Argomento 11

Vettori e loro applicazioni

Parte A - Vettori e operazioni su di essi

Vettori e vettori applicati in un punto

Ci sono situazioni in cui un numero e un'unità di misura non danno informazioni sufficienti. Ad esempio

1) nel piano, dire che il punto B dista 10 cm da un punto A fissato non è sufficiente ad individuare B;

2) dire che un corpo è sottoposto all'accelerazione costante di $1g$ (cioè circa 9.8 m/s^2) non è sufficiente a garantire che sia sottoposto all'accelerazione di gravità (la direzione dell'accelerazione potrebbe non essere verticale o anche essere verticale ma diretta verso l'alto e in tal caso il corpo in esame galleggerebbe nell'aria);

3) dire che un corpo - in moto uniforme su una rotaia rettilinea e priva di attrito - viene frenato applicando costantemente una forza di 1 N (nella direzione del moto) non è sufficiente per stabilire dopo quanto tempo e dove il corpo si ferma [(1)].

In questi casi, anche se apparentemente diversi, risulta utile far ricorso alla nozione di vettore. Cominciamo ad illustrarla prendendo spunto dall'esempio 2. Si è detto che per sapere come agisce l'accelerazione è necessario conoscere oltre alla sua intensità anche la direzione e il verso in cui è applicata: questi tre sono gli elementi che descrivono esaurientemente ogni grandezza "vettoriale". Diamo dunque la seguente

Definizione 11.1 Un **vettore** è individuato assegnando

- un numero reale ≥ 0 detto **modulo** (o lunghezza) del vettore [(2)]
- una retta che ne dà la **direzione**
- un **verso** sulla retta.

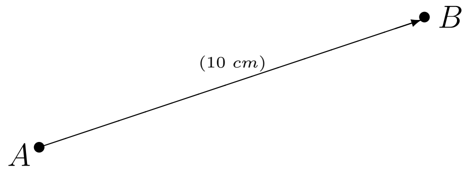
Denoteremo i vettori con lettere minuscole in grassetto: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$... e i corrispondenti moduli con $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$... Se $|\mathbf{u}| = 1$ diremo che $\mathbf{u}$ è un **versore**.

[1)] Per capire in che senso questo è un problema vettoriale, si veda il paragrafo "Spunti per una generalizzazione del concetto di vettore".

[2)] Attenzione: nelle applicazioni concrete il modulo spesso non è dato come numero puro, bensì come numero con unità di misura. Per intendersi, nell'esempio 2, l'intensità dell'accelerazione è di 9.8 m/s^2.

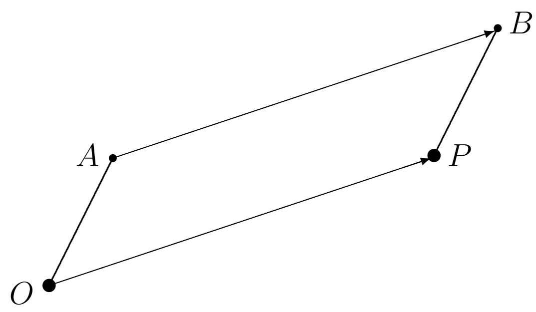
Se nel problema compaiono due o più grandezze vettoriali dello stesso tipo (ad es. accelerazioni) è sottointeso che, per poter applicare gli strumenti che svilupperemo nel seguito, il modulo di tutte deve essere espresso rispetto alla stessa unità di misura.

Esempio 11.2 Il problema proposto nel primo esempio è risolto assegnando il vettore avente modulo 10 (cm), direzione data dalla retta che congiunge A con B e verso da A verso B. In sostanza si considera il segmento AB con l'orientazione da A a B.
Si può quindi riassumere tutta l'informazione disegnando il segmento AB con una freccia nell'estremo di arrivo (B) e denotare il vettore con il simbolo $\overrightarrow{AB}$: diremo in questo caso che il **vettore** è **rappresentato come segmento orientato** (o anche: come freccia).



Questo esempio geometrico spiega perché, anche quando il vettore non rappresenta uno spostamento ma un'altra grandezza vettoriale (come ad esempio una forza o un'accelerazione o una velocità), si usa rappresentare il vettore come una freccia uscente dal punto in cui si pensa di applicarlo [3].
Visto però che il punto di applicazione non rientra nella definizione di vettore, si può rappresentare il vettore denotato con $\overrightarrow{AB}$ con qualunque altro segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ che

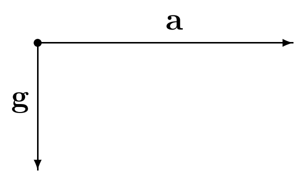
- abbia la stessa lunghezza di $\overrightarrow{AB}$
- sia parallelo ad $\overrightarrow{AB}$
- abbia lo stesso verso di $\overrightarrow{AB}$ (il che significa che $ABPO$ è un parallelogramma).



Questo implica che si possono rappresentare tutti i vettori come frecce uscenti da un unico punto O e (quando serve) identificare ciascuno di essi con il punto di arrivo della freccia.

---

[3] Nel caso in cui non si rappresentino spostamenti, la lunghezza da attribuire alla freccia è in un certo senso arbitraria: l'unico vincolo è che se nella rappresentazione grafica compaiono due (o più) vettori dello stesso tipo (ad esempio due accelerazioni), la lunghezza delle frecce corrispondenti deve essere proporzionale al modulo dei vettori. Ad esempio, se $|\mathbf{a}| = 2\,|\mathbf{g}|$ e $\mathbf{a}$ ha direzione ortogonale a $\mathbf{g}$, i due vettori possono essere rappresentati così:



Prime operazioni sui vettori

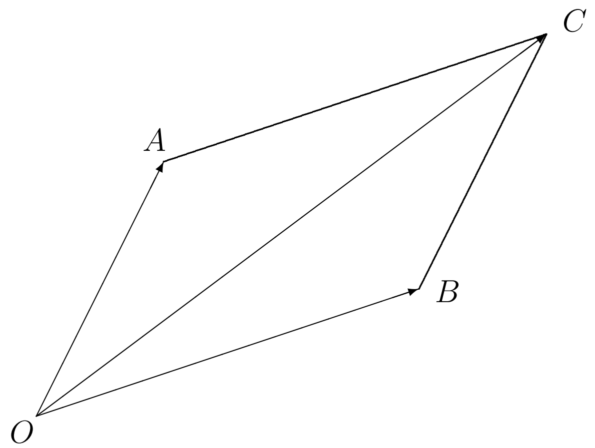
In questo paragrafo consideriamo sempre vettori che rappresentano grandezze dello stesso tipo.

Osservazione 11.3 C'è un solo vettore avente modulo 0: se si cerca di rappresentarlo come freccia uscente da O si vede che anche il secondo estremo coincide con O e quindi a tale vettore non può essere associata una direzione. Chiameremo **vettore nullo** il vettore avente modulo 0 e lo denoteremo con $\mathbf{0}$.

Somma di vettori

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori: la loro somma può essere agevolmente definita pur di rappresentarli come frecce.

Definizione 11.4 Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$, si definisce **somma** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ il vettore $\overrightarrow{OC}$ che ha come punto di arrivo il quarto vertice (C) del parallelogramma avente due lati coincidenti rispettivamente con OA e OB (<u>regola del parallelogramma</u>).

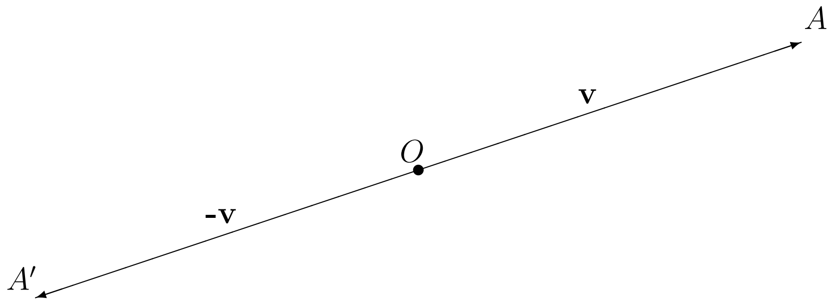


La definizione è ragionevole: se interpretiamo i vettori come spostamenti e teniamo presente che $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{AC}$ rappresentano lo stesso vettore $\mathbf{w}$, si vede che $\overrightarrow{OC}$ è il risultato della somma degli spostamenti da O ad A tramite il vettore $\mathbf{v}$ e da A ad C tramite il vettore $\mathbf{w}$.
D'altra parte, in maniera del tutto analoga, $\overrightarrow{OC}$ è il risultato della somma degli spostamenti da O a B tramite il vettore $\mathbf{w}$ e da B a C tramite il vettore $\mathbf{v}$: questo dice che la somma di vettori è commutativa. Più in generale, per la somma di vettori valgono le seguenti proprietà che permettono di trattare le somme di vettori esattamente come si trattano le somme di numeri reali.

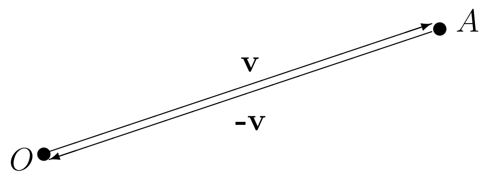
Proprietà

- <u>commutativa</u>: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
- <u>associativa</u>: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- il vettore nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma, cioè per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- per ogni vettore $\mathbf{v}$ esiste un vettore $\mathbf{w}$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Tale vettore viene detto **vettore opposto di v** e denotato con $-\mathbf{v}$.

Se il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato come una freccia $\overrightarrow{OA}$ uscente da O, il vettore $-\mathbf{v}$ è una freccia $\overrightarrow{OA'}$ con la stessa direzione e lo stesso modulo di $\overrightarrow{OA}$ ma verso opposto.



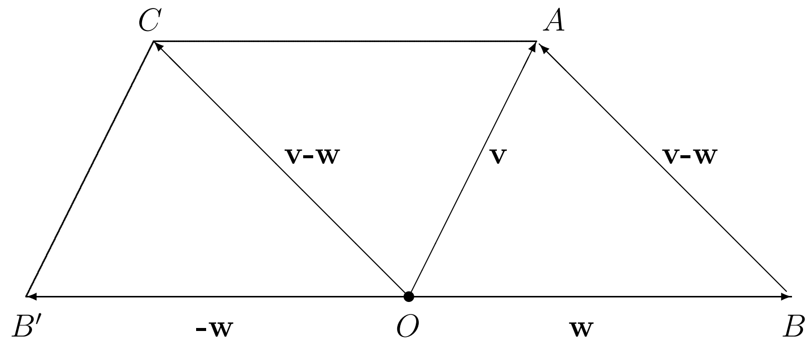
Un'altra possibile rappresentazione di $-\mathbf{v}$ è data dalla freccia $\overrightarrow{AO}$ (punto di arrivo scambiato con quello di partenza; interpretazione: spostandosi da O ad A e di nuovo da A ad O si ottiene uno spostamento nullo).



È allora possibile definire la **differenza di due vettori** come segue.

Definizione 11.5 Per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si definisce $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$ si vede che $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.



Prodotto di un vettore per un numero

Definizione 11.6 Dati un vettore $\mathbf{v}$ e un numero reale s, si definisce **prodotto del vettore v per lo scalare** [4] s (e si indica con $s\mathbf{v}$) il vettore che ha

[4] In fisica le grandezze che possono essere descritte semplicemente attraverso un numero (con unità di misura) sono dette grandezze scalari, per distinguerle da quelle vettoriali. Traccia di questa terminologia resta in questa definizione, in cui il numero viene chiamato "scalare" proprio per sottolineare la diversità della natura dei due oggetti di cui si fa il prodotto.

– modulo uguale al prodotto $|s| \cdot |\mathbf{v}|$

– direzione [5] uguale a quella di $\mathbf{v}$

– verso coincidente con quello di $\mathbf{v}$ se $s > 0$; verso opposto a quello di $\mathbf{v}$ se $s < 0$.

Nella pratica si usa dire che $s\mathbf{v}$ è un multiplo di $\mathbf{v}$ o anche che $s\mathbf{v}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$.

La somma e il prodotto ora definiti sono legati da due

Proprietà distributive

- per ogni scalare s e ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $s\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = s\mathbf{v} + s\mathbf{w}$
- per ogni coppia di scalari s e t e ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $(s + t)\,\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$ [6].

Rappresentazione dei vettori per componenti

Ci sono diversi motivi per passare dalla rappresentazione "geometrica" dei vettori alla loro rappresentazione "analitica": uno è quello di rendere più semplici i conti.

Arriveremo a questa nuova rappresentazione gradualmente. Pensiamo ai vettori come frecce uscenti dal punto O; per semplicità cominciamo a prendere in esame solo i vettori che giacciono in uno stesso piano passante per O.

Caso piano

Nel piano possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico [7] con origine in O.

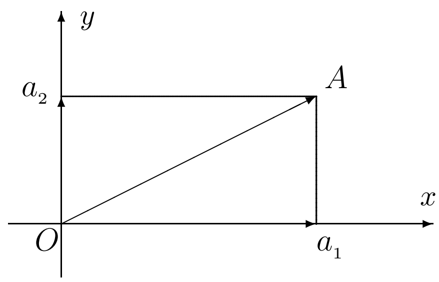
Ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1, a_2); quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla coppia ordinata (a_1, a_2).

---

[5] Si noti che se $\mathbf{v}$ o s sono nulli, il prodotto $s\mathbf{v}$ è il vettore nullo e quindi non ha senso parlare di direzione e verso.

[6] Le proprietà elencate per la somma, queste due proprietà distributive, insieme alle (ovvie) proprietà:
– $s\,(t\mathbf{v}) = (st)\,\mathbf{v}$
– $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
si riassumono dicendo che l'insieme dei vettori con le operazioni di somma e "prodotto vettore per scalare" costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

[7] Monometrico significa che si sceglie la stessa unità di misura su entrambi gli assi. Noi useremo solo sistemi ortogonali monometrici e quindi ci limiteremo a scrivere "sistema di riferimento cartesiano", sottointendendo tutto il resto.



Scriviamo allora $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e chiamiamo i numeri reali a_1 e a_2 **componenti scalari del vettore** (8): più precisamente
a_1 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse x
a_2 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse y.

Definizione 11.7 Quando si assegna il vettore $\mathbf{v}$ del piano tramite la coppia ordinata (a_1, a_2) si dice che **il vettore è rappresentato per componenti**.

A questo punto si possono tradurre analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s date in precedenza.

Proposizione 11.8 *Se* $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ *e* $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ *si ha* (9)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ s\mathbf{v} &= (sa_1, sa_2). \end{aligned}$$

Sappiamo che il vettore v può essere rappresentato oltre che da $\overrightarrow{OA}$, anche da una qualunque altra freccia $\overrightarrow{BC}$, purché $OACB$ sia un parallelogramma. L'enunciato precedente mostra che, se le coordinate del punto B sono (b_1, b_2) e quelle del punto C sono (c_1, c_2), le componenti del vettore v rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{BC}$ sono (10)

$$(c_1 - b_1, c_2 - b_2).$$

---

8) Se nel piano (con riferimento cartesiano ortogonale) si considerano il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e i punti
A_1: proiezione ortogonale di A sull'asse x e A_2: proiezione ortogonale di A sull'asse y,
si vede che $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. I due vettori $\overrightarrow{OA_1}$ e $\overrightarrow{OA_2}$ vengono talora detti le **componenti vettoriali** di $\mathbf{v}$. Ovviamente la nozione di componente vettoriale è correlata con quella di componente scalare, poiché $\overrightarrow{OA_1} = (a_1, 0)$ e $\overrightarrow{OA_2} = (0, a_2)$, ma attenzione a non confonderle!

9) Per convincerci che queste formule sono corrette osserviamo che, con la simbologia della precedente nota si ha: $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}$ e quindi

$$s\mathbf{v} = s\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) = s\left(\overrightarrow{OA_1}\right) + s\left(\overrightarrow{OA_2}\right);$$

inoltre la somma può essere fatta separatamente lungo la direzione dei due assi, poiché

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}\right) = \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2}\right).$$

10) Infatti, visto che $OACB$ è un parallelogramma, risulta $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, cioè $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ e quindi, applicando la Proposizione 11.8,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} + (-1)\,\overrightarrow{OB} = (c_1, c_2) + (-1)\,(b_1, b_2) = (c_1, c_2) + (-b_1, -b_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2).$$

Se il vettore è rappresentato attraverso le sue componenti, cioè se $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$, il suo modulo si calcola utilizzando il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Osservazione 11.9 Applicando la proposizione 11.8 si vede che per ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ si ha

$$\mathbf{v} = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1\,(1, 0) + a_2\,(0, 1).$$

I due vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ hanno entrambi modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei due assi x e y: per questo verranno detti **versori fondamentali**. Come in Fisica porremo

$$\mathbf{i} = (1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{j} = (0, 1).$$

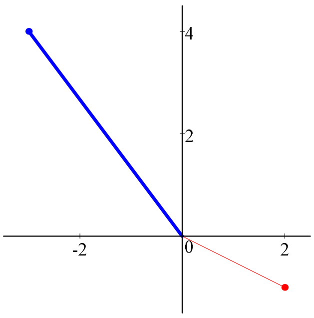
Quindi ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$ del piano (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

e si dirà in questo caso che **v è espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali**. Si noti che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $a_1 = a_2 = 0$.

Esempi 11.10 [11]

1) Rappresentiamo come frecce uscenti dall'origine O del piano i vettori $\mathbf{v} = (2, -1)$ e $\mathbf{w} = (-3, 4)$.

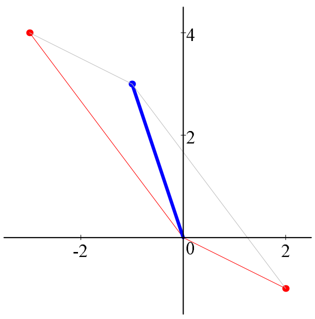


($\mathbf{v}$ sottile e rosso, $\mathbf{w}$ spesso e blu)

2) Sommiamo i vettori dell'esempio (1) usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2, -1) + (-3, 4) = (2 - 3, -1 + 4) = (-1, 3)$$

3) Sommiamo i vettori dell'esempio (1) usando la rappresentazione dei vettori come frecce uscenti dall'origine O del piano e la regola del parallelogramma.



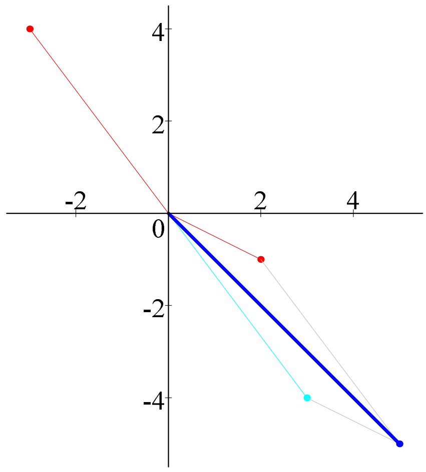
($\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sottili e rossi, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ spesso e blu)

[11]) Di qui in avanti, per motivi tecnici, la freccia nel disegno dei vettori sarà indicata con un pallino.

4) Calcoliamo $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=(2,-1)-(-3,4)=(2-(-3)\,,-1-4)=(5,-5)$$

5) Calcoliamo $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ usando la rappresentazione dei vettori come frecce uscenti dall'origine O del piano.



($\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sottili e rossi,
$-\mathbf{w}$ sottile e azzurro,
$\mathbf{v}-\mathbf{w}$ spesso e blu)

6) Calcoliamo $\frac{2}{3}\mathbf{w}-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\tfrac{2}{3}\mathbf{w}-\tfrac{1}{2}\mathbf{v}=\tfrac{2}{3}(-3,4)-\tfrac{1}{2}(2,-1)=\left(-\tfrac{6}{3},\tfrac{8}{3}\right)-\left(\tfrac{2}{2},-\tfrac{1}{2}\right)=\left(-2-1,\tfrac{8}{3}+\tfrac{1}{2}\right)=\left(-3,\tfrac{17}{6}\right).$$

7) Calcoliamo $\frac{2}{3}\mathbf{w}-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ esprimendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come combinazione lineare dei versori fondamentali.

$$\mathbf{v}=(2,-1)=2\mathbf{i}-\mathbf{j}\qquad\qquad \mathbf{w}=(-3,4)=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$$

$$\tfrac{2}{3}\mathbf{w}-\tfrac{1}{2}\mathbf{v}=\tfrac{2}{3}(-3\mathbf{i}+4\mathbf{j})-\tfrac{1}{2}(2\mathbf{i}-\mathbf{j})=-\tfrac{6}{3}\mathbf{i}+\tfrac{8}{3}\mathbf{j}-\tfrac{2}{2}\mathbf{i}+\tfrac{1}{2}\mathbf{j}=(-2-1)\,\mathbf{i}+\left(\tfrac{8}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\mathbf{j}=-\,3\mathbf{i}+\tfrac{17}{6}\mathbf{j}.$$

Caso spaziale

Nello spazio possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con orientamento destrorso [12] avente origine nel punto O in cui si pensano applicati tutti i vettori.
Ogni vettore $\mathbf{v}=\overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1,a_2,a_3): quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla terna ordinata (a_1,a_2,a_3).
Scriviamo allora $\mathbf{v}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ e diciamo che il vettore **v è rappresentato per componenti**, poiché (anche nel caso spaziale) chiamiamo i numeri reali a_1, a_2 e a_3 **componenti scalari del vettore**: più precisamente
a_1 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse x
a_2 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse y
a_3 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse z.

[12] Questo significa che i tre assi cartesiani ortogonali x, y, z sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra. O, se si preferisce, che se disegnamo su un foglio gli assi x e y nella posizione e con l'orientamento consueti, l'asse z deve essere ortogonale al foglio e il semiasse positivo deve essere quello al di sopra del foglio.

Traducendo analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s si ha la

Proposizione 11.11 *Se* $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ *si ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ s\mathbf{v} &= (sa_1, sa_2, sa_3). \end{aligned}$$

Se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, il suo modulo si calcola utilizzando (due volte) il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

Osservazione 11.12 Applicando la proposizione 11.11 si vede che per ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ si ha

$$\mathbf{v} = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1 (1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) + a_3 (0, 0, 1).$$

I tre vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ hanno modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei tre assi x, y e z: per questo verranno detti **versori fondamentali**. Come in Fisica porremo [13)]

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Quindi ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$ dello spazio (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

e si dirà in questo caso che **v è espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali**. Si noti che, nello spazio, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Prodotto scalare di due vettori

Torniamo a considerare vettori del piano o dello spazio ordinario. Due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, pensati come segmenti orientati applicati in uno stesso punto, individuano due angoli, uno convesso (cioè <u>non</u> più ampio di un angolo piatto) ed uno concavo: ma quando ci si riferisce all'angolo compreso tra i due vettori si intende parlare dell'<u>angolo convesso</u>. Inoltre non si distingue tra l'angolo compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e quello compreso tra $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$: si dirà perciò che tale angolo è <u>non orientato</u>. Denotiamo con θ la sua misura: se la misura è in radianti, risulta $\theta \in [0, \pi]$ mentre, se la misura è in gradi, θ può variare tra 0° e 180°.

---

13) Attenzione: nel piano, $\mathbf{i}$ denota il vettore di componenti $(1, 0)$; nello spazio denota invece un vettore con tre componenti! Si tratta comunque del vettore di modulo 1 che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x. Analogamente $\mathbf{j}$ indica in ogni situazione il vettore di modulo 1 che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse y.

Definizione 11.13 Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, chiamiamo **prodotto scalare** (o prodotto interno) dei due vettori il numero reale $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta$. Scriveremo

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta.$$

Proprietà del prodotto scalare

- commutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$;
- distributiva: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$;
- di omogeneità: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(s\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet (s\mathbf{w}) = s(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}).$$

Inoltre è chiaro che

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cos 0 = |\mathbf{v}|^2$$

e che $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0$ se e solo se uno dei tre fattori è nullo, cioè

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0 \iff |\mathbf{v}| = 0 \text{ oppure } |\mathbf{w}| = 0 \text{ oppure } \cos\theta = 0 \iff$$
$$\iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ oppure } \theta = \pi/2$$

Dunque

Proposizione 11.14 *Il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.*

In particolare sono a due a due ortogonali i versori fondamentali e quindi

$$\boxed{\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0.}$$

Per calcolare il prodotto scalare attraverso le componenti scalari dei vettori osserviamo che, se $\mathbf{v} = (a_1, a_2) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, applicando la proprietà distributiva e quella di omogeneità si trova

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \bullet (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j} \bullet \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \bullet \mathbf{j}$$

e, tenendo conto che i due versori fondamentali sono ortogonali e che $\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$ e $\mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, si ricava

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Analogamente se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si trova

$$\boxed{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Osservazione 11.15 Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori sono rappresentati per componenti. Allora il prodotto scalare può essere utilizzato per:

1) individuare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra i due.

Ad esempio, se $\mathbf{v} = (4, -3)$ e $\mathbf{w} = (5, 12)$, si ha

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 12 = -16$$

e d'altro lato, usando la definizione,

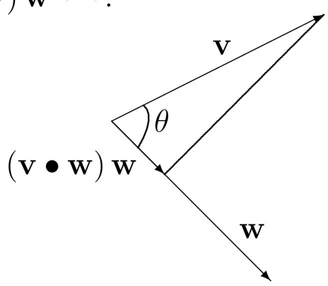
$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} \cos\theta = 5 \cdot 13 \cos\theta$$

e, uguagliando, $\cos\theta = -\dfrac{16}{65}$, cioè $\theta = \arccos\left(-\dfrac{16}{65}\right) \simeq 1.819$ radianti.

In generale, per risolvere il problema di trovare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si può usare la formula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}\right).$$

2) determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{w}$ (senza calcolare l'angolo tra i due vettori). Se $\mathbf{w}$ è un versore [14], tale proiezione è data da $(|\mathbf{v}| \cos\theta)\, \mathbf{w} = (|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta)\, \mathbf{w} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\, \mathbf{w}$ [15].



Ad esempio, la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ nella direzione di $\mathbf{w} = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ è il vettore $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\, \mathbf{w} = \left(0 - \frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right) \mathbf{w} = -\frac{11}{5} \mathbf{w} = (0, \frac{44}{25}, -\frac{33}{25})$.

Esempi 11.16

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ del piano ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (2, -1)$.

  Esso deve verificare la condizione $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$; quindi, se $\mathbf{u} = (x, y)$, deve risultare $2x - y = 0$ cioè $y = 2x$: dunque ogni vettore $\mathbf{u} = (x, 2x)$, con x numero reale qualunque, verifica la condizione. Osserviamo che tale vettore si può anche riscrivere $\mathbf{u} = x\,(1, 2)$: quindi le soluzioni sono infinite, ma sono tutte multiple [16] del vettore (soluzione particolare) $(1, 2)$.

[14] Se $\mathbf{w}$ non è un versore, basta dividerlo per il suo modulo per ottenere un versore.

[15] In particolare se $\mathbf{w} = \mathbf{i}$ si trova che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione dell'asse x è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{i})\, \mathbf{i}$ (e analogamente se $\mathbf{w} = \mathbf{j}$ oppure $\mathbf{w} = \mathbf{k}$).

[16] Si poteva immaginare che si dovesse arrivare a una conclusione di questo genere, poiché il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ individua una retta (quella passante per O ed A) e nel piano c'è una sola direzione ortogonale ad una retta: quindi i vettori soluzione possono differire solo per il modulo o per il verso.

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ dello spazio che risulta contemporaneamente ortogonale ai vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{w} = (0, 2, 1)$.

  Esso deve verificare le condizioni $\begin{cases} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = 0 \end{cases}$; quindi, se $\mathbf{u} = (x, y, z)$, deve risultare

  $$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x = z \\ z = -2y \end{cases} :$$

  dunque ogni vettore $\mathbf{u} = (-2y, y, -2y)$, con y numero reale qualunque, verifica le condizioni. Osserviamo che tale vettore si può anche riscrivere $\mathbf{u} = y\,(-2, 1, -2)$: quindi le soluzioni sono infinite, ma sono tutte multiple (17) del vettore (soluzione particolare) $(-2, 1, -2)$.

- Cerchiamo i versori del piano che formano un angolo di $\pi/3$ con il versore $\mathbf{i}$.

  Essi sono i vettori della forma $x\mathbf{i}+y\mathbf{j} = \mathbf{v}$ tali che

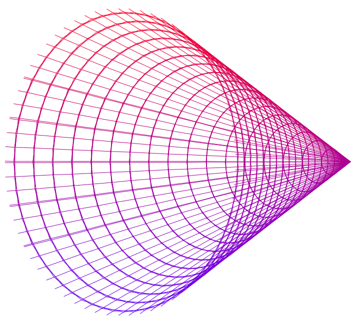
  $$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}|} = \cos(\pi/3) \\ |\mathbf{v}| = 1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) \bullet \mathbf{i} = 1/2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x = 1/2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases}$$

  Ci sono due vettori (18) di questo tipo: $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

- Se cerchiamo i versori dello spazio che verificano la stessa condizione, troviamo infiniti vettori: infatti sono tutti i vettori della forma $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = \mathbf{v}$ tali che

  $$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}|} = \cos(\pi/3) \\ |\mathbf{v}| = 1 \end{cases} \quad \text{cioè (come sopra)} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y^2 + z^2 = 3/4 \end{cases}$$

  In figura i segmenti rappresentano alcuni dei vettori soluzione (pensati come frecce uscenti da un unico punto O): si vede che essi stanno su un cono che ha l'asse x come asse di rotazione.

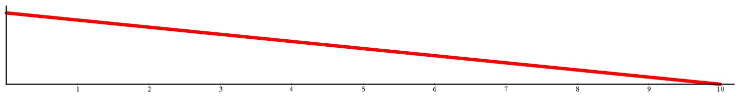


---

(17) Si poteva immaginare che si dovesse arrivare a una conclusione di questo genere, poiché i due vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$ individuano un piano (quello passante per O, A e B) e nello spazio c'è una sola direzione ortogonale ad un piano: quindi i vettori soluzione possono differire solo per il modulo o per il verso.

(18) Ciò conferma che l'angolo che si individua con il prodotto scalare non è orientato: in caso contrario si troverebbe $\widehat{\mathbf{iv}} = \pi/3$, $\widehat{\mathbf{iw}} = -\pi/3$.

- Il lavoro di una forza $\mathbf{F}$ che sposta il suo punto di applicazione da un punto A a un punto B dipende oltre che dall'intensità della forza e dallo spostamento anche dall'angolo θ tra il vettore $\overrightarrow{AB}$ che rappresenta lo spostamento e quello che rappresenta la forza, secondo la formula: $L = |\mathbf{F}| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\theta$, cioè $L = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Allora il lavoro della forza peso su una biglia di massa $5 \cdot 10^{-2}\ kg$ che scorre lungo la rotaia inclinata rappresentata in figura (che ha una pendenza del 10%)



(unità di misura: 1m)

è pari a $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, ove $\mathbf{F}$ è la forza peso: $\mathbf{F} = (5 \cdot 10^{-2} kg) \cdot (9.8 m/s^2)\, \mathbf{j}$ e $\overrightarrow{AB} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j}$, cioè

$$L = (10 \cdot 0 + 0.49 \cdot 1)\, N = 0.49 N.$$

Prodotto vettoriale di due vettori

Nello spazio ordinario (e solo in esso!) è possibile definire un altro prodotto tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Definizione 11.17 Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dello spazio vettoriale di dimensione 3, chiamiamo **prodotto vettoriale** di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ che ha

- per modulo il prodotto $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \sin\theta$, ove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo convesso compreso tra i due vettori
- per direzione quella ortogonale al piano individuato dai due vettori
- per verso quello che rende destrorsa [19] la terna ordinata di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

Notiamo che il modulo $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha due lati coincidenti con i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e quindi $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = 0$ se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori hanno la stessa direzione.
Dunque

Proposizione 11.18 *Il prodotto vettoriale di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione.*

---

[19] Questo significa che i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra. O, se si preferisce: quando pensiamo i tre vettori come segmenti orientati applicati in uno stesso punto e disegnamo su un foglio i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in modo che $\mathbf{w}$ segua $\mathbf{v}$ nel verso antiorario, il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ risulta ortogonale al foglio e al di sopra di esso.

Proprietà del prodotto vettoriale

- anticommutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$
- distributive: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha
$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u};$$
- di omogeneità: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha
$$(s\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (s\mathbf{w}) = s\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w});$$
- di annullamento [20]: per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (vettore nullo).

Ricordando che $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono i versori aventi la direzione e il verso degli assi x, y e z risulta chiaro che

$$\boxed{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},}$$

e per la proprietà anticommutativa

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Utilizzando queste proprietà si verifica che se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si può formulare il prodotto vettoriale in termini di componenti scalari come segue [21]:

$$\boxed{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}.}$$

Si vede che la prima componente del prodotto vettoriale è costruita solo con le seconde e le terze componenti dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (e analogamente per le altre componenti).
Per ricordarsi questa formula è comodo far uso della terminologia dei determinanti (vedi Argomento 12). Si osserva che $a_2b_3 - a_3b_2$ è proprio il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, che viene rappresentato brevemente come $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Proseguendo allo stesso modo sulle altre componenti si trova:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

---

[20] Si tratta solo di un caso particolare, anche se importante, dell'enunciato della proposizione 11.18.

[21] Infatti per le proprietà distributive si ha
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \wedge \mathbf{w} = a_1\mathbf{i} \wedge \mathbf{w} + a_2\mathbf{j} \wedge \mathbf{w} + a_3\mathbf{k} \wedge \mathbf{w} =$
$= a_1\mathbf{i} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) =$
$= (a_1\mathbf{i} \wedge b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \wedge b_2\mathbf{j} + a_1\mathbf{i} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{j} \wedge b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \wedge b_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{j} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{k} \wedge b_1\mathbf{i} + a_3\mathbf{k} \wedge b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \wedge b_3\mathbf{k}).$
Per la proprietà di annullamento $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$.
Quindi utilizzando la proprietà di omogeneità si ottiene:
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1b_2\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + (a_2b_1\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + a_2b_3\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + (a_3b_1\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}),$
cioè, per la proprietà anticommutativa,
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} =$
$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}.$

Si compatta ancor di più questa formula scrivendo

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

che si può leggere dicendo che il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ si ottiene formalmente come il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 (a elementi vettoriali e numerici) la cui prima riga è formata dai versori fondamentali, la seconda dal vettore delle componenti di $\mathbf{v}$, la terza dal vettore delle componenti di $\mathbf{w}$.

Esempi 11.19

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ dello spazio che risulta contemporaneamente ortogonale [22] ai vettori $\mathbf{v}=(1,0,-1)$ e $\mathbf{w}=(0,2,1)$. Visto che per definizione il prodotto vettoriale ha direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori, sicuramente il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ verifica la condizione. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (2,-1,2).$$

  Il vettore evidenziato come soluzione particolare negli esempi 11.16 è quindi $-\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

- Consideriamo una forza $\mathbf{F}$ applicata in un punto A: il momento di $\mathbf{F}$ rispetto ad un altro punto O è proprio $\mathbf{F} \wedge \overrightarrow{OA}$.

Attenzione. Al contrario del prodotto scalare, il prodotto vettoriale può essere applicato ripetutamente visto che il risultato del prodotto vettoriale è ancora un vettore. Ma per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa. Ad esempio

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \qquad \text{mentre} \qquad (\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Prodotto misto

Anche questo prodotto è definito solo nello spazio tridimensionale e coinvolge tre vettori.

Definizione 11.20 Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dello spazio vettoriale di dimensione 3, chiamiamo **prodotto misto** di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

Il prodotto misto ha un significato geometrico: il suo modulo $|\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})|$ rappresenta il volume del parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{OC}$ [23].

[22] Questo problema è già stato affrontato in precedenza utilizzando solo la definizione di ortogonalità (e tale metodo risulta valido in spazi di qualunque dimensione).

[23] Infatti, la faccia individuata da $\overrightarrow{OA}$ e da $\overrightarrow{OB}$ ha area $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$. Inoltre $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è ortogonale al piano individuato da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e quindi ha la stessa direzione dell'altezza del parallelepipedo relativa a tale faccia. Dunque detto θ l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, tale altezza vale: $|\mathbf{u}| \cdot |\cos\theta|$ e quindi il volume del parallelepipedo è

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\cos\theta| = ||\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos\theta| = |\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})|.$$

Questo dice che, salvo eventualmente per il segno, è indifferente considerare, invece di $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$, uno degli altri 5 prodotti misti che si possono ottenere permutando i tre vettori:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) & \mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) \\ \mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}) & \mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) & \mathbf{w}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) \end{array}$$

Inoltre dice che il prodotto misto si annulla se e solo se uno dei tre vettori è nullo oppure i tre spigoli sono complanari, cioè O, A, B, C stanno sullo stesso piano.

In termini di componenti, se $\mathbf{u}=(c_1,c_2,c_3)=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, utilizzando le formule viste sopra per i prodotti scalare e vettoriale, si trova

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1) \quad ^{(24)}$$

o anche (vedi Argomento 12)

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Spunti per una generalizzazione della definizione di vettore

Tra i motivi per passare dalla rappresentazione "geometrica" dei vettori alla loro rappresentazione "analitica" c'è il fatto che la rappresentazione mediante componenti facilita la ricerca di generalizzazioni all'interno delle quali si può capire in che senso il terzo problema proposto nell'introduzione sia un problema di natura vettoriale.

Abbiamo visto che i vettori nel piano possono essere rappresentati con coppie ordinate, nello spazio con terne ordinate e che le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare possono essere facilmente espresse per componenti. È allora naturale chiamare vettore ogni n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n), \qquad \text{ove } n\geq 1$$

e definire nell'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali l'operazione di somma ponendo, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n)$ e $\mathbf{w}=(b_1,b_2,...,b_n)$,

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

e l'operazione di prodotto per uno scalare $s\in\mathbb{R}$ ponendo

$$s\mathbf{v}=(sa_1,sa_2,...,sa_n).$$

Per le operazioni così definite valgono le proprietà già enunciate per i vettori applicati in un punto. $\mathbb{R}^n$ con queste operazioni viene detto **spazio vettoriale reale n-dimensionale** o anche spazio dei vettori reali a n componenti.
Sempre generalizzando quanto visto nei casi $n=2$ ed $n=3$, dato $\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n)$ in $\mathbb{R}^n$, si può definire il suo modulo ponendo

[24] Utilizzando questa formula si può verificare che $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})=\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$, mentre gli altri tre prodotti misti hanno segno opposto, per l'anticommutatività del prodotto vettoriale).

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + ... + (a_n)^2}.$$

Inoltre, si è visto come in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare può essere espresso attraverso le sue componenti; generalizzando si estende il concetto di prodotto scalare al caso dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$, ponendo, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, ..., b_n)$,

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Per il prodotto così definito valgono le proprietà del prodotto scalare. Si trova che $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|$ e questo motiva la definizione di angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come $\arccos \frac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}$; in particolare due vettori non nulli saranno detti ortogonali se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Torniamo, per finire, al terzo problema proposto nell'introduzione. Per descrivere completamente la situazione bisogna conoscere (oltre alla forza frenante che si era supposta di $1N$) anche la massa m del corpo, la velocità v_0 all'istante $t = 0$ in cui ha inizio la frenata e la posizione s_0 all'istante $t = 0$. Dunque l'insieme di dati necessari per risolvere il problema può essere descritto da una quaterna $(-1, m, v_0, s_0)$ di numeri reali (il primo dei quali negativo, poiché la forza frenante agisce in verso opposto a quello del moto), cioè da un vettore di $\mathbb{R}^4$, anche se val la pena di osservare che le grandezze contenute nelle quattro componenti non sono omogenee e quindi sono rappresentate rispetto ad unità di misura diverse.