Argomento 3s
Limiti di successioni

Una **successione** $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una funzione definita sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali a valori reali: essa verrà nel seguito indicata più brevemente con $\{a_n\}$. a_n è detto **termine generale** della successione.
Poiché l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$, ha senso chiedersi se una successione ha limite ed eventualmente calcolarlo solo per $n \to +\infty$. Particolarizzando la definizione vista in Argomento 3 si dice che:

- ▶ la successione $\{a_n\}$ **converge** al limite finito a se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un indice $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > m$ si abbia $|a - a_n| < \varepsilon$;
- ▶ la successione $\{a_n\}$ **diverge** a $+\infty$ se per ogni numero reale $k > 0$ esiste un indice $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > m$ si abbia $a_n > k$;
- ▶ la successione $\{a_n\}$ **diverge** a $-\infty$ se per ogni numero reale $k < 0$ esiste un indice $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > m$ si abbia $a_n < k$.

Nel primo caso si scriverà $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ o anche $\{a_n\} \to a$; notazioni analoghe vengono adottate nel caso della divergenza.
Esistono anche successioni che non ammettono limite (né finito, né infinito): esse verranno dette **irregolari**.

Esempio 3s.1

- $\left\{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge al limite finito 2 e $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge al limite finito 0;
- $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ diverge a $+\infty$ e $\{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ diverge a $-\infty$;
- $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$ sono irregolari.

Rimandiamo a quanto esposto nell'Argomento 3 (o ai testi in uso nei singoli corsi) per quel che riguarda considerazioni sull'esistenza del limite, i teoremi sui limiti (vedi teoremi 3.25 e 3.45 e successivi), le regole di calcolo e le corrispondenti forme indeterminate.
Circa i limiti di successioni ottenute applicando funzioni elementari, conviene ricordare i seguenti limiti, utili anche per operare confronti di infiniti e di infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

Se ne deduce in particolare che

- $\alpha < \beta \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = 0$ (tra due potenze di n prevale quella di esponente maggiore),

- $a < b \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{b^n} = 0 \quad \forall a, b \in (0, +\infty)$ (tra due esponenziali con esponente n prevale quella di base maggiore),

mentre

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{\log_b n} = \log_a b \quad \forall a, b \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ (due logaritmi di argomento n "vanno all'infinito nello stesso modo").

Esempio 3s.2 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = \dfrac{n^{5/2} - 1000n^2}{n^{5/2}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2} - 1000n^2}{n^{5/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2}}{n^{5/2}} \left(1 - \frac{1000}{n^{1/2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1000}{n^{1/2}}\right) = 1.$$

▶ Due **successioni** $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ sono dette **asintotiche** (e si scrive $a_n \sim b_n$): nell'esempio si è mostrato che $\left(n^{5/2} - 1000n^2\right) \sim n^{5/2}$, e che l'infinito di $1000n^2$ risulta trascurabile rispetto a quello di $n^{5/2}$.

Confronti di infiniti (forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Se gli infiniti da confrontare non sono dello stesso tipo, si tenga presente che valgono i seguenti *limiti notevoli* (1)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\gamma} = 0 \qquad \text{se } \gamma > 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\gamma}{c^n} = 0 \qquad \text{se } c > 1}$$

cioè la successione logaritmo (naturale) $\{\ln n\}$ e, se $\gamma > 0$ e $c > 1$, le successioni potenza $\{n^\gamma\}$ ed esponenziale $\{c^n\}$ divergono tutte, ma

- *il logaritmo* $\ln n$ *è un infinito di ordine inferiore rispetto alla potenza* n^γ,
- *la potenza* n^γ *è un infinito di ordine inferiore rispetto all'esponenziale* c^n.

Più in generale, comunque si prendano i numeri reali positivi α, β, γ, si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(a_n\right)^\alpha\right)^\beta}{\left(a_n\right)^\gamma} = 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(a_n\right)^\gamma}{c^{a_n}} = 0 \qquad \text{se } c > 1}$$

Esempio 3s.3 Si ha ad esempio $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{51}}{2^n} = 0$ e quindi si può calcolare il limite della successione di termine generale $a_n = \dfrac{n^{51} + 2^n}{3^n}$ come segue: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{51} + 2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3^n} \left(1 + \dfrac{n^{51}}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = 0.$
Più brevemente: visto che n^{51} è un infinito di ordine inferiore rispetto a 2^n, nel calcolo del limite trascuriamo l'addendo n^{51}.

---

1) Si può verificare il secondo limite mediante il

Criterio del rapporto *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a termini positivi. Se esiste* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *(numero reale non negativo o* $+\infty$*) e*

- $0 \le l < 1$ *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- $l > 1$ *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Tale criterio non può invece essere applicato per verificare il primo limite, poiché in questo caso si trova $l = 1$.

Esempio 3s.4 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = \dfrac{e^{5n}-1}{2n+1}$.

Tenuto conto che $(e^{5n}-1) \sim e^{5n}$ e $(2n+1) \sim 2n$, si ha: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{5n}-1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{5n}}{2n} = +\infty$.

Esempio 3s.5 Calcoliamo i limiti delle successioni di termine generale rispettivamente

$$a_n = \frac{\ln{(1+n)}^2}{n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{\ln{(n-1)}}{\sqrt{n}}.$$

- Osserviamo che $a_n = \dfrac{2\ln{(1+n)}}{1+n} \cdot \dfrac{1+n}{n} \sim 2 \cdot \dfrac{\ln{(1+n)}}{1+n}$: quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
- Osserviamo che $b_n = \dfrac{\ln{(n-1)}}{\sqrt{n-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{\ln{(n-1)}}{\sqrt{n-1}}$: quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Più semplicemente: osservare che $\ln{(1+n)} \sim \ln n \implies a_n \sim \dfrac{2\ln n}{n}$ e applicare il limite notevole (analogamente nel secondo caso).

<u>Attenzione</u>: perché il limite sia 0 non basta che al numeratore compaia un logaritmo e al denominatore una potenza positiva. Ad esempio, il limite della successione di termine generale $a_n = \dfrac{\ln{(1+e^{2n})}}{n}$ è 2, poiché $(1+e^{2n}) \sim e^{2n}$ e quindi $a_n \sim \dfrac{\ln{(e^{2n})}}{n} = 2$.

Confronti di infinitesimi (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Se gli infinitesimi da confrontare non sono dello stesso tipo (ad esempio non sono entrambi delle potenze), tenere presente quanto visto a proposito del confronto di infiniti, nonché i seguenti **limiti notevoli**:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 0} \implies \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin b_n}{b_n} = 1 \quad \Big| \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan b_n}{b_n} = 1 \quad \Big| \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos b_n}{b_n^2} = \frac{1}{2}}$$

Esempio 3s.6 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = \dfrac{(0.5)^{2n}}{n^{-1.5}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(0.5)^{2n}}{n^{-1.5}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot n^{1.5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{4^n} = 0$, visto che $n^{3/2}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a 4^n.

Esempio 3s.7 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = \dfrac{\tan{(2n^{-5})}}{n^{-5}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(2n^{-5})}{n^{-5}} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{\tan(2n^{-5})}{2n^{-5}} = 2$.

Esempio 3s.8 Calcoliamo il limite della successione di termine generale $a_n = \dfrac{\sin(n^{-1/2}+n^{-1/3})}{(3n)^{-1/3}}$.

Osserviamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1/2}}{n^{-1/3}} = 0$ e quindi l'infinitesimo $n^{-1/2}$ è trascurabile rispetto a $n^{-1/3}$;

quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^{-1/2}+n^{-1/3})}{(3n)^{-1/3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^{-1/3})}{3^{-1/3}\cdot n^{-1/3}} = \sqrt[3]{3}$.

Altri limiti notevoli, utili nel confronto di infinitesimi, sono i limiti 3), 4), 5) della lista che segue.

Limite di Nepero e sue conseguenze

Il limite di Nepero

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

nasce da una successione che presenta la forma indeterminata $[1^\infty]$ e si utilizza per trovare i limiti di successioni che presentino la stessa forma indeterminata o forme a questa collegate. In particolare qualunque sia il numero reale γ,

1)	$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (o $-\infty$)	$\Longrightarrow$	$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\gamma}{a_n}\right)^{a_n} = e^\gamma$
2)	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	$\Longrightarrow$	$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e$
3)	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	$\Longrightarrow$	$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1$
4)	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	$\Longrightarrow$	$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1$
5)	$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$	$\Longrightarrow$	$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^\gamma-1}{b_n} = \gamma$

Esempio 3s.9 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n}{n-1}} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n-1}} = e^2.$$

Si vede che si può, più semplicemente, tener conto del fatto che $(n-1)\sim n$ e quindi risolvere come segue: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$.

Esempio 3s.10 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = n\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\cdot 2 = 2.$$

Esempio 3s.11 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale $a_n = n\cdot\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{3}$.

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{3} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{3}.$$

Forma indeterminata $[\infty - \infty]$

Se è possibile si cerca di evidenziare quale dei due infiniti ha ordine superiore.

Esempio 3s.12 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale

$$a_n = \sqrt{n^3 + 2n} - n.$$

Osserviamo che $\sqrt{n^3 + 2n} \sim \sqrt{n^3} = n^{3/2}$ è infinito di ordine superiore rispetto a n. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3 + 2n} = +\infty$.

Se l'ordine di infinito è lo stesso, si cerca di ricondurre questa forma indeterminata ad altre (ad esempio a $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Illustriamo come comportarsi in tre casi particolari: nel primo si utilizza il prodotto notevole $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, negli altri una proprietà dei logaritmi.

Esempio 3s.13 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

Osserviamo che $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \dfrac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \dfrac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2} + n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n} = 1$.

Esempio 3s.14 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale

$$a_n = \ln(3n^2 - n) - \ln(3n^2 + 1).$$

Osserviamo che
$a_n = [\ln(3n^2 - n) - \ln(3n^2 + 1)] = \ln\left(\dfrac{3n^2 - n}{3n^2 + 1}\right) = \ln\left(\dfrac{3n^2 + 1 - 1 - n}{3n^2 + 1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1+n}{3n^2 + 1}\right)$.
Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{n}{3n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) = 0$.

Esempio 3s.15 Calcoliamo il limite della successione avente termine generale

$$a_n = \ln(2e^n - 1) - n.$$

Osserviamo che $a_n = \ln(2e^n - 1) - n = \ln(2e^n - 1) - \ln e^n = \ln\left(\dfrac{2e^n - 1}{e^n}\right) = \ln(2 - e^{-n})$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(2 - e^{-n}) = \ln 2$.