Lezione 2

Soluzioni Esercizi Bis

Sol. Ex. 2.2bis.

- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16}$
- $(-2)^5 = (-1)^5 \cdot 2^5 = -2^5 = -32$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $-\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = -(-1)^2 \cdot \frac{1}{5^2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

Sol. Ex. 2.3bis.

- $7 > 1$ e $5 < 9$ quindi $7^5 < 7^9$
- $0 < \frac{2}{3} < 1$ e $6 < 7$ quindi $\left(\frac{2}{3}\right)^7 < \left(\frac{2}{3}\right)^6$
- $(-5)^{13} < 0$, $(-5)^{12} > 0$ e quindi $(-5)^{13} < (-5)^{12}$
- $(-5)^{13} = -5^{13}$. Poiché $5 > 1$ e $12 < 13$ si ha $5^{12} < 5^{13}$ e quindi $(-5)^{13} = -5^{13} < -5^{12}$

Sol. Ex. 2.4bis.

- $0 < \frac{37}{100} < \frac{100}{37}$. Elevando ad ugual potenza due numeri positivi la disuguaglianza si conserva:
$$\left(\frac{37}{100}\right)^5 < \left(\frac{100}{37}\right)^5$$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 = -\left(\frac{3}{4}\right)^5$ e $\left(-\frac{4}{3}\right)^5 = -\left(\frac{4}{3}\right)^5$. Poiché $0 < \frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ si ha $\left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{4}{3}\right)^5$ e quindi
$$\left(-\frac{4}{3}\right)^5 < \left(-\frac{3}{4}\right)^5$$
- $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4$. Poiché $0 < 2 < \frac{5}{2}$ si ha $2^4 < \left(\frac{5}{2}\right)^4$ e quindi $2^4 < \left(-\frac{5}{2}\right)^4$

Sol. Ex. 2.5bis.

- $\left(\dfrac{8}{15}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^{-2} = \left(\dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{5}{8}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$
- $\dfrac{2}{3^{-2}} \cdot \dfrac{2^{-4}}{3 \cdot 2^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot \dfrac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 2^2} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{2^6 \cdot 3} = \dfrac{3}{2^5} = \dfrac{3}{32}$
  oppure $\quad \dfrac{2}{3^{-2}} \cdot \dfrac{2^{-4}}{3 \cdot 2^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-2} = (2)^{1-4-2} \cdot (3)^{2-1} = 2^{-5} \cdot 3 = \dfrac{3}{2^5} = \dfrac{3}{32}$

Sol. Ex. 2.7bis. **(B)**, infatti: $\quad 5^{-3} : 5^2 = 5^{-3} \cdot 5^{-2} = 5^{-3-2} = 5^{-5}$

Sol. Ex. 2.9bis. **(C)**, infatti**:**

$\dfrac{1}{10} \cdot 4^{-2} = 5^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-4} = 2^{-5} \cdot 5^{-1} = (2^{-5} \cdot 5^{-5}) \cdot 5^4 = 5^4 \cdot 10^{-5} = 625 \cdot 10^{-5} = 6.25 \cdot 10^{-3}$.

In maniera meno formale: $\dfrac{1}{10} \cdot 4^{-2} = \dfrac{1}{10 \cdot 16} = \dfrac{1}{160}$ è sicuramente un numero < 0.01 ma maggiore di 0.001 quindi dell'ordine di qualche millesimo (questo da solo basta a scegliere la risposta **(C)**). Per calcolarlo moltiplico numeratore e denominatore per 10^2: $\dfrac{1}{10} \cdot 4^{-2} = \dfrac{10^2}{16 \cdot 10^3} = \dfrac{100}{16} \cdot 10^{-3} = 6.25 \cdot 10^{-3}$.

Sol. Ex. 2.10bis.

- $a = 1.2345 \cdot 10^2$
- $b = \dfrac{3}{400} = 7.5 \cdot 10^{-3}$ infatti:
  $\dfrac{3}{400} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{100} = \dfrac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} \cdot 10^{-2} = \dfrac{75}{100} \cdot 10^{-2} = 75 \cdot 10^{-4} = 7.5 \cdot 10^{-3}$
- $c = 4.5 \cdot 10^2$ infatti: $\quad 9 : 0.02 = 9 : \dfrac{2}{100} = 9 \cdot \dfrac{100}{2} = \dfrac{9}{2} \cdot 10^2 = 4.5 \cdot 10^2$

Sol. Ex. 2.11bis.

- $(0.6) \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 3 \cdot 10^{-1} \cdot 15 \cdot 10^{-1} = 45 \cdot 10^{-2} = 4.5 \cdot 10^{-1}$
- $(0.3)^3 : 1.2 = \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 : \dfrac{12}{10} = \dfrac{3^3}{10^3} \cdot \dfrac{10}{3 \cdot 2^2} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2}{10^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{225}{10^4} = 2.25 \cdot 10^{-2}$
- $(-2.7)^{-2} \cdot (3 \cdot 10^2)^7 = \left(\dfrac{27}{10}\right)^{-2} \cdot 3^7 \cdot 10^{14} = 3^{-6} \cdot 10^2 \cdot 3^7 \cdot 10^{14} = 3 \cdot 10^{16}$

Sol. Ex. 2.13bis.

- $\sqrt[4]{3\cdot 200}\cdot\sqrt{10^{-3}} = (6\cdot 10^2)^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{-\frac{3}{2}} = 6^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 6^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{-1} = \dfrac{1}{10}\sqrt[4]{6}$
- $7\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^{-\frac{2}{3}} = 7\cdot 7^{-\frac{2}{9}} = 7^{\frac{7}{9}}$

Sol. Ex. 2.14bis.

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$
- $\dfrac{5^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}\cdot 10^{-1}} = 5^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot 5 = 5^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1}\cdot 2 = 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2 = 2\sqrt[3]{5}$
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{75}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{5\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}\left(2-\sqrt{3}\right)$

Sol. Ex. 2.15bis. (A), infatti: $\dfrac{\sqrt[5]{(12)^3}}{3^2} = \dfrac{2^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{3}{5}}}{3^2} = \dfrac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[5]{\dfrac{2}{9}}$

Sol. Ex. 2.16bis.

a) Falsa; infatti $\sqrt[3]{8} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

b) Falsa; infatti $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{5^7} \neq \sqrt[12]{25}$

c) Vera

d) Falsa; infatti $\sqrt{75} = \sqrt{3\cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$

e) Falsa; infatti $\sqrt[3]{2} > 1$, $\sqrt[3]{5} > 1$ e quindi $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5} > 1+1 = 2$. Invece $\sqrt[3]{7} < 2$ e quindi non può essere $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$

f) Vera

Sol. Ex. 2.17bis.

- $\sqrt[3]{-\dfrac{5^6}{4}} = \sqrt[3]{-\dfrac{(25)^3}{4}} = -\dfrac{25}{\sqrt[3]{4}}$
- $\sqrt{-\dfrac{49}{2^6}}$ non ha significato: la radice ha indice pari e il radicando è negativo.

Sol. Ex. 2.18bis. Gli indici sono rispettivamente 4, 6 e 2: il loro minimo comune multiplo è 12. Si riducono tutti i radicali all'indice 12:

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} \qquad ; \qquad \sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2} \qquad ; \qquad \sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6}$$

Sol. Ex. 2.19bis. Si riducono i radicali allo stesso indice: $\sqrt[5]{-5} = -\sqrt[10]{5^2}$ e $-\sqrt{3} = -\sqrt[10]{3^5}$. Da $3^5 > 5^2$ si ricava $\sqrt[10]{3^5} > \sqrt[10]{5^2}$ e quindi

$$\sqrt[5]{-5} > -\sqrt{3}.$$

Sol. Ex. 2.20bis. Poiché $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ si ha $\sqrt[3]{7} < 2$. Inoltre $\sqrt{23} > \sqrt{16} = 4 > 2$. Quindi

$$\sqrt[3]{7} < 2 < \sqrt{23}.$$

Lo stesso risultato si può ottenere riducendo i radicali all'indice 6.

Sol. Ex. 2.22bis. (D), infatti: $\sqrt[3]{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{25-5} = \sqrt[3]{20}$

Sol. Ex. 2.23bis.

$$\frac{27 + 3^{-\frac{1}{2}} - (1/9)^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^3 + 3^{-\frac{1}{2}} - (3^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^3 + 3^{-\frac{1}{2}} - 3^3}{3^{1-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3^{-\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}(3+1)} = \frac{1}{4}$$

Sol. Ex. 2.25bis.

- $\dfrac{1}{8} = 2^{-3}$ quindi $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$
- $27 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$ quindi $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$
- $\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ quindi $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{3}{2} = -1$

Sol. Ex. 2.26bis.

- $c = 3^2 = 9$
- $c = (1/4)^{-1} = 4$
- $c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Sol. Ex. 2.27bis.

- $c = 10^{0.4} = 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100}$
- $c = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} = 2\sqrt{2}$
- $c = 8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

Sol. Ex. 2.29bis. $\log_{10}(0.2)^3 - \log_{10} 4 = \log_{10} \dfrac{8}{10^3} - \log_{10} 4 = \log_{10} \dfrac{2}{10^3} = -\log_{10}(500)$

Sol. Ex. 2.30bis. $\log_5 a - \log_5 2b - \dfrac{2}{3} \log_5 c = \log_5 a + \log_5 \dfrac{1}{2b} + \log_5 \dfrac{1}{c^{2/3}} = \log_5 \dfrac{a}{2b\sqrt[3]{c^2}}$

Sol. Ex. 2.31bis

a) falsa; infatti $8^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq -\dfrac{1}{2}$

b) vera; infatti $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

c) vera; infatti $-\log_4 \left(\dfrac{1}{7}\right) = -(-\log_4 7) = \log_4 7$

d) falsa; infatti $\log_3 2 < 1$ e $\log_3 5 < 2$ e quindi il loro prodotto non può essere $\log_3 10$ che è > 2

e) vera; infatti se $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{5}\right) = c$ si ha $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c = \dfrac{1}{5}$, da cui $2^c = 5$ ossia $c = \log_2 5$

f) vera; infatti $1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 6$

Sol. Ex. 2.32bis.

- $5^{2\log_5 3} = 5^{\log_5 (3^2)} = 9$
- $7^{-\log_7 \frac{1}{4}} = 7^{\log_7 4} = 4$
- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_4 3} = (2^{-1})^{\log_4 3} = \left(4^{-\frac{1}{2}}\right)^{\log_4 3} = 4^{\log_4 \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Sol. Ex. 2.33bis. $\log_4 \dfrac{2^{-3}\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8}} = \log_4 \dfrac{2^{-3} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \log_4 2^{-3} = \log_4 (2^2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{2}$

Sol. Ex. 2.34bis. **(C),** infatti:

$$\log_{10}\left(\frac{\sqrt[3]{10}}{10^{-2/5}}\right) = \log_{10}\left(\frac{10^{\frac{1}{3}}}{10^{-\frac{2}{5}}}\right) = \log_{10}\left(10^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}\right) = \log_{10}\left(10^{\frac{11}{15}}\right) = \frac{11}{15}$$

Sol. Ex. 2.35bis. $n = 3$, infatti:
detto $c = \log_2 10$, si ha $2^c = 10$; poichè $2^3 = 8 < 10 < 16 = 2^4$ si ottiene $3 < \log_2 10 < 4$.

Sol. Ex. 2.38bis Ricordando le proprietà dei logaritmi:

- $5 > 1 \quad , \quad \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ e quindi $\log_5 \dfrac{2}{3} < \log_5 \dfrac{3}{4}$
- $\dfrac{1}{3} < 1 \quad , \quad 4 < 7$ e quindi $\log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 4$
- $\log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2 \quad , \quad \log_3 2 > 0$ e quindi $\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_3 2$

Sol. Ex. 2.39bis. Per calcolo diretto si ha: $\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$; infatti $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$.
Detto $c = \log_2 7$ si ha $2 < c < 3$; infatti $7 = 2^c$ e $4 = 2^2 < 7 = 2^c < 8 = 2^3$.
Quindi $\log_4 8 < \log_2 7$.

Sol. Ex. 2.40bis.

- $4^{\log_2 5} = (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2\left(5^2\right)} = 2^{\log_2(25)} = 25$
- $2^{\log_4 7} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_4 7} = 4^{\frac{1}{2}\log_4 7} = 4^{\log_4\left(7^{\frac{1}{2}}\right)} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
- $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 2} = (3^{-2})^{\log_3 2} = 3^{-2\log_3 2} = 3^{\log_3\left(2^{-2}\right)} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$