Lezione 8

Suggerimenti e soluzioni

SUGGERIMENTI

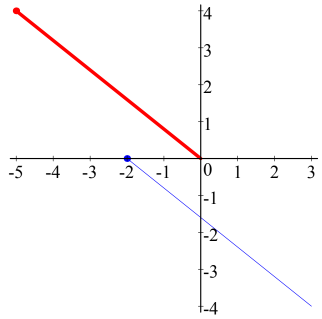
ESERCIZIO 8.6) Si ricordi che dire che $\widehat{xs} = -\pi/3$ significa che la retta s forma con l'asse x un angolo di $\pi/3$ in verso orario.

ESERCIZIO 8.11) Se $\mathbf{w}$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$ il vettore componente di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w}$.

ESERCIZIO 8.28) Schematizzando le due rive del fiume come due rette parallele, il tragitto minimo è quello ortogonale alle due rette.

SOLUZIONI [1]

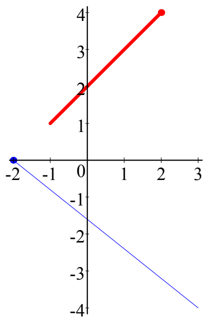
Sol. Ex. 8.1)



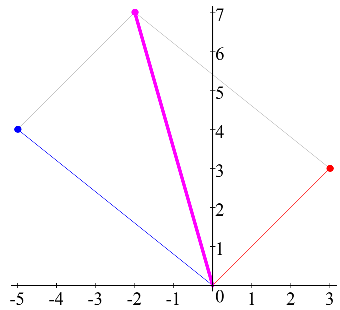
$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu, $\overrightarrow{OP}$ spesso e rosso.

$\overrightarrow{OP} = (-2-3, 0-(-4)) = (-5,4)$

Sol. Ex. 8.2)



A sinistra sono rappresentati i vettori da sommare.
A destra sono rappresentati i vettori ad essi equivalenti applicati nell'origine e se ne calcola la somma con la regola del parallelogramma.



$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu; $\overrightarrow{CD}$ spesso e rosso

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ spesso e violetto

$\overrightarrow{AB} = (-5,4)$; $\overrightarrow{CD} = (3,3)$: quindi la somma per componenti è $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-2,7)$.

Sol. Ex. 8.3)
C). Infatti $\overrightarrow{AB} = (4-1, 7-3) = (3,4)$ e quindi $-2\overrightarrow{AB} = (-6,-8)$. Si ha
$\overrightarrow{AC} = (-2-1, -1-3) = (-3,-4) = -\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CD} = (6-(-2), 5-(-1)) = (8,6)$
$\overrightarrow{BC} = (-2-4, -1-7) = (-6,-8) = -2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

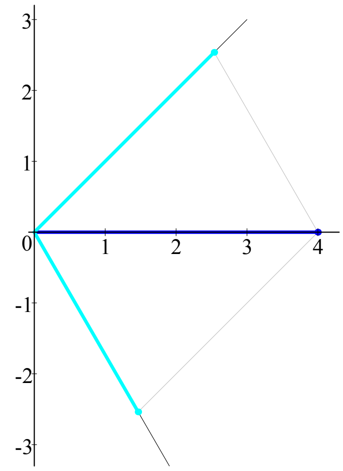
Sol. Ex. 8.4)
A). Infatti $\overrightarrow{CD} = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2) = (2(b_1 - a_1), 2(b_2 - a_2)) = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2\overrightarrow{AB}$

Sol. Ex. 8.5)
C). Infatti $\overrightarrow{AC} = (2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2)$ mentre $2\overrightarrow{AB} = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2)$: quindi i due vettori sono uguali se e solo se $2a_1 = a_1$ e $2a_2 = a_2$ cioè se e solo se $a_1 = a_2 = 0$.

[1] Anche in questi svolgimenti, come già nella seconda parte della teoria, la freccia che denota il verso del vettore è rappresentata con un pallino (per motivi puramente tecnici).

Sol. Ex. 8.6)

Per comodità disegnamo $\mathbf{v}$ come il vettore $\overrightarrow{OP} = (4, 0)$ e pensiamo le rette r ed s passanti per O: quindi anche i vettori componenti di $\overrightarrow{OP}$ saranno rappresentati come frecce $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ uscenti da O.



Quanto al modulo di $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ osserviamo che:

R appartiene alla retta di equazione $y = x$ e quindi ha coordinate (a, a)

S appartiene alla retta di equazione $y = -\sqrt{3}x$ e quindi ha coordinate $\left(b, -\sqrt{3}b\right)$:

dunque $\quad \overrightarrow{OR} = (a, a) \quad$ e $\quad \overrightarrow{OS} = \left(b, -\sqrt{3}b\right)$

Ora $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP}$ se e solo se $(a, a) + \left(b, -\sqrt{3}b\right) = (4, 0)$

cioè per $a = 6 - 2\sqrt{3}$ e $b = 2\sqrt{3} - 2$.

Dunque $\left|\overrightarrow{OR}\right| = |(a, a)| = |a|\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

e $\qquad \left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|\left(b, -\sqrt{3}b\right)\right| = |b|\sqrt{4} = 4\sqrt{3} - 4.$

Attenzione: qui non è lecito usare il prodotto scalare per trovare i vettori componenti Infatti tali vettori sono ottenuti scomponendo $\mathbf{v}$ con la regola del parallelogramma, che qui non è un rettangolo, poiché s non è ortogonale a r. Invece con il prodotto scalare si può solo trovare la proiezione ortogonale di un vettore su una retta!

Sol. Ex. 8.7)

Se $B = (x, y, z)$, si deve avere $\overrightarrow{AB} = (x - 1, y, z - 2) = (4, -2, 1)$: uguagliando le componenti si trova $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$; dunque $B = (5, -2, 3)$.

Sol. Ex. 8.8)

Sì: $(1, 2, 1) - (2, 1, -1) - (-1, 1, 2) = (1 - 2 + 1, 2 - 1 - 1, 1 + 1 - 2) = (0, 0, 0)$. Si può riscrivere l'uguaglianza come $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, quindi il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ sta nel piano individuato da $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$.

Sol. Ex. 8.9)

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 1) - (-1, 1, 3) = (1 + 1, 3 - 1, 1 - 3) = (2, 2, -2)$. Quindi $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.

Sol. Ex. 8.10)

B). Infatti $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4) = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -7$. Attenzione: le risposte **A)** e **C)** sono da escludere a priori, poiché <u>il prodotto scalare è un numero, non un vettore</u>!

Sol. Ex. 8.11)

$\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$. Dunque il vettore componente di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w} = \left(-1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}\right)\mathbf{w} = \frac{2}{5}\mathbf{w} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{25}, \frac{6}{25}$.

Sol. Ex. 8.12)

B). Infatti da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 1 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4+5+1} \cdot \sqrt{1+5+4}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$. Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dai due vettori è $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$.

Sol. Ex. 8.13)
Da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2}$.

Similmente da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta'$ si ricava $\cos\theta' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2}$.

Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dalle due coppie di vettori è lo stesso e vale $\pi/3$.

Sol. Ex. 8.14)
Se $\mathbf{w} = (x, y, z)$, si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = x + y = 0$ e $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 2y - z = 0$. Dunque, un vettore soluzione è $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$. Ci sono però infiniti vettori con questa proprietà, quelli della forma $(-t, t, 2t)$, con t reale non nullo.

Sol. Ex. 8.15)
C). Infatti $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1) = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, 7)$. Attenzione: le risposte **B)** e **D)** sono da escludere a priori, poiché il prodotto vettoriale è un vettore, non un numero!

Sol. Ex. 8.16)
$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere proporzionali (ciò non esclude che uno o entrambi siano nulli). Infatti

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \iff \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \iff 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

e il prodotto vettoriale si annulla se e solo se i due vettori sono proporzionali.

Sol. Ex. 8.17)
Invece di calcolare direttamente i due prodotti vettoriali, usiamo le proprietà di tale prodotto: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \iff \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \iff \mathbf{u}$ e $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ hanno la stessa direzione. Risulta $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1, 2, -1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}$. Quindi la risposta è affermativa

Sol. Ex. 8.18)
Si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (h, -1, h) \bullet (2 - h, 1, 0) = 0$, cioè $h(2 - h) - 1 = 0$, che ha la sola soluzione $h = 1$. Per tale valore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 2)$.

Sol. Ex. 8.19)
Si può procedere come nell'esercizio 8.14. Oppure: un vettore contemporaneamente ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è proporzionale a $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (2, 1, -4) \wedge (3, -2, 1) = (-7, -14, -7) = -7(1, 2, 1)$.
Se h è un numero reale non nullo, il modulo $|h(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})| = |-7h(1, 2, 1)| = 7|h| \cdot \sqrt{1 + 4 + 1} = 7\sqrt{6}|h|$ vale 1 se e solo se $h = 1/7\sqrt{6}$ o $h = -1/7\sqrt{6}$.
Ci sono dunque due possibili soluzioni: $\left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)$ e $\left(-1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\right)$.

Sol. Ex. 8.20)
I vettori sono quelli dell'esercizio 8.17. Poiché $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, c'è un vettore che è ortogonale a tutti e tre i vettori e quindi essi sono complanari. Un altro modo di procedere è quello di chiedersi se $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = 0$:

$$((-2, -4, 2) \wedge (2, 1, 1)) \bullet (1, -1, 2) = (-6, 6, 6) \bullet (1, -1, 2) = -6 + 6 + 12 = 0.$$

Sol. Ex. 8.21)
$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere complanari (ciò non esclude che qualcuno sia nullo). Infatti
$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}) \Longleftrightarrow \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet(-\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) \Longleftrightarrow \mathbf{u}\bullet(2\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{0}$
e il prodotto misto si annulla se e solo se i tre vettori sono complanari.

Sol. Ex. 8.22)
Il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ o è nullo oppure, per definizione, è ortogonale a $\mathbf{u}$: in entrambi i casi il loro prodotto scalare è nullo. Invece, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono proporzionali (e, in particolare, nessuno dei due è nullo), il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ non è nullo e quindi non può essere proporzionale a $\mathbf{u}$ avendo direzione ad esso ortogonale: quindi il vettore $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ non può essere nullo.

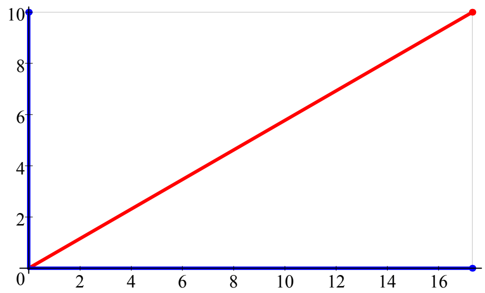
Sol. Ex. 8.23)
Usando le proprietà del prodotto vettoriale si ha
$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u})=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{0}$,
$(\mathbf{u}+h\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
Come conseguenza della prima si ha $(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u}))\bullet\mathbf{w}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$.
Invece, usando le proprietà dei prodotti scalare e vettoriale si ha
$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet(\mathbf{w}+h\mathbf{u})=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h\,(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{u}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h\cdot 0$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{u}$.
Queste proprietà hanno ben noti corrispettivi geometrici: l'area di un parallelogramma non varia facendo slittare un lato, se la distanza dal lato opposto rimane costante; similmente il volume di un parallelepipedo non varia facendo slittare una faccia, se la distanza dalla faccia opposta rimane costante.

Sol. Ex. 8.24)
Solo la **B)** che rappresenta il prodotto scalare di due vettori. Invece:
in **A)** $\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ e un numero,
in **C)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$,
in **D)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto scalare tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$.

Sol. Ex. 8.25)
La **B)** e la **C)**, mentre la **A)** non ha senso poiché il prodotto vettoriale non è associativo e quindi non si possono "togliere le parentesi". Notiamo tra l'altro che, visto che $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\bullet\mathbf{b}$, si ha:
$(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}))\bullet\mathbf{u}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{u})\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{0}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=0$,
mentre non è detto che $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$ sia nullo: ad esempio per $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ e $\mathbf{v}=\mathbf{w}=\mathbf{j}$ si ha
$((\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i}=(\mathbf{k}\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i}=-\mathbf{i}\bullet\mathbf{i}=-1$.

Applicazioni fisiche

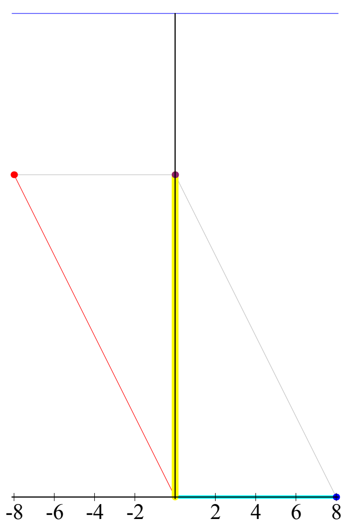
Sol. Ex. 8.26)
Il problema assegna il modulo della forza $20N$, la sua direzione (inclinata di 30° rispetto al piano orizzontale) e il verso (dalla slitta alla renna) e vuole conoscere il vettore componente orizzontale e il vettore componente verticale. Possiamo schematizzare il problema come in figura



ove si pensa la slitta nell'origine del sistema di riferimento. Il vettore può essere rappresentato per componenti come $(20\cos 30°, 20\sin 30°) =$
$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 20, \frac{1}{2}\cdot 20\right) = \left(10\sqrt{3}, 10\right)$.
Allora la componente orizzontale (che provoca il moto) è di $10\sqrt{3}N$ e quella verticale (che tende a sollevare la slitta) è di $10N$.

Sol. Ex. 8.27)
Il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento (orizzontale) di $16m$: in termini di componenti basta fare il prodotto $\left(10\sqrt{3}, 10\right) \bullet (16, 0) = 160\sqrt{3}J$ (essendo $1J = 1N \cdot 1m$). Oppure secondo la definizione di prodotto scalare: $(20N) \cdot (16m) \cdot \cos 30° = 160\sqrt{3}J$

Sol. Ex. 8.28)



Rappresentiamo una riva come l'asse x e l'altra come una retta ad esso parallela e pensiamo che il battello parta dall'origine: l'obiettivo è di fargli mantenere una traiettoria ortogonale alle due rive e perché questo succeda la velocità che si ottiene componendo la velocità del fiume con quella del battello deve essere diretta come l'asse y: ciò è possibile solo se la componente orizzontale della velocità del battello è opposta a quella del fiume.
Riportando i vettori velocità come in figura, si vede che la velocità risultante e la velocità del fiume individuano un triangolo rettangolo con il cateto orizzontale ($8km/h$) che è metà dell'ipotenusa ($16km/h$): quindi l'angolo compreso tra tale cateto e l'ipotenusa è di $60° = \arccos\frac{1}{2}$.
Attenzione però: l'angolo tra il vettore velocità del fiume e il vettore velocità del battello è di $120°$.

È possibile anche ottenere questo risultato lavorando per componenti: denotiamo con (a, b) il vettore velocità del battello e con $(8, 0)$ il vettore velocità del fiume (l'unità di misura è per le componenti di entrambi i vettori: km/h): allora $(a, b) + (8, 0)$ è diretto come l'asse y, cioè ha la prima componente nulla se e solo se $a = -8$ e un vettore $(-8, b)$ di modulo 16 forma con $(8, 0)$ un angolo tale che il suo coseno vale: $\frac{(-8,b)\bullet(8,0)}{16\cdot 8} = -\frac{1}{2}$ cioè un angolo di $120°$.
Si nota che questa seconda maniera di procedere permette di arrivare al risultato anche con un'analisi del modello fisico molto ridotta e sostanzialmente senza il supporto di disegni.