

## Lezione 7

### Soluzioni Esercizi

**Sol. Ex. 7.1.**

a)  $(12.12)^\circ = 12^\circ 7' 12''$     b)  $(23.7)^\circ = 23^\circ 42'$     c)  $\left(\frac{13}{4}\right)^\circ = 3^\circ 15'$     d)  $(15.21)^\circ = 15^\circ 12' 36''$   
e)  $\left(\frac{55}{18}\right)^\circ = 3^\circ 3' 20''$     f)  $2752'' = 45' 52''$     g)  $222' = 3^\circ 42'$     h)  $\left(\frac{313}{3}\right)' = 1^\circ 44' 20''$

**Sol. Ex. 7.2.**

Da  $\alpha_{rad} = \alpha_{gr} \times \frac{\pi}{180^\circ}$ , si ottiene:

a)  $\frac{\pi}{15}$     b)  $\frac{\pi}{10}$     c)  $\frac{3\pi}{4}$     d)  $\frac{\pi}{180} \simeq 0.0175$     e)  $\frac{49\pi}{60}$

**Sol. Ex. 7.3.**

Da  $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi}$ , si ottiene:

a)  $240^\circ$     b)  $105^\circ$     c)  $67^\circ 30'$     d)  $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \simeq (57.296)^\circ \simeq 57^\circ 17' 46''$

**Sol. Ex. 7.4.**

Da  $\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$  e  $\alpha_{gr} = \alpha_{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi}$ , si ottiene:

a)  $\alpha_{rad} = \frac{5}{2}$  e  $\alpha_{gr} \simeq (143.24)^\circ = 143^\circ 14' 24''$  (arrotondamento per eccesso)  
b)  $\alpha_{rad} = \frac{1}{3}$  e  $\alpha_{gr} \simeq (19.10)^\circ = 19^\circ 6'$  (arrotondamento per eccesso)  
c)  $\alpha_{rad} = 1$  e  $\alpha_{gr} \simeq (57.30)^\circ = 57^\circ 18'$  (arrotondamento per eccesso)  
d)  $\alpha_{rad} = 0.12$  e  $\alpha_{gr} \simeq (6.88)^\circ = 6^\circ 52' 48''$  (arrotondamento per eccesso)

**Sol. Ex. 7.5.**

Si ha  $\frac{l}{r} = 4$  e  $l = 3$  m; dunque  $d = 2r = 2 \cdot \frac{3}{4} = 1.5$  m.

**Sol. Ex. 7.6.**

Da  $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha_{gr}$ , si ottiene  $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 44^\circ = \frac{11\pi}{45} \simeq 0.77$  (arrotondamento per eccesso).

**Sol. Ex. 7.7.** <sup>(1)</sup>

$$\sin \alpha = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{(0.5)^2 - (0.3)^2}}{0.5} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \tan \alpha = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4} = 0.75 ;$$

$$\sin \beta = \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \tan \beta = \frac{4}{3} = 1.\bar{3} .$$

**Sol. Ex. 7.8.**

a)  $\sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -1.$

b) Si ha  $\frac{11}{3}\pi = 4\pi - \frac{\pi}{3}$ . Quindi

$$\sin \left( \frac{11}{3}\pi \right) = \sin \left( 4\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \left( \frac{11}{3}\pi \right) = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, \quad \tan \left( \frac{11}{3}\pi \right) = -\sqrt{3}.$$

c)  $\sin (357\pi) = \sin (\pi) = 0, \quad \cos (357\pi) = \cos (\pi) = -1, \quad \tan (357\pi) = \tan (\pi) = 0 .$

d)  $\sin \left( -\frac{3}{4}\pi \right) = -\sin \left( \frac{3}{4}\pi \right) = -\sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\cos \left( -\frac{3}{4}\pi \right) = \cos \left( \frac{3}{4}\pi \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \left( -\frac{3}{4}\pi \right) = 1 .$$

e) Si ha  $-\frac{27}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 14\pi$ . Quindi

$$\sin \left( -\frac{27}{2}\pi \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - 14\pi \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad \cos \left( -\frac{27}{2}\pi \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\tan \left( -\frac{27}{2}\pi \right) \text{ non è definita.}$$

f)  $\sin \left( \frac{7}{6}\pi \right) = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left( \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos \left( \frac{7}{6}\pi \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\tan \left( \frac{7}{6}\pi \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

g)  $\sin \left( \frac{2}{3}\pi \right) = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \left( \frac{2}{3}\pi \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2},$

$$\tan \left( \frac{2}{3}\pi \right) = -\sqrt{3}.$$

---

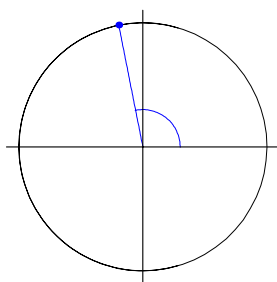
<sup>1)</sup> Noto il seno di un angolo  $\alpha$ , il suo coseno si può ricavare dall'identità fondamentale. Nella soluzione della prima parte di questo esercizio si sceglie invece di usare direttamente la definizione di coseno.

**Sol. Ex. 7.9.**

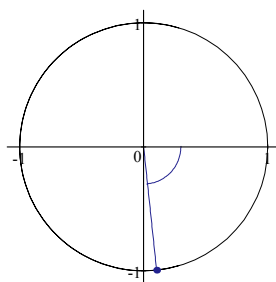
Osservare che:

- ▷  $\frac{9}{16}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$  e quindi il corrispondente punto  $P$  sulla circonferenza goniometrica sta nel II quadrante, “vicino all’asse  $y$ ”;
- ▷  $-\frac{7}{15}\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{30}\pi$  e quindi il corrispondente punto  $P$  sulla circonferenza goniometrica sta nel IV quadrante, “molto vicino all’asse  $y$ ”;
- ▷  $\frac{23}{20}\pi = \pi + \frac{3\pi}{20}$  è minore, ma non molto, di  $\pi + \frac{\pi}{6}$ : quindi il corrispondente punto  $P$  sulla circonferenza goniometrica sta nel III quadrante, “molto vicino” al punto  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ;
- ▷  $-\frac{5}{9}\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\pi$  e quindi il corrispondente punto  $P$  sulla circonferenza goniometrica sta nel III quadrante, “vicino all’asse  $y$ ”;
- ▷  $-\frac{7}{18}\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\pi$  e quindi il corrispondente punto  $P$  sulla circonferenza goniometrica sta nel IV quadrante, “vicino all’asse  $y$ ”.

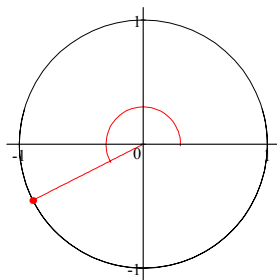
La maggiore o minore vicinanza all’asse  $y$  si legge sulla frazione di  $\pi$  che si aggiunge o si toglie a  $\frac{\pi}{2}$  (o a  $-\frac{\pi}{2}$ ). Le informazioni richieste si leggono agevolmente sui grafici così ricavati.



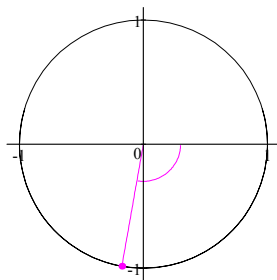
$$\frac{9}{16}\pi$$



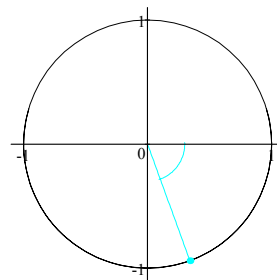
$$-\frac{7}{15}\pi$$



$$\frac{23}{20}\pi$$



$$-\frac{5}{9}\pi$$



$$-\frac{7}{18}\pi$$

a) sono positivi  $\sin\left(\frac{9}{16}\pi\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{7}{15}\pi\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right)$ ,  $\tan\left(\frac{23}{20}\pi\right)$  e  $\tan\left(-\frac{5}{9}\pi\right)$ ;

b)  $\tan\left(-\frac{7}{15}\pi\right) < \tan\left(\frac{9}{16}\pi\right) < \tan\left(-\frac{7}{18}\pi\right) < \tan\left(\frac{23}{20}\pi\right) < \tan\left(-\frac{5}{9}\pi\right)$ ;

- c)  $\triangleright \frac{9}{16}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ : poiché  $\frac{\pi}{16}$  è un angolo abbastanza piccolo (corrisponde a  $11^\circ 15'$ ),  
 $\sin\left(\frac{9}{16}\pi\right)$  è abbastanza prossimo a 1 (vale circa 0.98);
- $\triangleright -\frac{7}{15}\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{30}$ : poiché  $\frac{\pi}{30}$  è un angolo abbastanza piccolo (corrisponde a  $6^\circ$ ),  
 $\cos\left(-\frac{7}{15}\pi\right)$  è abbastanza prossimo a 0 (vale circa 0.1);
- $\triangleright \frac{23}{20}\pi = \pi + \frac{3\pi}{20} < \pi + \frac{\pi}{6}$  e quindi  $\sin\left(\frac{23}{20}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)$  è in realtà maggiore di  
 $-0.5 = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ ;
- $\triangleright -\frac{3}{4}\pi < -\frac{5}{9}\pi < -\frac{\pi}{2}$ : quindi  $\tan\left(-\frac{5}{9}\pi\right)$  è maggiore di  $1 = \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ ;
- $\triangleright -\frac{7}{18}\pi < -\frac{\pi}{3}$ : quindi  $\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right)$  è minore di  $0.5 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .

**Sol. Ex. 7.10.**

a)  $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \simeq 0.97$ ,

$\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \simeq 0.26$ ,

$\tan\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} \simeq 3.73$ .

b)  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \simeq 0.97$ ,

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \simeq -0.26$ ,

$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -(2 + \sqrt{3}) \simeq -3.73$ .

**Sol. Ex. 7.11.**

La spiaggia e la cima costituiscono gli estremi dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono un angolo acuto  $\alpha$  ed il lato opposto (che misura 560 m). La distanza che vogliamo trovare corrisponde alla misura del lato adiacente ad  $\alpha$  che si ricava da  $\tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adiac}}$ , dopo aver calcolato la tangente di  $\alpha$ . Visto che  $\tan(4^\circ 30') \simeq 0.08$ , l'isola dista dalla spiaggia circa  $\frac{560}{0.08}$  m = 7 Km.

**Sol. Ex. 7.12.**

Si conosce la misura dell'ipotenusa (lunghezza del tratto di pista: 500 m) e un angolo acuto  $\alpha$  di un triangolo rettangolo: il lato opposto dà la variazione di quota, che può essere ricavato da  $\sin \alpha = \frac{opp}{ipot}$ , dopo aver calcolato il seno dell'angolo di inclinazione. Visto che  $\sin(6^\circ) \simeq 0.1$ , la variazione di quota è di circa  $500 \times 0.1 = 50$  m e la quota di arrivo è quindi di 2300 m circa.

**Sol. Ex. 7.13.**

Si applica il teorema dei seni, per cui servono  $\sin(17^\circ) \simeq 0.29$ ,  $\sin(34^\circ) \simeq 0.56$  e  $\sin(129^\circ) \simeq 0.78$ . Allora la misura in metri di  $BC$  è  $\frac{20}{\sin(17^\circ)} \times \sin(34^\circ) \simeq \frac{20}{0.29} \times 0.56$  cioè circa 38.6 m e la misura in metri di  $AC$  è  $\frac{20}{\sin(17^\circ)} \times \sin(129^\circ) \simeq \frac{20}{0.29} \times 0.78$  cioè circa 53.8 m.

**Sol. Ex. 7.14.**

Si applica il teorema di Carnot, per cui serve  $\cos(95^\circ) \simeq -0.0872$ . Allora la misura in centimetri di  $AC$  è  $\sqrt{16 + 49 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos(95^\circ)} \simeq \sqrt{65 + 56 \times 0.0872}$  cioè circa 8.36 cm.