

Argomento 6: Derivate

Esercizi

I Parte - Derivate

Ex. 6.1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\log x - 5x^3 + 2 \cos x$ | 2) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x^2}$ | 3) $5 \tan 2x$ |
| 4) $2(x^2 + 2x - 3e^{2x}) - \sin x$ | 5) $\arctan(x^2 + 1)$ | 6) $\log^2 x$ |
| 7) $\frac{x^2}{2} + 2^x + 3$ | 8) $\frac{x^3}{3} - 2 \log_2 x + 3x$ | 9) $x^2 2^x$ |
| 10) $\sqrt[3]{3x^2 - 12x + 16}$ | 11) $\sqrt{\sin x}$ | 12) $\sin \sqrt{x}$ |
| 13) $\sqrt{x} \log x + x^2 e^x$ | 14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1}$ | 15) $\frac{3x + 2}{2x + 1}$ |
| 16) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 17) $\frac{3^x}{x^7}$ | 18) $x^3 \log_5 x$ |
| 19) $\frac{\sqrt{x^3}}{x^3 - 5}$ | 20) $\log x + \sin x $ | 21) $\frac{x - e^x}{x + e^x}$ |
| 22) $\sqrt[3]{\tan x}$ | 23) $\log^3(x^2 + 1)$ | 24) $x^x = e^{x \log x}$ |
| 25) $\sqrt{4x^2 - 3}$ | 26) $\frac{1}{\sqrt{\log x}}$ | 27) $e^{\frac{x}{\log x}}$ |
| 28) $e^{x^2+2x} + \cos(x \log x)$ | 29) $\frac{x \log x}{x + \log x}$ | 30) $\frac{x^2 + \cos x}{e^x + 1}$ |
| 31) $\frac{2x + 1}{1 - 3x} \cos x$ | 32) $\frac{x}{\sin(x^2 - x + 2)}$ | 33) $-\frac{x - 1 + \frac{2}{x}}{2x - 3 + \frac{3}{x}}$ |
| 34) $\log \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + x} \right)$ | 35) $(\sin(\tan \sqrt{x}))^5$ | 36) $(x^2 + 1)^{\log x}$ |

Argomento

Soluzione

Ex. 6.2 Dopo averne determinato l'insieme di esistenza, calcolare, quando possibile, la derivata delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll}
1) & f(x) = \frac{e^{2-x}}{1-3x} & 2) & f(x) = \frac{x^2-5}{x-3} & 3) & f(x) = x \log |x| \\
4) & f(x) = \frac{e^{x^2}}{x-2} & 5) & f(x) = \frac{2-x}{x^3+x^2} & 6) & f(x) = \frac{e^{x-2}}{|1-x|} \\
7) & f(x) = \frac{xe^x}{x^2+2x} & 8) & f(x) = \sqrt{e^x-1} - x & 9) & f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1} \\
10) & f(x) = \log \left(\frac{e^{2x}+3}{e^x+1} \right) & 11) & f(x) = e^{\frac{|x-2|}{x}} & 12) & f(x) = \log \left(\frac{x-2}{x+2} \right)
\end{array}$$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.3 Scrivere le equazioni delle rette tangenti alle seguenti curve nei punti a fianco indicati:

$$1) f(x) = e^x \quad x_0 = 0 \quad 2) f(x) = \sqrt[5]{x} \quad x_0 = 0 \quad 3) f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.4 Determinare le ascisse dei punti in cui la curva di equazione $y = \frac{1}{x-1}$ ha tangente parallela alla retta $y = -4x$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.5 Si studi la derivabilità e la continuità delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
1) & f(x) = \begin{cases} x^2 \cos x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} & 2) & f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^2} & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{(x+1)} & \text{per } x > 0 \end{cases} \\
3) & f(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per } x < 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}
\end{array}$$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.6 Per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risulta derivabile in \mathbb{R} ?

Argomento

Soluzione

Ex. 6.7 Determinare a, b tali che

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 6 & \text{per } x \leq 1 \\ -3x^2 + bx + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutto \mathbb{R} . Quante soluzioni ci sono? Quante con la condizione $f(1) = 2$? In quest'ultimo caso, se f^{-1} è l'inversa di f in un intorno di $x = 1$, calcolare la derivata di f^{-1} in $y = 2$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.8 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases},$$

calcolarne la derivata in $x = 0$ mediante il limite del rapporto incrementale. Calcolare poi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. È uguale a $f'(0)$?

Argomento

Soluzione

Ex. 6.9 Data la funzione $f(x) = e^x + \arctan x + x$, calcolare la derivata dell'inversa f^{-1} in $y = 1$. Se $z = g(y)$ è derivabile in $y = 1$ con $g'(1) = \frac{3}{2}$, posto $h(x) = g(f(x))$, quanto vale $h'(0)$?

Argomento

Soluzione

Ex. 6.10 Data una funzione f derivabile ed invertibile su \mathbb{R} tale che $f(-2) = -5$ e $f'(-2) = 1/3$, calcolare la derivata dell'inversa f^{-1} in $y = -5$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.11 Data f invertibile su \mathbb{R} , sapendo che $(f^{-1})'(1) = 4$ e $f(2) = 1$, cosa possiamo dire sulla derivata di f in 2?

Argomento

Soluzione

Ex. 6.12 La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x(3x - 4)$ nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione:

A. $y = e(x - 2)$; B. $y = e(2x - 3)$; C. $y = e(x - 1)$; D. $y = 2e(x - 1)$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.13 La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x(x^2 - 1)$ nel punto di ascissa $x = 2$ ha equazione:

A. $y = e^2(7x - 11)$; B. $y = 7e^2(x - 2)$; C. $y = e^2(7x + 3)$; D. $y = 7e^2x$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.14 Siano $f(x) = \log(x+3)$ e $g(x) = e^x - 2$ e sia $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x = 0$ è:

- A. $y = \frac{1}{2}x$; B. $y = \frac{1}{2}x + \log 2$; C. $y = \frac{1}{3}x$; D. $y = \frac{1}{3}x + \log 3$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.15 La funzione $f(x) = \begin{cases} 3x^2(e^x - 2) & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 + 3x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è

- A. continua e derivabile in \mathbb{R} B. nè continua nè derivabile in $x = 0$
C. derivabile, ma non continua in $x = 0$ D. continua su \mathbb{R} , ma non derivabile in $x = 0$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.16 La funzione $f(x) = |x|e^x$ è:

- A. continua e derivabile in \mathbb{R} B. nè continua nè derivabile in $x = 0$
C. derivabile, ma non continua in $x = 0$ D. continua su \mathbb{R} , ma non derivabile in $x = 0$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.17 Sia $f(x) = \frac{x \log(1+x^2)}{e^{\sqrt{x}}}$. Allora $f'(1)$ vale:

- A. $\frac{\log 2 - 1}{e}$; B. $\frac{\log \sqrt{2} + 1}{e}$; C. $\frac{\log 2 + 1}{e}$ D. $\frac{\log \sqrt{2} - 1}{2}$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.18 Sia data la funzione $f(x) = \log \left(\frac{5 + 6x + 3x^2}{x + 1} \right)$.

Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

- A. $y = \log 5 + \frac{1}{5}x$; B. $y = \log 5 - \frac{1}{5}x$; C. $y = \log 5 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$; D. $y = \log 5 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.19 Sia g una funzione derivabile e tale che $g(0) = 4$ e $g'(0) = 3$ e sia $f(x) = \log^2(1+x)$. Allora $(f \circ g)'(0)$ vale

- A. $\frac{12}{5} \log^2 5$; B. $\frac{6}{5} \log^2 5$; C. $\frac{12}{5} \log 5$; D. $\frac{6}{5} \log 5$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.20 Siano $f(x) = e^{1/x}$, $g(x) = x - x^2$ e $F(x) = (f \circ g)(x)$. Allora $F'(2)$ vale:

- A. $\frac{3\sqrt{e}}{4}$; B. $\frac{3}{4\sqrt{e}}$; C. $\frac{3\sqrt{e}}{2}$; D. $\frac{3}{2\sqrt{e}}$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.21 Determinare per quali valori del parametro reale k il grafico della funzione di equazione $f(x) = -kx^2 + k^2x - 1$ è tangente alla retta $y = 3x - 2$ nel punto di coordinate $(1, 1)$.

- A. $k = -1, 3$; B. $k = 3$; C. $k = -1$; D. Per nessun valore di k .

Argomento

Soluzione

Ex. 6.22 Siano $f(x) = \log(1 + x)$, $g(x) = \cos(x + 2)$ e $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Allora $F'(0)$ vale:

- A. $\sin 2$; B. $-\sin 2$; C. $\frac{\sin 2}{1 + \cos 2}$; D. $-\frac{\sin 2}{1 + \cos 2}$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.23 Siano $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = 2 - x^2$.

Se $F(x) = (f \circ g)(x)$, allora $F'(2)$ vale:

- A. -4 ; B. -2 ; C. 2 ; D. 4 .

Argomento

Soluzione

Ex. 6.24 Si considerino le funzioni $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 6x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

e sia $F(x)$ la funzione composta $(f \circ g)(x) = F(x)$. Allora $F'(2)$ vale:

- A. 14 ; B. 18 ; C. -14 ; D. -18 .

Argomento

Soluzione

Ex. 6.25 Su tutto \mathbb{R} la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 2x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ \log(2 + x) + x^3 + x & \text{se } x > -1 \end{cases}$ è

- A. non continua; B. continua, ma non derivabile;
C. derivabile solo una volta; D. derivabile almeno due volte.

Argomento

Soluzione

II Parte - Applicazioni

Ex. 6.26 Si determinino gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

- | | | |
|--|--------------------------------------|--------------------------|
| 1) $x^3 - x$ | 2) $1 - x^2$ | 3) $x - \sqrt{x}$ |
| 4) $x(x - 2)^3$ | 5) $xe^{\frac{1}{x}}$ | 6) $\sqrt[3]{x^2 + x}$ |
| 7) $\frac{ x - 1 }{x^2 - 4}$ | 8) $\frac{7x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ | 9) $x^2 - 2 x $ |
| 10) $x\sqrt{x^2 - 1}$ | 11) $\sqrt{\frac{e^{x+1}}{e^x + 1}}$ | 12) $x - \sqrt{x^2 + 1}$ |
| 13) $\frac{2 \sin x}{2 - \cos x}$ in $[0, 2\pi]$ | 14) $\frac{\log x}{x}$ | |

Argomento

Soluzione

Ex. 6.27 Si verifichi che la funzione $f(x) = \log x - \frac{1}{x^3}$ è invertibile dove definita e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(1)$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.28 Si verifichi che la funzione $f(x) = e^x + \sqrt{2x + 1}$ è invertibile dove definita e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(0)$.

Argomento

Soluzione

Ex. 6.29 Si determinino gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso relativi delle seguenti funzioni:

- | | | |
|-----------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $x^3 - x$ | 2) $1 - x^2$ | 3) $x - \sqrt{x}$ |
| 4) $x(x - 2)^3$ | 5) $xe^{\frac{1}{x}}$ | 6) $\sqrt[3]{x^2 + x}$ |

Argomento

Soluzione

Ex. 6.30 Si calcolino i seguenti limiti, usando, se necessario, i teoremi di De l'Hôpital, nei casi in cui sia possibile:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} & 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{\tan(x+\frac{\pi}{2})}} & 3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}} \\
 4) \quad \lim_{x \rightarrow -1^{++}} \frac{x^3+1}{\log(-x)} & 5) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}{\cos x} & 6) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right)
 \end{array}$$

Argomento

Soluzione

Ex. 6.31 Si calcolino i seguenti limiti, dopo aver calcolato i polinomi di Taylor necessari:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x} & 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{3x^4} & 3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\tan x - x} \\
 6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x} - 1} & 5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x^2}{x^3} & 6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}
 \end{array}$$

Argomento

Soluzione