Argomento 4

Calcolo dei limiti II: forme indeterminate

Confronto tra infiniti (forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$)

Definizione 4.1 Una funzione f si dice un **infinito** per $x \to P$ se $\lim_{x \to P} f(x) = +\infty$ o $-\infty$.

Date le funzioni f e g, infiniti per $x \to P$, fare il *confronto tra infiniti* vuol dire calcolare (se esiste) il limite di un loro rapporto e dal risultato dedurre se uno prevale sull'altro o se si equivalgono.

Definizione 4.2 Se $\lim_{x \to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, g si dice **infinito** di **ordine inferiore** a f per $x \to P$ e f infinito di **ordine superiore** a g per $x \to P$.([1])

Se $\lim_{x \to P} \frac{g(x)}{f(x)} = k \neq 0$, f e g si dicono invece infiniti dello **stesso ordine** per $x \to P$.

Nel limite per $x \to P$ della somma e del quoziente di due infiniti di <u>ordine diverso</u> prevale quello di ordine superiore, cioè,

se f è un infinito di ordine **superiore** a g :

$$\boxed{\lim_{x \to P} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to P} f(x) \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x \to P} f(x),} \qquad \boxed{\lim_{x \to P} \frac{f(x)}{|g(x)|} = +\infty \text{ o } -\infty.}$$

Confronto tra potenze x^α per $x \to +\infty$

Confrontando x^α, x^β per $x \to +\infty$, si ha che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} x^{\beta - \alpha} = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha > \beta \\ +\infty \text{ se } \alpha < \beta \\ 1 \text{ se } \alpha = \beta \end{cases} .$$

Perchè x^α sia un infinito per $x \to +\infty$, α deve essere > 0, quindi

per $\quad x \to +\infty$	• x^α è un infinito di **ordine superiore** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta > 0$ • x^α è un infinito di **ordine uguale** a $x^\beta \quad \Leftrightarrow \alpha = \beta > 0$.

Perciò nel limite per $x \to +\infty$ di una somma di potenze di esponente diverso, prevale quella <u>con esponente maggiore</u>.

---

[1]Notare che, poichè f e g sono infiniti, se $\lim_{x \to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x \to P} \frac{|g(x)|}{f(x)} = 0^+$ o 0^-, da cui si ha che $\lim_{x \to P} \frac{f(x)}{|g(x)|} = +\infty$ o $-\infty$, che è quindi un modo equivalente per esprimere che f è infinito di **ordine superiore** a g.

Esempio 4.2

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-x^2+3) = \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{2x^3} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty.$$

Esempio 4.4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6-2x^3+1}{2x^5-x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{3x^6}{2x^5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{(1-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{3x^6})}{(1-\frac{1}{2x^3}+\frac{5}{2x^5})}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6}{2x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2} = +\infty.$$

Confronto tra esponenziali a^x per $x \to +\infty$

Confrontando a^x, b^x per $x \to +\infty$, si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^x = \begin{cases} +\infty, \text{ se } a<b \\ 0, \text{ se } a>b \\ 1, \text{ se } a=b. \end{cases}$$

Perchè a^x sia un infinito per $x \to +\infty$, a deve essere > 1, quindi

per $\quad x \to +\infty$	• a^x è un infinito di **ordine superiore** a $b^x \Leftrightarrow a > b > 1$ • a^x è un infinito di **ordine uguale** a $b^x \Leftrightarrow a = b > 1$.

Esempio 4.5

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-5^x) = \lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{-5^x} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\left(-\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} -5^x = -\infty.$$

Confronto tra logaritmi $\log_a x$ per $x \to +\infty$

Confrontando $\log_a x$, $\log_b x$ per $x \to +\infty$ con $a, b > 0,\ a, b \neq 1$, si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x \log_a b}{\log_a x} = \log_a b \ (\neq 0,\ \text{perchè } b \neq 1).$$

Quindi

per $\quad x \to +\infty$	$\log_a x$ e $\log_b x$ sono infiniti dello **stesso ordine**, $\forall a, b > 0,\ a, b \neq 1$.

Esempio 4.6 $\lim_{x\to+\infty}(\log_2 x - \log_3 x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\log_2 x - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\log_2 x\left(1-\frac{1}{\log_2 3}\right) = +\infty \left(\text{poiché } \log_2 3 > 1,\ \left(1-\frac{1}{\log_2 3}\right) > 0\right).$$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi per $x \to +\infty$

Confrontando $a^x, x^\alpha, \log_b x$ per $x \to +\infty$ con $a, b > 1$, $\alpha > 0$, si hanno i seguenti limiti (notevoli):

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{a^x} = 0,}$$

(per una verifica si veda Arg.6).
Quindi

per $x \to +\infty$

- a^x è un infinito di **ordine superiore** a x^α, $\forall\ \alpha > 0, \forall\ a > 1$
- x^α è un infinito di **ordine superiore** a $\log_b x$, $\forall\ \alpha > 0, \forall\ b > 0,\ b \neq 1$
- a^x è un infinito di **ordine superiore** a $\log_b x$, $\forall b > 0, b \neq 1, \forall a > 1$.

Esempi 4.7

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2^x}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \left(1 + \frac{x^3}{2^x}\right)}{3^x \left(1 + \frac{x^2}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \log x}{x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{\log x}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x} + 1}{3^x + \log 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)}{3^x \left(1 + \frac{\log 3x}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3^x} = 0.$$

Nota. Il caso $x \to -\infty$ si può trattare riportandolo al caso $t \to +\infty$ mediante il cambio di variabile $t = -x$.

Esempio 4.8 $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - \log x^2}{3x^2 + 5^x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-t)^3 - \log(-t)^2}{3(-t)^2 + 5^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3 \left(1 + \frac{2\log t}{t^3}\right)}{3t^2 \left(1 + \frac{5^{-t}}{3t^2}\right)} = -\infty.$$

Confronto tra infinitesimi: (forma indeterminata $\frac{0}{0}$)

Definizione 4.9 Una funzione f si dice un **infinitesimo** per $x \to P$ se $\lim_{x\to P} f(x) = 0$.

Date le funzioni f e g, infinitesimi per $x \to P$, fare il *confronto tra infinitesimi* vuol dire calcolare, se esiste, il limite di un loro rapporto e da tale risultato dedurre se uno prevale sull'altro o se si equivalgono.

Definizione 4.10 Se $\lim_{x\to P} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, g si dice infinitesimo di **ordine superiore** a f e f infinitesimo di **ordine inferiore** a g per $x \to P$.
Se $\lim_{x\to P} \dfrac{g(x)}{f(x)} = k \neq 0$ f e g si dicono invece infinitesimi dello **stesso ordine** per $x \to P$.

Nel limite per $x \to P$ della somma di due infinitesimi di ordine diverso prevale quello di ordine inferiore, (o, equivalentemente, quello di ordine superiore è trascurabile) cioè,

se f è un infinitesimo di ordine **inferiore** a g :

$$\boxed{\lim_{x\to P} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to P} f(x) \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to P} f(x)\ .}$$

Confronto tra potenze x^α per $x \to 0^+$

Confrontando x^α, x^β per $x \to 0^+$ con $\alpha, \beta > 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha > \beta \\ +\infty \text{ se } \alpha < \beta \\ 1 \text{ se } \alpha = \beta \end{cases}\ .$$

Perchè x^α sia un infinitesimo per $x \to 0^+$, α deve essere > 0, quindi

per $x \to 0^+$	• x^α è un infinitesimo di **ordine superiore** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta > 0$ • x^α è un infinitesimo di **ordine uguale** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta > 0$.

Perciò nel limite per $x \to 0^+$ di una somma di potenze di esponente diverso, prevale quella con esponente minore.

Esempio 4.11 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 2x^2}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^2} = -2.$

Si utilizza lo stesso metodo per $x \to 0^-$ quando le potenze che compaiono nel limite sono definite anche per valori negativi.

Utilizzo dell'asintotico e del trascurabile

Quanto detto finora si può esprimere utilizzando le nozioni di *asintotico* e *trascurabile.*

Definizione 4.12 La funzione f è detta un **asintotico** della funzione g per $x \to P$ se il $\lim_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si denota con

$$\boxed{f \sim g \text{ per } x \to P}$$

Se $f \sim g$ per $x \to P$, $\lim_{x\to P} f(x) = \lim_{x\to P} g(x)$ (se tali limiti esistono).([2])

Introduciamo ora il concetto di funzione trascurabile rispetto a un'altra:

Definizione 4.13 La funzione g è detta **trascurabile** rispetto alla funzione f o un **o-piccolo** di f per $x \to P$ se il $\lim\limits_{x\to P} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ e si denota con

$$\boxed{g(x) = o(f(x)) \ \text{ per } x \to P}$$

Con il simbolo $o(f(x))$ per $x \to P$ si indica quindi una qualsiasi funzione trascurabile rispetto a f per $x \to P$.
Inoltre, se $g(x) = o(f(x))$ per $x \to P$, dato $k \neq 0$ anche $kg(x) = o(f(x))$.

$$\boxed{\text{Se } g(x) = o(f(x)) \text{ per } x \to P \text{, allora } \lim_{x\to P} f(x) + g(x) = \lim_{x\to P} f(x) + o(f(x)) = \lim_{x\to P} f(x).}$$

Il legame tra asintotico e trascurabile segue dalle definizioni:

$$\boxed{g(x) \sim f(x) \quad \text{se e solo se} \quad g(x) = f(x) + o(f(x)) \qquad \text{per } x \to P}$$

(infatti $\lim\limits_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ se e solo se $\lim\limits_{x\to P} \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} = 0$).

Utilizzando le nozione di asintotico o di trascurabile possiamo dire che:

se f è un infinito di ordine superiore o un infinitesimo di ordine inferiore a g per $x \to P$, allora

$$\boxed{g(x) = o(f(x))} \quad \text{e} \quad \boxed{f(x) + g(x) = f(x) + o(f(x)) \sim f(x)} \qquad \text{per } x \to P.$$

Esempi 4.14

- Si osservi che, per $x \to 0^+$, $\left(-2x^{\frac{5}{3}} + x^4 + 3x^2\right) \sim -2x^{\frac{5}{3}}$, infatti $(x^4 + 3x^2) = o(x^{\frac{5}{3}})$.
- Per $x \to +\infty$, $(x^5 - 2e^x + 3x - \log(4x)) \sim -2e^x$, infatti $(x^5 + 3x - \log(4x)) = o(e^x)$.

Nota. Le nozione di asintotico e di trascurabile per $x \to P$ sono nozioni **locali**, che riguardano cioè il comportamento delle funzioni solo in un intorno di P. Ad esempio le funzioni x e $(x + x^2)$ sono asintotiche ($x \sim x + x^2$) per $x \to 0$ mentre non lo sono per $x \to +\infty$, (infatti $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+x^2} = 0$).

> Nel calcolo di un limite per $x \to P$ di **prodotti** $f(x) \cdot h(x)$ e **quozienti** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$,
> si può sostituire $f(x)$ con un asintotico $g(x)$ di $f(x)$ per $x \to P$ ([3]).

Esempio 4.17 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^5 - 2e^x + 3x - \log(4x))}{x^3 - x + 2} \overset{\text{vedi Es.4.14}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2e^x}{x^3} = -\infty.$

[2]Si noti che il simbolo $\sim$ si usa tra funzioni. Tra limiti si hanno uguaglianze quindi si usa sempre il simbolo $=$ (MAI $\lim \sim \lim$)

[3]Infatti da $\lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ segue che: $\lim\limits_{x\to P} f(x) \cdot h(x) = \lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \cdot h(x) = \lim\limits_{x\to P} g(x) \cdot h(x)$, $\lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to P} \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to P} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Nel calcolo di un limite per $x \to P$ di **somme** $f(x) + h(x)$
NON si può in generale sostituire $f(x)$ con un suo asintotico.

Esempio 4.18 Consideriamo il limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - x) - x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. D'altra parte $(x^3 + x^2 - x) \sim x^3 \sim (x^3 - x)$ per $x \to +\infty$: se si sostituisse x^3 al posto di $(x^3 + x^2 - x)$ nell'espressione del limite si otterrebbe $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ e se si sostituisse $(x^3 - x)$ si otterrebbe $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - x - x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$.

Se $g(x) = f(x) + o(f(x))$ per $x \to P$, nel calcolo di limiti per $x \to P$ di somme $g(x) + h(x)$ si può invece ovviamente sostituire $g(x)$ con $f(x) + o(f(x))$, anche se non sempre questo serve a risolvere il problema.

Esempio 4.19 Si vuole calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)$. Poiché $\sqrt{x^2 - x} = x + o(x)$ per $x \to +\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + o(x)) + x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x + o(x) \overset{2x+o(x)\sim 2x}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.
Nello stesso modo possiamo procedere per $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + o(x) + \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x$, perchè anche $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x e quindi trascurabile rispetto a x per $x \to +\infty$.

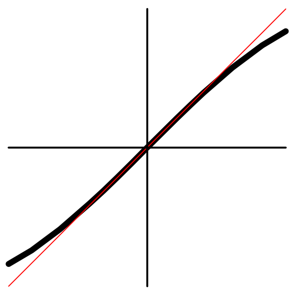
Esempio 4.20 Si vuole calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)$. Se cerchiamo di procedere allo stesso modo dell'esempio precedente, otteniamo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + o(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} o(x)$, che non ci permette di calcolare il limite, in quanto la notazione $o(x)$ ci dà informazioni (di tipo qualitativo) solo quando si confronta con la funzione x per $x \to +\infty$, ma non in assoluto.
Per limiti di questo tipo, in cui compaiono radici, si ricorre al metodo della "razionalizzazione":

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \left(\sqrt{x^2 - x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} \overset{\text{vedi Es. 4.19}}{=}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x + o(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Comportamento di alcune funzioni elementari per $x \to 0$.

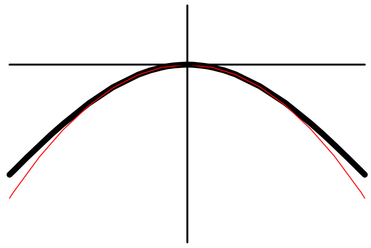
Si ha il seguente elenco di limiti **notevoli**:

$$(1) \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$



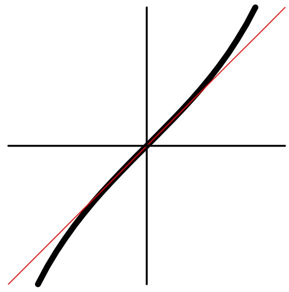
grosso: $\sin x$, sottile: x

(2) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{-\frac{1}{2}x^2}=1}$$



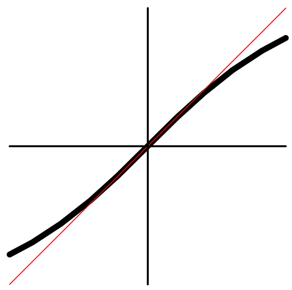
grosso: $\cos(x)-1$, sottile: $-\frac{1}{2}\ x^2$

(3) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1}$$



grosso: $\tan x$, sottile: x

(4) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1}$$

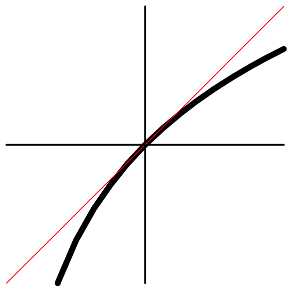


grosso: $\arctan x$, sottile: x

(5) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$$

da cui

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a}}$$

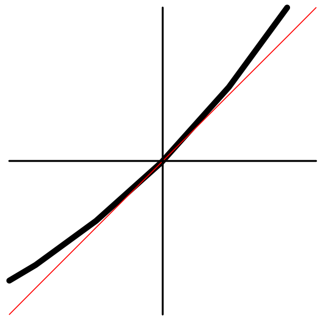


grosso: $\log(1+x)$, sottile: x

(6) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a}$

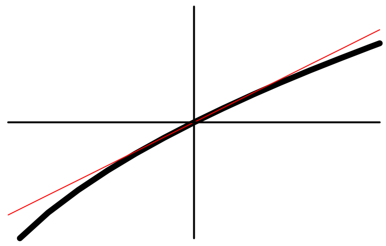
in particolare per $a = e$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$



grosso: $e^x - 1$, sottile: x

(7) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1}$



grosso: $(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1$, sottile: $\frac{1}{2}x$

La verifica di (1), (2), (3) e (4) è mostrata nelle note 1, 2, 3 e 4. I limiti (5), (6) e (7) sono dedotti (nelle note 5, 6 e 7) dal limite notevole:

(8)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
o equivalentemente, mediante il cambio di variabili $t = \dfrac{1}{x}$
$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Possiamo riscrivere i limiti notevoli precedenti utilizzando la nozione di asintotico, (o quella di trascurabile), esprimendo cosi̇̀ il comportamento di alcuni infinitesimi per $x \to 0$, in cui compaiono funzioni elementari:

Per $x \to 0$

- $\sin x \sim x$
- $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\log a}x$
- $\log(1+x) \sim x$
- $a^x - 1 \sim x \log a$
- $e^x - 1 \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

cioé

per $x \to 0$

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $\tan x = x + o(x)$
- $\arctan x = x + o(x)$
- $\log_a(1+x) = \frac{1}{\log a}x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $a^x - 1 = x \log a + o(x)$
- $e^x - 1 = x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$

Esempio 4.21 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{(e^{x^3}-1)}$. È un quoziente: si può sostituire nel calcolo del limite un asintotico dell'intera funzione al numeratore e dell'intera funzione al denominatore. Per $x \to 0$, $\left(\sqrt{1+x}-1\right) \sim \dfrac{x}{2}$ e $(e^{x^3}-1) \sim x^3$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{e^{x^3}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = +\infty.$$

Equivalentemente si poteva sostituire le espressioni $\left(\sqrt{1+x}-1\right) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ e $(e^{x^3}-1) = x^3 + o(x^3)$, oppure ricondursi direttamente ai limiti notevoli:

Esempio 4.22 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)+x^2}{2x^3-\sin x}$. È un quoziente: si può sostituire nel calcolo del limite un asintotico dell'intera funzione al numeratore e dell'intera funzione al denominatore, ma poichè tali funzioni sono definite come somme occorre dapprima usare l'o-piccolo e ragionare caso per caso per trovarlo. Per $x \to 0$

$$\log(1+x)+x^2 = x+o(x)+x^2 = x+o(x) \sim x$$

poichè anche x^2 è trascurabile rispetto a x e, poichè $\sin x \sim x$, cioè $\sin x = x + o(x)$

$$2x^3 - \sin x = 2x^3 - x + o(x) \sim -x.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+x^2}{2x^3-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x} = -1.$$

Per le regole sul limite di una funzione composta, mediante un "cambio di variabile" dalla tabella precedente si deduce:

per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) \sim (\ )$ • $\cos(\ ) - 1 \sim -\frac{1}{2}(\ )^2$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1+(\ )) \sim (\ )$ • $e^{(\ )} - 1 \sim (\ )$ • $(1+(\ ))^\alpha - 1 \sim \alpha(\ )$	cioé	per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) = (\ ) + o((\ ))$ • $\cos(\ ) - 1 = -\frac{1}{2}(\ )^2 + o((\ )^2)$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1+(\ )) = (\ ) + o((\ ))$ • $e^{(\ )} - 1 = (\ ) + o((\ ))$ • $(1+(\ ))^\alpha - 1 = \alpha(\ ) + o((\ ))$

Esempio 4.23 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x}$. È il limite di un quoziente: posso sostituire un asintotico al numeratore.
Per $x \to 0^+$, $(x^2) \to 0^+$, quindi $1-\cos(x^2) = -\left(\cos(x^2)-1\right) \sim -\left(-\frac{1}{2}(x^2)^2\right) = +\frac{1}{2}x^4$, da cui:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{+\frac{1}{2}x^4}{x} = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{2}x^3 = 0.$$

Esempio 4.24 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{x-1}$. È il limite di un quoziente: posso sostituire un asintotico sia al numeratore che al denominatore. Per $x \to 1$, $(x-1) \to 0$, quindi $[\cos(x-1)-1] \sim -\frac{1}{2}(x-1)^2$, perciò

$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)} = 0$ (si poteva altrimenti operare il cambio di variabile $t = x-1$).

Esempio 4.25 Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Per $x \to +\infty$, $\frac{3}{x} \to 0$ e $\frac{1}{x} \to 0$ quindi $\log\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x} \sim \frac{3}{x}$ e $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$, perciò:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = 3.$$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

La forma indeterminata $0 \cdot \infty$, che si ha per il limite del prodotto: $\lim_{x\to P} f(x)g(x)$ con $\lim_{x\to P} f(x) = 0$, $\lim_{x\to P} g(x) = +\infty$ o $-\infty$, si può ricondurre alla forma $\frac{0}{0}$ o, quando $\lim_{x\to P} f(x) = 0^+$ o 0^-, alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ mediante

$$\lim_{x\to P} f(x)g(x) = \lim_{x\to P} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to P} f(x)g(x) = \lim_{x\to P} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

oppure mediante opportuni cambi di variabile (usando le regole sul limite della funzione composta).

Esempio 4.26 Il limite notevole

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x^\beta) = 0 \qquad\qquad \text{per} \quad \alpha > 0} \tag{9}$$

si calcola con il cambio di variabile $x = t^{-1}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x^\beta) = \lim_{t\to+\infty} t^{-\alpha} \log\left(t^{-\beta}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\beta \log t}{t^\alpha} = 0.$$

Esempio 4.27 $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^3 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t^3} = +\infty$

Come si è visto in Arg.3, limiti del tipo $\lim_{x\to P} f(x)^{g(x)}$, con $f(x) > 0$ in un intorno di P, si riconducono a limiti di prodotti, mediante la trasformazione $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$ nell'intorno di P, quindi l'unica eventuale forma indeterminata a cui si perviene è quella $0 \cdot \infty$:

Esempio 4.28 $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4+x^2}\right)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log\left(\frac{1}{x^4+x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} x\log\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\left(-x\log x^2\right)} \overset{(9)}{=} e^0 = 1.$

Asintoti

La proprietà di una retta di “avvicinarsi” al grafico di una funzione quando i punti del dominio o dell’immagine della funzione tendono a $+\infty$ o a $-\infty$ si traduce nella definizione di asintoto.

Definizioni 4.29

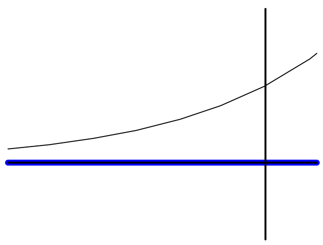
• La retta di equazione $y = a$ è **asintoto orizzontale** per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ (o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$).

• La retta di equazione $x = x_0$ è **asintoto verticale** per f se $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ (o $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ o $-\infty$).

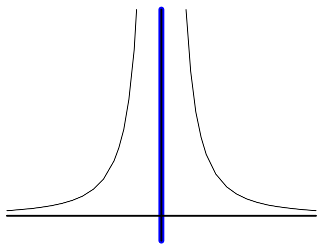
• La retta di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è **asintoto obliquo** per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \qquad (\text{o } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx - q) = 0)$$

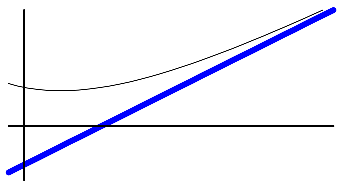
Esempi 4.30 2^x ha asintoto orizzontale $y = 0$, $\dfrac{1}{x^2}$ ha asintoto verticale $x = 0$, $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + \dfrac{1}{2}(x-1)\right]$ ha asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}(x-1)$ per $x \to +\infty$:



asintoto orizzontale $y = 0$



asintoto verticale $x = 0$



asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}(x-1)$

Esempio 4.31 La retta $y = x - 2$ è asintoto obliquo per $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ per $x \to +\infty$, in quanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2} - x + 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+4}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x+2} = 0.$

Operativamente, per determinare gli eventuali asintoti obliqui di una funzione f si usano le due condizioni date dalla seguente

Proposizione 4.32 La retta di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se e solo se valgono contemporaneamente le due condizioni seguenti:

$$\begin{cases} (1) \quad \lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\[2ex] (2) \quad \lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - mx) = q \end{cases}$$

Notiamo che la condizione (1) è equivalente a richiedere che $f \sim mx$ per $x \to +\infty$ (o $-\infty$). Il metodo per determinare gli eventuali asintoti obliqui di una funzione f è il seguente:

- se per $x \to +\infty$ (o$-\infty$), $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = 0, +\infty, -\infty$ o non esiste
  allora f NON ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$ (o$-\infty$);
- se per $x \to +\infty$ (o $-\infty$), $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$
  allora f PUÒ avere asintoti obliqui per $x \to +\infty$ (o $-\infty$),
  ma per sapere se li ha veramente, si deve verificare se vale la condizione (2), cioè calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - mx)$ e vedere se esiste finito.

Esempio 4.33 Data $f(x) = x\log x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\log x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, quindi f NON ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Esempio 4.34 Data $f(x) = \dfrac{x\log x + 2\sin x}{2\log x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{x\log x + 2\sin x}{2\log x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\log x + 2\sin x}{x\,(2\log x)} = \dfrac{1}{2}$, quindi f potrebbe avere asintoti obliqui. Dobbiamo calcolare quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\log x + 2\sin x}{2\log x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log x + 2\sin x - x\log x}{2\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\log x} \overset{\text{Cor. 3.52}}{=} 0$$

da cui si deduce che anche la condizione (2) è soddisfatta e che $y = \dfrac{1}{2}x$ è asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$.

Esempio 4.35 Data $f(x) = \dfrac{x\log x + 2\sqrt{x}}{2\log x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{x\log x + 2\sqrt{x}}{2\log x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x + 2\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{2\log x} = \dfrac{1}{2}$ per $x \to +\infty$,quindi f potrebbe avere asintoti obliqui. Dobbiamo calcolare quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\log x + 2\sqrt{x}}{2\log x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log x + 2\sqrt{x} - x\log x}{2\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty$$

da cui si deduce che la condizione (2) non è soddisfatta, perciò possiamo concludere che f non ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Nota 1. Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Dalla disuguaglianza:

$$(0 <)\sin x < x < \tan x \qquad\qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(che segue direttamente dall'interpretazione geometrica del seno e della tangente come esposto in Arg.2), dividendo per $\sin x$ e passando ai reciproci si ottiene

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad\qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Poichè $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$, applicando il Teorema del confronto, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Per il caso $x \to 0^-$, basta operare il cambio di variabile $x = -t$: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Nota 2: Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$.
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(\cos x + 1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{-\frac{1}{2}x^2\left(\cos x + 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{-x^2}\left(\frac{2}{\cos x + 1}\right) = 1$$

Nota 3: Dimostriamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$.
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(\cos x + 1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

Nota 4: Il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$ si deduce da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ usando il cambio di variabile $x = \tan t$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\arctan(\tan t)}{\tan t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1.$$

Nota 5: Il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ si deduce da $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ usando le regole sui limiti delle funzioni composte e la continuità del logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\log\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \log\left[\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \log e = 1.$$

Nota 6: Il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = 1$ si deduce dal limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ facendo il cambio di variabile $a^x - 1 = t$ $(x = \log_a(1+t))$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\log(1+t)}{\log a}} = \lim_{t\to 0}\left[\log a\frac{1}{\dfrac{\log(1+t)}{t}}\right] = \log a.$$

Nota 7: Il limite $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1}$ si deduce dal limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ facendo il cambio di variabile $x = e^t - 1$ $(t = \log(1+x))$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha\left(e^t - 1\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha t}{\alpha t} = 1,\ \text{visto che da 4, } e^{(\ )} - 1 \sim (\ ),\ \text{per } (\ ) \to 0.$$