

# Argomento 3s

## Soluzioni degli esercizi

### SUGGERIMENTI

**ESERCIZIO 3s.2 (c), (f), (k)** Utilizzare il Teorema del Confronto per i limiti di successioni: se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  convergono al limite finito  $l$  e  $a_n \leq c_n \leq b_n$  almeno da un certo indice  $n$  in poi, allora anche  $\{c_n\}$  converge a  $l$ .

Che cosa succede facendo il prodotto di una successione limitata e di una convergente a zero?

**ESERCIZIO 3s.3** In tutti questi limiti si ha  $a_n = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{c_n}$ . Se il polinomio  $P_n$  al numeratore ha lo stesso grado e coefficiente di quello  $Q_n$  al denominatore, si può scrivere  $\frac{P_n}{Q_n} = 1 + \frac{R_n}{Q_n}$ , ove il grado di  $R_n$  è minore del grado di  $Q_n$ . In tal caso, poichè l'esponente  $c_n$  tende a un  $\infty$  si presenta la forma di indecisione  $[1^\infty]$ , risolubile usando le conseguenze del limite di Nepero.

**ESERCIZIO 3s.8 (c), (d)** Ricordare i prodotti notevoli

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \quad \text{e} \quad (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

### SOLUZIONI

**Sol. Ex. 3s.1** Si tratta sempre di forme indeterminate del tipo  $[\frac{\infty}{\infty}]$ : si possono utilizzare i confronti di infiniti.

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - n + 4}{n^{3/2} - n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^3}\right)}{-n^3 (1 - n^{-3/2})} = \boxed{-2}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + n - 3}{n^{2/3} - n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{-n^2} = \boxed{-\infty}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[6]{n}}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/3} + n^{1/6}}{n^{1/2} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/3} (1 + n^{-1/6})}{n^{1/2} (1 - n^{-1/2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{(1/3)-(1/2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1/6} = \boxed{0}$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n^2}{e^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{e^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \frac{(n/2)^3}{e^{n/2}} = \boxed{0}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(0.5)^n - n}{(0.3)^n + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}} = \boxed{-\infty}: \text{infatti } \{(0.5)^n\} \text{ e } \{(0.3)^n\} \text{ tendono a } 0, \text{ essendo le basi } < 1$$

$$\text{f)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n - n}{3^n + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \boxed{+\infty} \text{ (base } > 1)$$

$$\text{g)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln(n^{1/2}) + (\ln n)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2} \ln n + (\ln n)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2} \ln n (1 + 2 (\ln n)^{-1/2})} = \boxed{2}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 3^{-n}}{\ln(1 + 3^n) + n^{2/3}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln[3^n(1 + 3^{-n})] + n^{2/3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln 3^n + \ln(1 + 3^{-n}) + n^{2/3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \ln 3 + n^{2/3}} = \boxed{\frac{1}{\ln 3}} \end{aligned}$$

$$\text{k)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^5 + 5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n} - 20} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^5 (1 + 5(\ln n)^{-1})}{n^{1/10}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^5}{n^{1/10}} = \boxed{0}$$

**Sol. Ex. 3s.2** In tutti i casi tranne **(c)**, **(f)**, **(h)**, **(k)** si tratta di forme indeterminate del tipo  $[0 \cdot \infty]$  risolubili tenendo presenti i limiti notevoli che riguardano seno, coseno e tangente.

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{3n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3n}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = \boxed{3}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin \frac{3n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3n}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = \boxed{+\infty}$$

**c)** Non si tratta di una forma indeterminata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(e^n)}{n} = \boxed{0} \quad \text{poiché} \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(e^n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{e si ha:} \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left\{-\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 0$$

$$\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{e)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \boxed{0}$$

**f)** Non si tratta di una forma indeterminata:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{n} - 1}{n} = \boxed{0} \quad \text{poiché} \quad -\frac{2}{n} < \frac{\cos \sqrt{n} - 1}{n} < 0 \quad \text{e} \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 0$$

$$\text{g)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan \frac{5n + 2}{n - n^2} = \boxed{-5} \quad (\text{vedi (a)})$$

$$\text{h)} \quad \text{È una forma indeterminata del tipo } \left[\frac{0}{0}\right]; \text{ come in (a), } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n^2}\right)} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

**k)** Non si tratta di una forma indeterminata:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \cos n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 - \frac{\cos n}{n})}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \boxed{+\infty} \quad \text{poiché} \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \\ &\left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Sol. Ex. 3s.3** In tutti i casi tranne gli ultimi due si tratta di forme indeterminate del tipo  $[1^\infty]$ : è quindi opportuno usare il limite di Nepero.

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2n + 2}{n^2 - n} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2n}{n^2} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n \right]^3 = (e^2)^3 = \boxed{e^6}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + n}{n^2 - n + 1} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2n - 1}{n^2 - n + 1} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2n}{n^2} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n \right]^{-1} = \boxed{e^{-2}}$
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + 2}{n^2 + 2n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2n + 2}{n^2 + 2n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2n}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} = (e^{-2})^{\frac{1}{2}} = \boxed{e^{-1}}$
- d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^n = \boxed{0}$
- e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^3 - 1}{n^3 + n + 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{n}{n^3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^{\frac{1}{n}} = \boxed{1}$
- f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^3 + n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3n}{n^3} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)^{n^2} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^3)^n = \boxed{+\infty}$
- g)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n^3 + n^2 - 2}{2n^3 + 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{n^2 - 3}{2n^3 + 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n = \boxed{e^{1/2}}$
- h) Visto che la base  $\frac{2n^2}{n^2 - n + 2}$  tende a 2, non si tratta di una forma indeterminata:  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n^2}{n^2 - n + 2} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = \boxed{0}$
- k) Non si tratta di una forma indeterminata:  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + n}{n^3 - 2} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^3 - 2}{n^2 + n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n - \frac{n^2 + 2}{n^2 + n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1)^n = \boxed{+\infty}$

**Sol. Ex. 3s.4** In tutti i casi tranne il penultimo si tratta di forme indeterminate del tipo  $[1^\infty]$ : è quindi opportuno usare il limite di Nepero.

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = \boxed{1}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{\ln n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-1}{\ln n} \right)^{(\ln n) \cdot \frac{n}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^{\frac{n}{\ln n}} = \boxed{0}$
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2^{-n})^{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2^{-n})^{2^n \cdot 2} = \boxed{e^2}$

- d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{\frac{2n-1}{2n+2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+2} \right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-3}{2n+2} \right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{2n} \right)^{\frac{n}{3}(-2)(-\frac{1}{2})} = \boxed{e^{-1/2}}$
- e) Non si tratta di una forma indeterminata:  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n+1}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = \boxed{+\infty}$
- f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n/2} = \boxed{e^{1/2}}$

**Sol. Ex. 3s.5** Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[\infty \cdot 0]$  risolvibili con uno dei limiti che servono per il confronto di infinitesimi.

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( \frac{n+3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[ \left( 1 + \frac{3}{n} \right)^n \right] = \ln(e^3) = \boxed{3}$
- b) Osserviamo che  $a_n = n \left( 1 - 3^{\frac{1}{n}} \right) = -\frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = -\frac{e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ . Quindi  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1}{\frac{\ln 3}{n}} \cdot \ln 3 = \boxed{-\ln 3}$
- c) Osserviamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{2}{n^{3/2}} \right)^{9/4} - 1}{\frac{2}{n^{3/2}}} = \frac{9}{4}$ . Quindi  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{n^{3/2}}{2} \cdot \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2}{n^{3/2}} \right)^{9/4} \right] = -2 \cdot \frac{9}{4} = \boxed{-\frac{9}{2}}$
- d) Osserviamo che  $a_n = n^2 \left( 2^{\frac{n+1}{n}} - 2 \right) = 2n^2 \left( 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$ .  
 Quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 \ln 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \boxed{+\infty}$
- e) Osserviamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = 1$ , cioè  $\left( e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) \sim -\frac{1}{n}$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$ , cioè  $\left( \sin \frac{2}{n} \right) \sim \frac{2}{n}$ .  
 Quindi, sostituendo ciascuna successione con la sua asintotica,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^{-\frac{1}{n}} - 1} \right) \left( \sin \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{2}{n} = \boxed{-2}$
- f) Osserviamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 - \frac{4}{n} \right)^{3/2} - 1}{-\frac{4}{n}} = \frac{3}{2}$ , cioè  $\left[ \left( 1 - \frac{4}{n} \right)^{3/2} - 1 \right] \sim \left( -\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{2} \right)$ . Quindi, sostituendo la successione con la sua asintotica,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left[ \left( 1 - \frac{4}{n} \right)^{3/2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \left( -\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{2} \right) = \boxed{0}$

**Sol. Ex. 3s.6** Tre di questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[\infty \cdot 0]$  risolvibili con uno dei limiti che servono per il confronto di infinitesimi. Gli altri non presentano forme indeterminate.

a) La successione di termine generale  $a_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)$  presenta una forma indeterminata

$$[\infty \cdot 0]. \text{ Poiché } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 1, \text{ cioè } \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \boxed{0}$$

b) Non è una forma indeterminata:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(\frac{n-1}{n}\right) = \boxed{0}$ , in quanto prodotto di successioni che tendono a 0

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n+1} \ln(1 + e^{-n}) = [\infty \cdot 0] = \lim_{n \rightarrow +\infty} e \cdot \frac{\ln(1 + e^{-n})}{e^{-n}} = \boxed{e}$$

d) Non è una forma indeterminata:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\ln \frac{n+4}{n^{3/2}-1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln n = \boxed{-\infty}$ , in quanto prodotto di successioni che tendono a infinito.

e) Non è una forma indeterminata:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(\ln \frac{n^2+1}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \ln n = \boxed{+\infty}$ , in quanto prodotto di successioni che tendono a  $+\infty$ .

f) La successione di termine generale  $a_n = \left(\sin \frac{3}{n}\right) \ln(2n+1)$  presenta una forma indeterminata

$$[0 \cdot \infty]: \text{ poiché } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{3}{n}}{\frac{3}{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{3}{n}\right) \ln(2n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} \ln(2n+1) = \boxed{0}, \text{ per confronto di infiniti.}$$

**Sol. Ex. 3s.7** Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[\infty - \infty]$ : alcuni sono banalmente risolvibili con considerazioni di ordine di infinito, altri no.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1 - n-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \boxed{0}$$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n-1}) = \boxed{+\infty}$  poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - n} \left(1 - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2 - n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - n}$ : più semplicemente, la prima radice si comporta come  $\sqrt{n^2}$ , la seconda come  $\sqrt{n}$ ; visto che  $\sqrt{n^2}$  è infinito di ordine superiore a  $\sqrt{n}$ , il suo comportamento prevale.

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \sqrt{2}) = \boxed{-\infty}$  poiché, per  $n \rightarrow \infty$ , la prima radice si comporta come  $n$ , la seconda come  $\sqrt{2}n$ .

$$\text{d) } a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 3n} = \frac{(\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 3n})(\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 3n})}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 3n}}. \text{ Quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5n - n^2 - 3n}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2n} = \boxed{1}$$

$$\text{e) } a_n = \frac{n^2 - n}{\sqrt{n^2 - 1}} - n = n \cdot \frac{(n-1) - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - 1}} = n \cdot \frac{(n-1)^2 - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 - 1} [(n-1) + \sqrt{n^2 - 1}]}. \text{ Quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{2 - 2n}{\sqrt{n^2 - 1} [n + \sqrt{n^2}]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{-2n}{n(2n)} = \boxed{-1}$$

$$\text{f) } a_n = \frac{2n^2 - 3n}{\sqrt{n^2 + n}} - 2n = n \cdot \frac{(2n-3) - 2\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 + n}} = n \cdot \frac{(2n-3)^2 - 4(n^2 + n)}{\sqrt{n^2 + n} [(2n-3) + 2\sqrt{n^2 + n}]}. \text{ Quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{4n^2 - 12n + 9 - 4n^2 - 4n}{\sqrt{n^2} [2n + 2\sqrt{n^2}]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{9 - 16n}{n(2n + 2n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-16n}{4n} = \boxed{-4}$$

**Sol. Ex. 3s.8** Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[\infty - \infty]$ .

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(3n^3 - 2n) - \ln(n^3 + 1)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{3n^3 - 2n}{n^3 + 1} = \boxed{\ln 3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(n^2 - 3n) - \ln(n^2 + 1)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n^2 - 3n}{n^2 + 1} = \ln 1 = \boxed{0}$$

$$\text{c) } a_n = \sqrt[3]{2n^3 + 3n^2} - \sqrt[3]{2n^3 - n + 1} = \frac{(2n^3 + 3n^2) - (2n^3 - n + 1)}{(2n^3 + 3n^2)^{2/3} + [(2n^3 + 3n^2)(2n^3 - n + 1)]^{1/3} + (2n^3 - n + 1)^{2/3}}.$$

$$\text{Quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n - 1}{2^{2/3}n^2 + 2^{2/3}n^2 + 2^{2/3}n^2} = \frac{3}{3 \cdot 2^{2/3}} = \boxed{2^{-2/3}}$$

$$\text{d) } a_n = \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1} + \sqrt[3]{3n - 2n^3} = \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 - 3n}. \text{ Quindi, ragionando come in}$$

$$\text{(c), } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{2^{2/3}n^2 + 2^{2/3}n^2 + 2^{2/3}n^2} = \boxed{\frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}}$$

**Sol. Ex. 3s.9** Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[\infty^0]$ : ci si riconduce a un confronto di infiniti.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right)^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\ln n}} = \boxed{e^{1/2}}, \text{ poich\'e,}$$

$$\text{per } n \rightarrow +\infty, \ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \sim \ln(2\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 \text{ e quindi l'esponente tende a } \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n-1})^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(n-1)}{\sqrt{n}}} = \boxed{1}, \text{ poich\'e, per } n \rightarrow +\infty,$$

$$\ln(n-1) \sim \ln n \text{ e quindi l'esponente tende a } 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n + 2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\ln(e^n + 2)})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^n + 2)}{n}} = \boxed{e}, \text{ poich\'e, per } n \rightarrow +\infty,$$

$$\ln(e^n + 2) \sim n \text{ e quindi l'esponente tende a } 1.$$

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{n^2} - 1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\ln(e^{n^2} - 1)} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{n^2} - 1)}{n}} = \boxed{+\infty}$ , poiché, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  
 $\ln(e^{n^2} - 1) \sim n^2$  e quindi l'esponente tende a  $+\infty$ .

**Sol. Ex. 3s.10** Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo  $[0^0]$ : ci si riconduce a un confronto di infiniti. Si possono utilizzare gli asintotici che provengono dai limiti notevoli utili per il confronto di infinitesimi.

a) Poiché, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = n^{-1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{-1})^{\frac{3}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-\ln n})^{\frac{3}{\ln n}} = \boxed{e^{-3}},$$

b) Poiché, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = n^{-1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{-1})^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln n}{n^2}} = \boxed{1}, \text{ in quanto } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

c) Poiché, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{1}{n} = n^{-1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{-1})^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln n}{\sqrt{\ln n}}} = \boxed{0}, \text{ poiché l'esponente tende a } -\infty.$$

d) Poiché, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sqrt{e^{-n} + 1} - 1 \sim \frac{1}{2}e^{-n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^{-n} + 1} - 1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}e^{-n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} (e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \boxed{e^{-1}}, \text{ in quanto}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$