$$



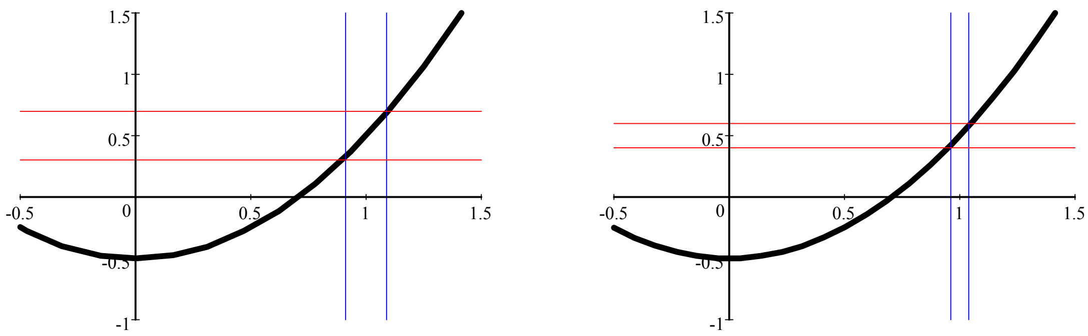
Esempio 3.9 L'intorno destro $U_+(3, 4)$ di 3 di raggio 4 è l'intervallo $[3, 7)$. L'intorno sinistro $U_-(1, 2)$ di 1 di raggio 2 è l'intervallo $(-1, 1]$.

In generale si indicherà con $U_+(x_0)$ un intorno destro qualsiasi del numero reale x_0 e con $U_-(x_0)$ un intorno sinistro.
Avvicinarsi al numero reale x_0 esclusivamente da destra (rispettivamente da sinistra) significa "muoversi" in intorni destri (rispettivamente sinistri) di x_0 sempre più piccoli.

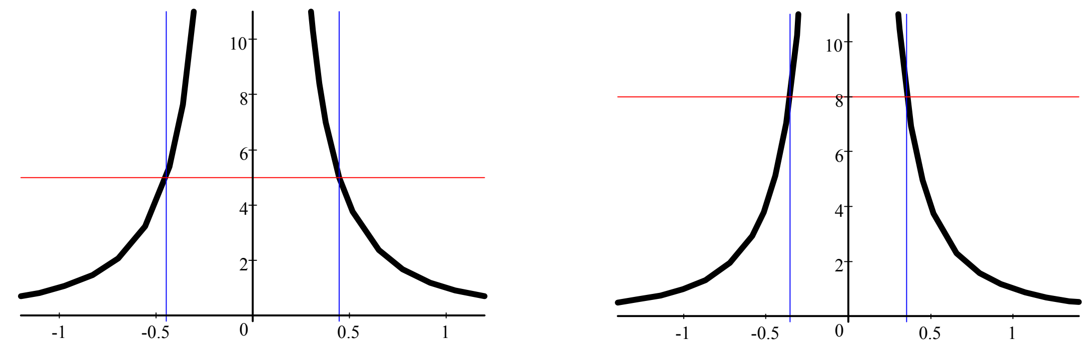
Definizione di limite

Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$. I valori assunti da una funzione f mentre il suo argomento si avvicina a P, possono avvicinarsi a un numero reale L oppure essere in modulo sempre più grandi, come vediamo negli esempi seguenti:

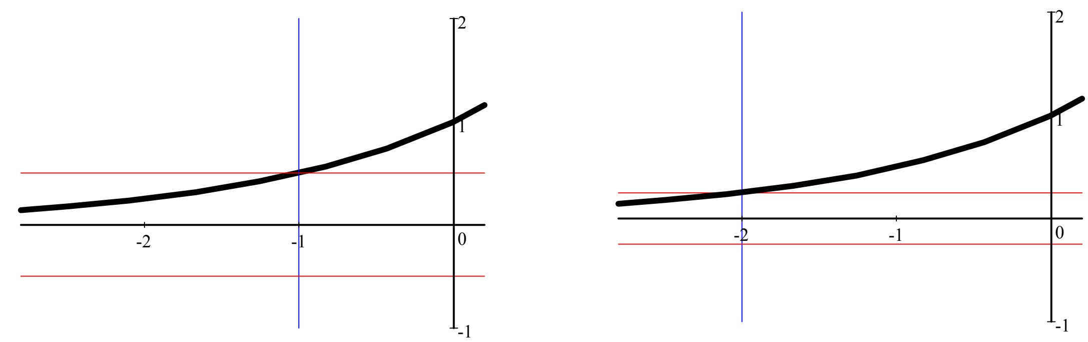
Esempio 3.10 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $x^2 - \frac{1}{2}$ si avvicinano (tendono) al numero $\frac{1}{2}$ per x che si avvicina (tende) a 1.



Esempio 3.11 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $\dfrac{1}{x^2}$ si avvicinano a $+\infty$ per x che si avvicina a 0.



Esempio 3.12 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione e^x si avvicinano a 0 per x che si avvicina a $-\infty$.



Nota Per conoscere il comportamento di f "vicino a P" non è importante il valore di f in P o addirittura che f sia definita in P, ma occorre che la funzione sia definita per numeri "arbitrariamente vicini" a P, quindi per numeri (diversi da P) in ogni suo intorno arbitrariamente piccolo: questo si esprime dicendo che P deve essere un punto di accumulazione per il dominio di f.

Definizione 3.13 P è **punto di accumulazione** per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno $U(P)$ di P ci sono elementi di A diversi da P, cioè

$$\boxed{\forall\ U(P) \qquad \exists\ x \in A \cap U(P), \quad x \neq P.}$$

Definizione 3.14 P è **punto di accumulazione destro (sinistro)** per il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno destro (sinistro) di x_0 esistono elementi di A diversi da P.

Esempi 3.15

- Se P è un punto interno di A, P è ovviamente un suo punto di accumulazione, perché, visto che esiste un intorno U di P tutto contenuto in A, ogni altro intorno U'di P contiene l'intorno $U' \cap U$ e quindi dei punti di A diversi da P.
- L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha come unico punto di accumulazione $+\infty$: ogni intervallo illimitato a destra contiene numeri naturali.
- L'insieme dei punti di accumulazione e dei punti di accumulazione da sinistra di $[1, 2) \cup \{3\}$ è $[1, 2]$, mentre l'insieme dei suoi punti di accumulazione da destra è $[1, 2)$. Si noti che 2 è punto di accumulazione di $[1, 2) \cup \{3\}$ ma non vi appartiene.

È ora possibile formalizzare in modo rigoroso il concetto di limite, dando la seguente definizione:
Definizione 3.16 Data la funzione $f : A \to \mathbf{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per il suo dominio A, si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite** di f per x che tende a P e si scrive

$$\boxed{\lim_{x\to P} f(x) = L}$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno di P i cui punti x del dominio A diversi da P hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$\boxed{\lim_{x\to P} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall\ U(L) \qquad \exists U(P) \ \text{ tale che } \ \forall\ x \in A \cap U(P),\ x \neq P, \qquad f(x) \in U(L).}$$

La definizione di limite 3.16 ha il vantaggio di andare bene sia che il punto P e il limite L siano numeri reali, sia che P o L o entrambi siano $+\infty$ o $-\infty$. Bisogna però ricordare che gli intorni di un numero reale sono intervalli limitati centrati in quel numero, mentre gli intorni di $+\infty$ o $-\infty$ sono intervalli illimitati a destra o a sinistra (def. 3.3 e 3.7).[1]

[1] Per impratichirsi con la definizione di limite è utile riscriverla nei vari casi. Vediamone alcuni:

1) Siano $P = x_0$ e L numeri reali come nell'esempio 3.10. Gli intorni $U(L)$ e $U(x_0)$ sono intervalli limitati determinati dai raggi ϵ e δ e $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ se e solo se $|x-x_0| < \delta$ mentre $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ se e solo se $|f(x)-L| < \epsilon$. Quindi $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| < \delta, \text{ si ha che } |f(x) - L| < \epsilon.}$

2) Siano $P = x_0$ un numero reale e $L = +\infty$, come nell'esempio 3.11. Gli intorni di x_0 sono determinati dal raggio δ, gli intorni $(k, +\infty)$ di $+\infty$ sono determinati dall'estremo inferiore k e $f(x) \in (k, +\infty)$ se e solo se $f(x) > k$. Quindi $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k\ \exists\ \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| < \delta, \text{ si ha che } f(x) > k\ .}$

3) Siano $P = -\infty$ e L un numero reale, come nell'esempio 3.12. Ogni intorno di L è determinato dal raggio ϵ, ogni intorno $(-\infty, k)$ di $-\infty$ dall'estremo superiore k e $x \in (-\infty, k)$ se e solo se $x < k$. Quindi $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\ k \text{ tale che } \forall x \in A, \quad con\ x < k, \text{ si ha che } |f(x) - L| < \epsilon.}$

Si può verificare direttamente dalla definizione che negli esempi visti, si trova il limite che ci si aspettava, cioè:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to -\infty}2^x=0$$

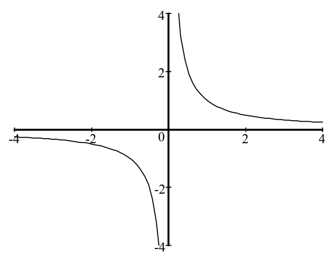
Definizione 3.17 Se il limite per $x \to P$ è finito, si dice che la funzione *converge*, se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ che *diverge* o che *è un infinito* per $x \to P$.

Esistenza del limite

Il limite può non esistere.

Esempi 3.18

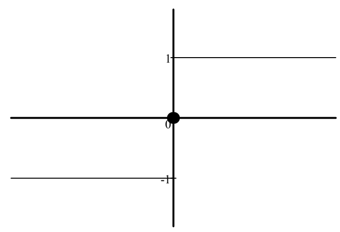
- NON esiste $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ perchè in qualunque intorno di 0 ci sono sia punti le cui immagini mediante $\frac{1}{x}$ stanno in intorni arbitrari di $+\infty$ sia punti le cui immagini stanno in intorni arbitrari di $-\infty$.



$f(x) = 1/x$

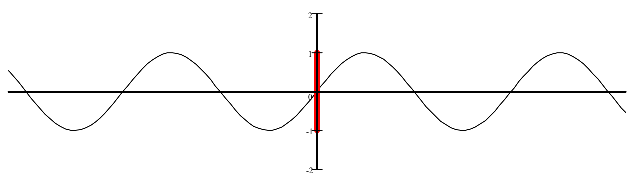
- Data la funzione "signum"

$$sgn(x)=\begin{cases}-1 \text{ se } x<0\\ 0 \text{ se } x=0\\ 1 \text{ se } x>0\end{cases}$$



si noti che NON esiste $\lim_{x\to 0} sgn(x)$

Esempio 3.19 NON esiste $\lim_{x\to+\infty}\sin x$, perchè qualunque intorno di $+\infty$ ha come immagine mediante $\sin x$ l'intero intervallo $[-1, 1]$.



$f(x) = \sin x$

Limite destro e sinistro

Sulla falsariga delle definizioni precedenti si danno le definizioni di: limite destro e sinistro.

Definizioni 3.20 Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro (sinistro) per A,

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite destro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da destra) e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno destro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\, U(L)\; \exists\, U_+(x_0) \text{ tale che } \forall\, x \in A \cap U_+(x_0),\; x \neq x_0, \quad f(x) \in U(L).$$

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite sinistro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da sinistra) e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno sinistro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\, U(L)\; \exists\, U_-(x_0) \text{ tale che } \forall\, x \in A \cap U_-(x_0),\; x \neq x_0, \quad f(x) \in U(L).$$

Segue dalle definizioni che, se x_0 è punto di accumulazione sia destro che sinistro, allora ha senso parlare sia di limite destro che di limite sinistro, sia di limite completo e si ha che [2]

$$\boxed{\text{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ se e solo esistono } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L}$$

Esempio 3.21 $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$, quindi $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Esempi 3.22 (confronta con gli esempi 3.18)

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, quindi NON esiste $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.
- $\lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1$, quindi NON esiste $\lim_{x \to 0} sgn(x)$.

[2] Si può inoltre definire il limite per eccesso (resp. per difetto).

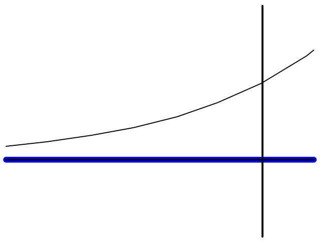
Def: Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per A, si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il **limite per eccesso** (resp. **per difetto**) di f per x che tende a P e si scrive $\lim_{x \to P} f(x) = L^+$ (resp.L^-) se $\forall\; U_+(L)$ intorno destro di L (resp. $U_-(L)$ intorno sinistro) $\exists\, U(P)$ intorno di P tale che $\forall\, x \in A \cap U(P),\; x \neq P,\quad f(x) \in U_+(L)$ (resp. $U_-(L)$) .

Asintoti orizzontali e verticali

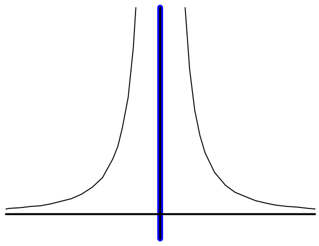
Definizione 3.23 Se la funzione converge al numero reale L per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$ si dice che la funzione ammette **asintoto orizzontale** $y = L$.

Definizione 3.24 Se la funzione diverge per x che tende al numero reale x_0 da destra o da sinistra si dice che la funzione ammette **asintoto verticale** $x = x_0$.

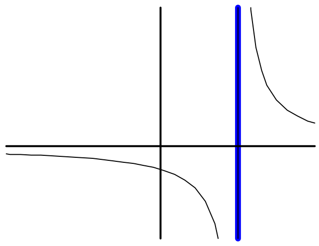
Ad esempio 2^x ha asintoto orizzontale $y = 0$ per x che tende a $-\infty$, mentre $\dfrac{1}{x^2}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e $\dfrac{1}{x-1}$ ha asintoto verticale $x = 1$.



asintoto $y = 0$



asintoto $x = 0$



asintoto $x = 1$

Limiti delle funzioni monotone

Nel caso di funzioni monotone (non necessariamente continue) definite su intervalli il limite agli estremi dell'intervallo è determinato dalla monotonia della funzione stessa.
Come in Arg.1

$$\inf_A f = \begin{cases} \text{estremo inferiore di } f(A), \text{ se } f \text{ è inferiormente limitata in } A \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_A f = \begin{cases} \text{estremo superiore di } f(A), \text{ se } f \text{ è superiormente limitata in } A \\ +\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Vale il seguente teorema:
Teorema 3.25 (limiti di funzioni monotone su intervalli)

Sia f **crescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I.

$$\begin{aligned} \text{Se } I &= (a,b), \text{ allora } \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \text{ e } \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f. \\ \text{Se } I &= (a,+\infty), \text{ allora } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{(a,+\infty)} f. \\ \text{Se } I &= (-\infty,b), \text{ allora } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{(-\infty,b)} f. \end{aligned}$$

Sia f **decrescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I.

$$\begin{aligned} \text{Se } I &= (a,b), \text{ allora } \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f \text{ e } \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f. \\ \text{Se } I &= (a,+\infty), \text{ allora } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{(a,+\infty)} f. \\ \text{Se } I &= (-\infty,b), \text{ allora } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup_{(-\infty,b)} f. \end{aligned}$$

Limiti delle funzioni elementari

Prima di affrontare il calcolo esplicito dei limiti premettiamo la seguente definizione (vedi Arg.5):
Definizione 3.26 Una funzione si dice **continua in** x_0 punto del dominio A di f e di accumulazione per A, se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

In altre parole per le funzioni continue in un punto x_0 il limite per $x \to x_0$ coincide con il valore della funzione.

L'esempio 3.21 mostra che $|x|$ è continua in 0.

Vale la seguente importante proprietà:

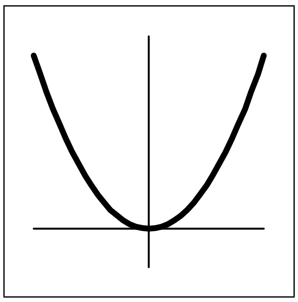
Ogni funzione elementare è continua nel suo campo d'esistenza

Esempi 3.27

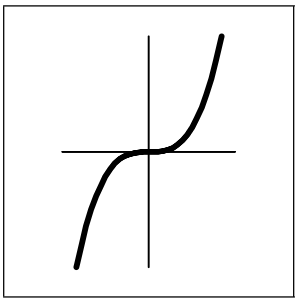
- $\lim_{x\to 3} 2^x = 2^3 = 8$, • $\lim_{x\to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$, • $\lim_{x\to 1} \log x = 0$

Riportiamo i grafici delle funzioni elementari e i loro limiti agli estremi dei campi d'esistenza ricavabili dal precedente teorema sui limiti delle funzioni monotone.

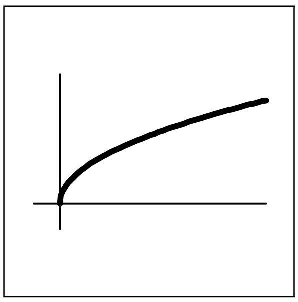
Funzione potenza:



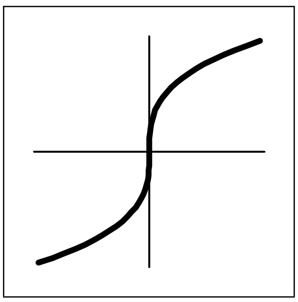
$f(x) = x^{2n}$



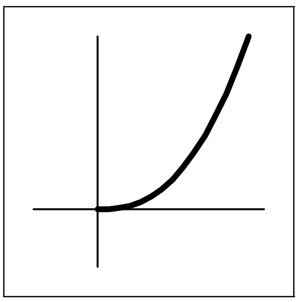
$f(x) = x^{2n+1}$



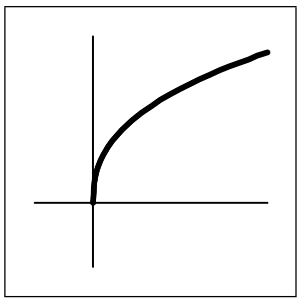
$f(x) = \sqrt[2n]{x}$



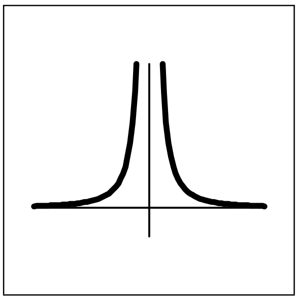
$f(x) = \sqrt[2n*1]{x}$



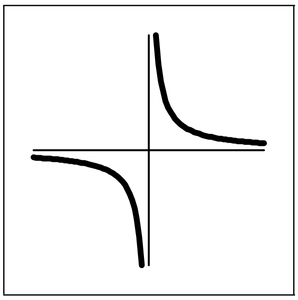
x^α, α reale > 1



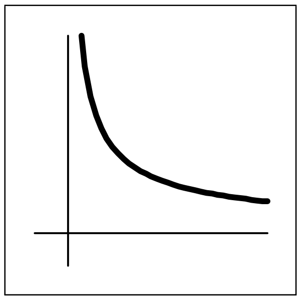
x^α, $0 < \alpha < 1$



$\frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$



$\frac{1}{x^{2n+1}} = x^{-2n-1}$



x^{α}, α reale < 0

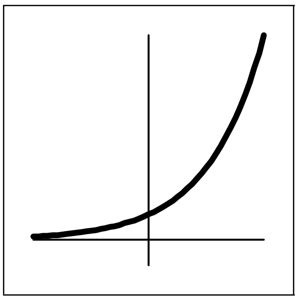
- per $\alpha > 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0^{\alpha} = 0$
- per $\alpha < 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0 \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$$

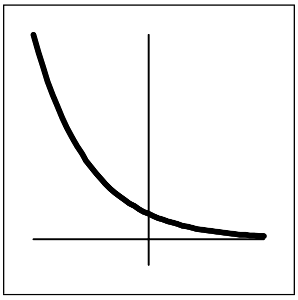
$$\lim_{x\to-\infty} x^{-2n-1} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} x^{-2n-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{-2n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} x^{-2n} = +\infty$$

In particolare $\lim_{x\to 0} x^{-2n} = +\infty$, mentre **non** esiste $\lim_{x\to 0} x^{-2n-1}$.

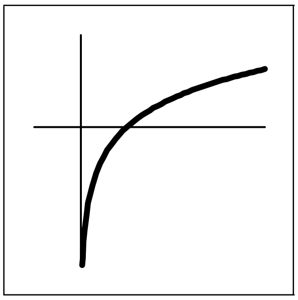
Funzioni esponenziali e logaritmiche:



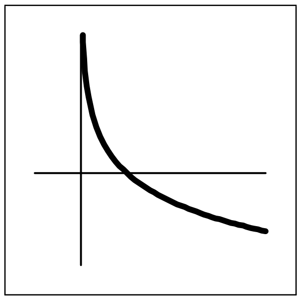
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



a^x, con $0 < a < 1$



$\log_a x$, $a > 1$

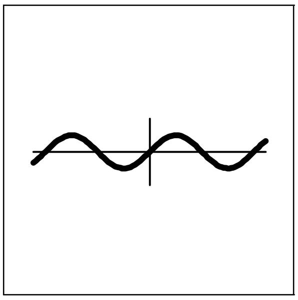


$\log_a x$, $0 < a < 1$

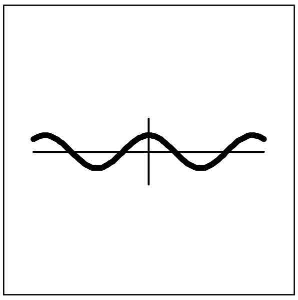
- per $a > 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

- per $a > 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

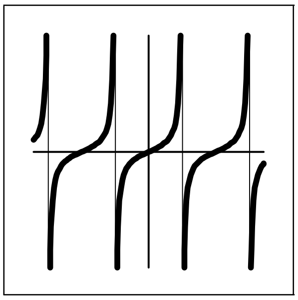
Funzioni trigonometriche:



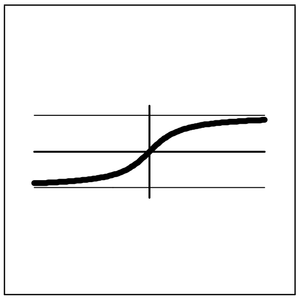
$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \tan x$



$f(x) = \arctan x$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan x = +\infty \qquad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Non esistono i limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \to -\infty} \sin x, \quad \lim_{x \to +\infty} \cos x, \quad \lim_{x \to -\infty} \cos x, \quad \lim_{x \to +\infty} \tan x, \quad \lim_{x \to -\infty} \tan x, \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} \tan x$$

Proprietà dei limiti

Somma: Si vuole ora calcolare il limite di una somma di funzioni di cui conosciamo singolarmente il limite. In molti casi non ci sono problemi, in quanto a partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti.*

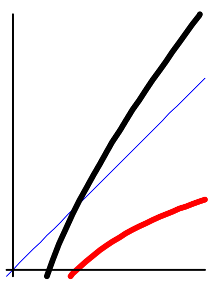
Esempio 3.28

$$\begin{array}{ccccccc} \lim\limits_{x \to 2} & x^2 & + & \log_2 x & = & 5 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & 4 & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \lim\limits_{x \to \pi} & \sin x & + & \cos x & = & -1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & 0 & & -1 & & \end{array}$$

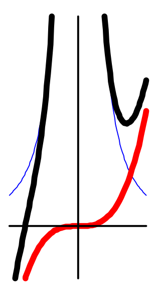
Nei casi in cui *una sola funzione o entrambe divergono a* $+\infty$, *oppure una sola o entrambe divergono a* $-\infty$, si dimostra che *i limiti delle somme sono rispettivamente* $+\infty$ *e* $-\infty$.

Esempi 3.29

$$\begin{array}{ccccccc} \lim\limits_{x \to +\infty} & (x & + & \log x) & = & +\infty \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & +\infty & & +\infty & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \lim\limits_{x \to 0} & (\frac{1}{x^2} & + & x^3) & = & +\infty \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & +\infty & & 0 & & \end{array}$$



sottile x, rossa $\log x$, nera $x + \log x$



sottile $\frac{1}{x^2}$, rossa x^3, nera $\frac{1}{x^2} + x^3$

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. (**Forma indeterminata** $\infty - \infty$)

Esempio 3.30

$$
\begin{array}{ccccccc}
\lim\limits_{x\to+\infty} & (x^2 & + & (-2-x^2)) & = & \lim\limits_{x\to+\infty} -2 = -2 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
& +\infty & & -\infty & &
\end{array}
$$

mentre si che che (vedi esempi 3.32 e 3.33)

$$
\begin{array}{cccccc}
\lim\limits_{x\to+\infty} & (x^2 & + & (-x)) & = & \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
& +\infty & & -\infty & & \\
\lim\limits_{x\to+\infty} & (x^2 & + & (-x^3)) & = & \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -\infty \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
& +\infty & & -\infty & &
\end{array}
$$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di somma di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

	$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L \in R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
S	$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M \in R}$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\mathbf{f(x)+g(x)} \to$	$\mathbf{L+M}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Il punto interrogativo indica che non si può in generale concludere nulla sul limite.

Prodotto: Anche il calcolo del limite di un prodotto di funzioni di cui si conoscono i limiti risulta in molti casi immediato. A partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.*

Esempi 3.31

$$
\begin{array}{cccccc}
\lim\limits_{x\to 1} & 2^x & \cdot & \arctan x & = & \pi/2, \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
& 2 & & \pi/4 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\lim\limits_{x\to 0} & \cos x & \cdot & (x^3+3) & = & 3 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
& 1 & & 3 & &
\end{array}
$$

Inoltre si dimostra che, se *una delle funzioni diverge a* $+\infty$ *e l'altra converge a un numero positivo o diverge a* $+\infty$, oppure *una diverge a* $-\infty$ *e l'altra converge a un numero negativo o diverge a* $-\infty$, *il limite del prodotto è sempre* $+\infty$.

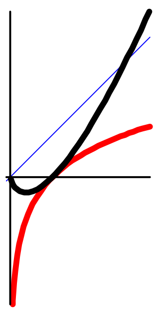
Esempi 3.32

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{(x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\log x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

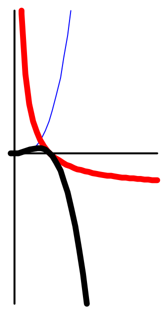
Infine si dimostra che, *se una delle funzioni diverge a* $+\infty$ *e l'altra converge a un numero negativo o diverge a* $-\infty$, oppure *una diverge a* $-\infty$ *e l'altra converge a un numero positivo, il limite del prodotto è sempre* $-\infty$.

Esempi 3.33

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\-\infty}}{(4x^5+2)} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x^3} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\-1}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -\infty$$



Es. 3.32: sottile x, rossa $\log x$, nera $x\log x$



Es. 3.33: sottile $\frac{1}{x}-1$, rossa x^3, nera$\left(\frac{1}{x}-1\right)x^3$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di prodotto di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

P

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L\in R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ o $-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M\in R}$	$\mathbf{M>0}$	$\mathbf{M<0}$	$\mathbf{M>0}$	$\mathbf{M<0}$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f(x)\cdot g(x)} \to$	$\mathbf{L\cdot M}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ e l'altra a 0, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. (**Forma indeterminata** $\infty\cdot 0$)

Esempi 3.34

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{(e^{-x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{e^{x+2})} = \lim_{x\to+\infty} e^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{-2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(x^3+2)} = \lim_{x\to-\infty} x + 2x^{-2} = -\infty$$

Quoziente: Anche il calcolo del limite di un quoziente di funzioni di cui si conoscono i limiti in molti casi è immediato. Si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali e il limite del denominatore è diverso da 0, il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti.*

Esempi 3.35

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\substack{3\\ \uparrow}}{e^x - x + 2}}{\underset{\substack{\downarrow\\ 4}}{\cos x + 3}} = \frac{3}{4} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\overset{\substack{3\cdot 4-7\\ \uparrow}}{3x^2 - 7}}{\underset{\substack{\downarrow\\ 1+9}}{\log_2 x + 3^x}} = \frac{3\cdot 4 - 7}{1+9} = \frac{1}{2}$$

Inoltre si dimostra che, *se il il numeratore converge e il denominatore diverge, il limite del quoziente è 0.* Se invece *il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo*, oppure *il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo, il limite del quoziente è sempre $+\infty$.* Infine, *se il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo*, oppure *il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo, il limite del quoziente è sempre $-\infty$.*

Esempi 3.36

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\substack{0\\ \uparrow}}{(\frac{1}{2})^x}}{\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{x^3 - 1}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\substack{+\infty\\ \uparrow}}{\log x}}{\underset{\substack{\downarrow\\ -\frac{\pi}{2}}}{\arctan x - \pi}} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\substack{-\infty\\ \uparrow}}{3x^5 - 2}}{\underset{\substack{\downarrow\\ -1}}{3^x - 1}} = +\infty$$

Tali casi immediati sono raccolti nella prima tabella riassuntiva sui limiti dei quozienti.

Q₁

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L \in R}$	$\mathbf{L \in R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M \neq 0}$	$+\infty$ o $-\infty$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$
$\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} \to$	$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{M}}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Se il denominatore ha invece limite 0 bisogna stare molto attenti perchè il limite può anche non esistere.

Esempi 3.37

- Come abbiamo visto non esiste $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Il numeratore è sempre 1 e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, ma ovviamente per $x > 0$ il denominatore assume valori > 0, per $x < 0$ assume valori < 0, quindi $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$
- Non esiste $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}$: infatti $\lim\limits_{x\to 1} e^x = e$ e $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$, ma per $x > 1$, il denominatore assume valori > 0, per $x < 1$ assume valori < 0, quindi $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1} = +\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{e^x}{x-1} = -\infty$.

In generale se $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$, ma f assume sia valori positivi che negativi in ogni intorno di P, non può esistere $\lim\limits_{x\to P}\frac{1}{f(x)}$, perché in ogni intorno di P ci sono punti in cui $\frac{1}{f}$ assume valori sia positivi che negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto.

IMPORTANTE: Con

$$\lim_{x\to P} f(x) = 0^+$$

si indica che il limite è 0 e inoltre esiste un intorno di P i cui punti nel dominio di f soddisfano la condizione $f(x) > 0$. In tal caso $\lim\limits_{x\to P}\frac{1}{f} = +\infty$. Analogamente con $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0^-$ si indica che il limite è 0 e esiste un intorno di P i cui punti (nel dominio di f) soddisfano $f(x) < 0$ e in questo caso $\lim\limits_{x\to P}\frac{1}{f} = -\infty$.

Nei casi il cui *il denominatore converge a 0^+ ed il numeratore tende a un numero positivo o a $+\infty$*, oppure *il denominatore converge a 0^- e il numeratore tende a un numero negativo o a $-\infty$*, si dimostra che *il limite del quoziente è $+\infty$*. Se invece *il denominatore converge a 0^+ e il numeratore tende a un numero negativo o a $-\infty$*, oppure *il denominatore converge a 0^- e il numeratore tende a un numero positivo o a $+\infty$*, si dimostra che *il limite del quoziente è $-\infty$* .

Esempi 3.38

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{-\log x}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{x^3}} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{x-3}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{(x-2)^2}} = -\infty$$

Se invece sia il numeratore che il denominatore divergono oppure se entrambi convergono a 0 non si può conludere nulla a priori su tali limiti **(Forme inderminate** $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$).

Esempi 3.39

$$\text{per } x \to +\infty: \qquad \frac{\overset{\displaystyle +\infty}{\overset{\uparrow}{2x^2-1}}}{\underset{\displaystyle +\infty}{\underset{\downarrow}{x^3+2x-1}}} = \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\overset{\displaystyle 2}{\overset{\uparrow}{2-\frac{1}{x^2}}}}{\underset{\displaystyle +\infty}{\underset{\downarrow}{x\left(1+2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}}} \to 0$$

$$\text{per } x \to +\infty: \qquad \frac{\overset{\displaystyle +\infty}{\overset{\uparrow}{x^5-2}}}{\underset{\displaystyle +\infty}{\underset{\downarrow}{x^3+x-3}}} = \frac{x^5\left(1-\frac{2}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)} = \frac{\overset{\displaystyle +\infty}{\overset{\uparrow}{x^2\left(1-\frac{2}{x^5}\right)}}}{\underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}}} \to +\infty$$

Gli ultimi casi sono riassunti nella seconda tabella sui limiti di quozienti:

$\mathbf{Q}_2$

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L>0}$ o $+\infty$	$\mathbf{L>0}$ o $+\infty$	$\mathbf{L<0}$ o $-\infty$	$\mathbf{L<0}$ o $-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ o $-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{0^+}$	$\mathbf{0^-}$	$\mathbf{0^+}$	$\mathbf{0^-}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ o $-\infty$
$\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} \to$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

In Arg.4 sono esposti alcuni metodi di calcolo per limiti che si presentano in una delle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Limiti di funzioni composte

Affrontiamo ora il problema di calcolare il limite di una funzione composta. Si dimostra che[3]:

Siano P, Q e L numeri reali o i simboli $+\infty$ o $-\infty$.

$$\boxed{\text{Se } \begin{cases} \cdot \ \lim\limits_{x\to P} f(x) = Q \\ \cdot \ \lim\limits_{t\to Q} g(t) = L \end{cases} \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to P} g(f(x)) = L}$$

[3] va aggiunta anche l'ipotesi (sempre soddisfatta se non in casi molto particolari di cui non ci occuperemo) che f sia non costante nell'intorno di P.

Il risultato precedente si comprende meglio se si pensa a come le funzioni si compongono[4]:

$$\text{per } x \to P \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{f(\ )}{\longrightarrow} & f(x) & \overset{g(\ )}{\longrightarrow} & g(f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & & Q & & L \end{array}$$

In particolare se g è continua in $t_0 = \lim\limits_{x \to P} f(x)$ allora:

$$\boxed{\lim_{x \to P} g(f(x)) = \lim_{t \to t_0} g(t) = g(t_0) = g(\lim_{x \to P} f(x))}$$

quindi se f è continua in $P = x_0$ (cioè $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ allora:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))}$$

Esempi 3.40

- Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x \to 0^+} \log(\sin x)$. Si segue l'ordine di composizione:

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{\sin(\ )}{\longrightarrow} & \sin x & \overset{\log(\ )}{\longrightarrow} & \log(\sin x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0^+ & & 0^+ & & -\infty \end{array}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) = -1$. Infatti

$$\text{per } x \to +\infty \qquad \begin{array}{ccccccccc} x & \overset{\frac{1}{(\ )}}{\longrightarrow} & \frac{1}{x} & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & e^{\frac{1}{x}} & \overset{\cdot \pi}{\longrightarrow} & \pi e^{\frac{1}{x}} & \overset{\cos(\ )}{\longrightarrow} & \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & 0^+ & & 1 & & \pi & & -1 \end{array}$$

La regola precedente è utile per calcolare certi limiti mediante un "*cambio di variabile*": per calcolare $\lim\limits_{x \to P} g(f(x))$ si può scrivere $t = f(x)$ con $t \to Q$ per $x \to P$ e calcolare $\lim\limits_{t \to Q} g(t)$.

Limiti del tipo

$$\boxed{\lim_{x \to P} f(x)^{g(x)} \quad \text{con} \quad f(x) > 0 \text{ in un intorno di } P}$$

si possono ricondurre a limiti di prodotti, mediante la trasformazione

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))}}$$

[4]Si faccia attenzione: le frecce orizzontali indicano l'applicazione delle funzioni, le frecce verticali il limite.

(nell'intorno di P) e per la continuità della funzione e^x:

$$\text{per } x \to P \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{g(\ )\cdot\log f(\ )}{\longrightarrow} & g(x)\cdot\log(f(x)) & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & e^{g(x)\log(f(x))} = f(x)^{g(x)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & & \lim\limits_{x\to P} g(x)\cdot\log(f(x)) & & \lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} \end{array}$$

Nei casi in cui $g(x)\cdot\log(f(x))$ non dà una forma indeterminata, il calcolo è immediato. In particolare

Esempio 3.41 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = L$ reale diverso da 0, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to P} f(x)^L$, come per $\lim\limits_{x\to 2} x^x = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$:

$$\text{per } x \to 2 \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{x\log x}{\longrightarrow} & x\log x & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & e^{x\log x} = x^x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 2\log 2 & & e^{2\log 2} = 2^2 = 4 \end{array}$$

Esempio 3.42 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = +\infty$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = +\infty$, come per $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = +\infty$:

$$\text{per } x \to +\infty \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{x\log x}{\longrightarrow} & x\log x & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & x^x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty & & +\infty \end{array}$$

Esempio 3.43 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = 0$,

come per $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x} = 0$:

$$\text{per } x \to +\infty : \quad \begin{array}{ccccc} x & \overset{2x\log\frac{1}{x^2}}{\longrightarrow} & 2x\log\frac{1}{x^2} & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & -\infty & & 0 \end{array} \qquad \left(\text{dove} \quad \begin{array}{cccc} \lim\limits_{x\to+\infty} & 2x & \cdot\log\frac{1}{x^2} & = -\infty \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & +\infty & -\infty & \end{array}\right)$$

Esempio 3.44 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = +\infty$,

come per $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} = +\infty$:

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{\tan x\log(x-\frac{\pi}{2})}{\longrightarrow} & \tan x\log(x-\frac{\pi}{2}) & \overset{e^{(\ )}}{\longrightarrow} & \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\pi}{2}^+ & & +\infty & & +\infty \end{array} \qquad \left(\text{dove} \quad \begin{array}{cccc} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} & (\tan x) & \log(x-\frac{\pi}{2}) & = +\infty \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & -\infty & -\infty & \end{array}\right)$$

$$\text{Se } \lim_{x \to P} g(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to P} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases} \text{ oppure } \lim_{x \to P} g(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ e } \lim_{x \to P} f(x) = 1$$

per $x \to P$ $\;g(x) \cdot \log(f(x))$ è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$

quindi in questi casi il limite $\lim_{x \to P} f(x)^{g(x)}$ non si può determinare a priori.

Alcuni teoremi sui limiti

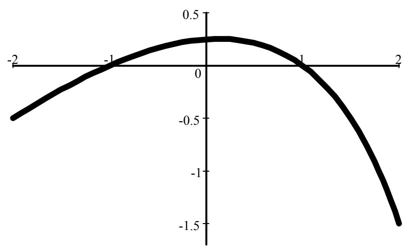
Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ o $-\infty$. Elenchiamo alcuni teoremi sui limiti.

Teorema 3.45 (unicità del limite) Se esiste $\lim_{x \to P} f(x)$ è unico (cioè se $\lim_{x \to P} f(x) = L$ e $\lim_{x \to P} f(x) = M$ allora $L = M$).
Segue dalla definizione di limite che:

Teorema 3.46 Dato $\lim_{x \to P} f(x) = L$, allora esiste un intorno di P dove f è

$$\begin{cases} \cdot \text{ limitata, se } L \in \mathbb{R} \\ \cdot \text{ inferiormente limitata, se } L = +\infty \\ \cdot \text{ superiormente limitata, se } L = -\infty \end{cases}$$

Esempio 3.47 Data $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x}$, risulta $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x(x^2 - 1)}{x(x - 4)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(x^2 - 1)}{(x - 4)} = \dfrac{1}{4}$, quindi esiste un intorno di 0 (ad esempio $(-2, 2)$) in cui funzione è limitata, visto che $f(-2, 2) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$:



Teorema 3.48 (**della permanenza del segno**) Se $\lim_{x \to P} f(x) = L \neq 0$

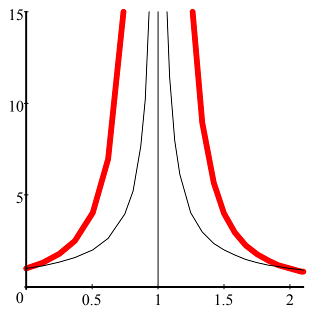
allora esiste un intorno di P in cui f è $\begin{cases} \cdot \text{ positiva, se } L > 0 \text{ o } L = +\infty \\ \cdot \text{ negativa, se } L < 0 \text{ o } L = -\infty \end{cases}$

Esempio 3.49 Nell'esempio precedente, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \dfrac{1}{4} > 0$ e f è maggiore di 0 nell'intorno $(-1, 1)$ di 0.

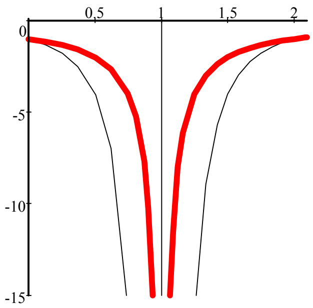
Teorema 3.50 (**Criterio del confronto**)

1) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di P.

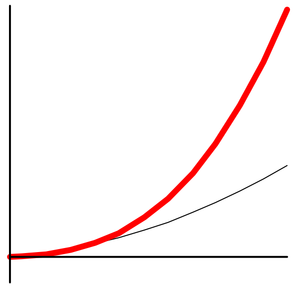
$$\begin{cases} \cdot \text{ Se } \lim\limits_{x \to P} f(x) = +\infty, \text{ allora } \lim\limits_{x \to P} g(x) = +\infty. \\ \\ \cdot \text{ Se } \lim\limits_{x \to P} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim\limits_{x \to P} f(x) = -\infty \end{cases}$$

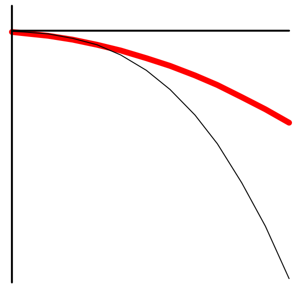


f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$



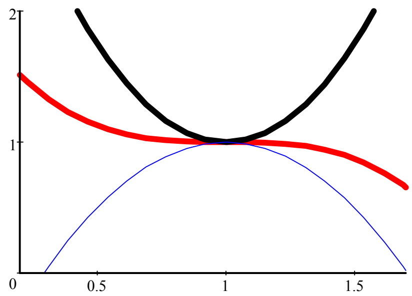
f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$


f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(+\infty)$

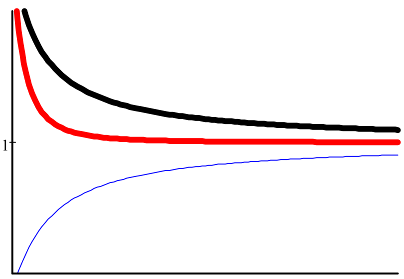

f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(+\infty)$

2) Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di P.

$$\text{Se } \lim_{x \to P} f(x) = \lim_{x \to P} h(x) = L, \quad \text{allora } \lim_{x \to P} g(x) = L$$



$f$sottile, grossa, $h$nera
$f \leq g \leq h$ in $U(1, \frac{1}{2})$

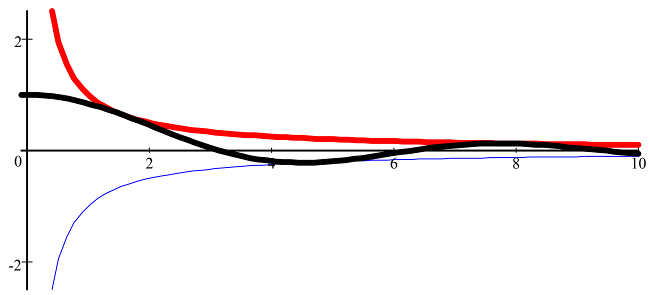


$f$sottile, g rossa, $h$nera
$f \leq g \leq h$ in $U(+\infty)$

Esempi 3.51

- Si vuole calcolare $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. Il limite di $\sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste, ma.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



sottile $-\frac{1}{x}$, rossa $\frac{1}{x}$, nera $\frac{\sin x}{x}$

e $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Quindi dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty} (2x - \sin x)$. Il limite di $\sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste ma poiché

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x$$

e $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to+\infty} (2x - \sin x) = +\infty$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}}$. Il limite di $\cos\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ non esiste, ma poichè per $x \in (0, \frac{1}{e})$,

$$\frac{2}{\log x + 1} \leq \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}} \leq \frac{2}{\log x - 1}$$

e $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x + 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - 1} = 0$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}} = 0$.

Corollario 3.52 (al teorema del confronto)
Se $\lim_{x\to P} f(x) = 0$ e g è una funzione limitata in un intorno di P, allora

$$\lim_{x\to P} f(x)g(x) = 0.$$

Esempi 3.53

- Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ si può usare il corollario: $\sin(x)$ è una funzione limitata e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} \cos x e^x = 0$, perché $\cos x$ è limitata e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Corollario 3.54

$\lim_{x\to P} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to P} |f(x)| = 0$.

Esempio 3.55

$\lim_{x\to 0} |e^x - 1| = 0 = \lim_{x\to 0}(e^x - 1)$.