Argomento 11
Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

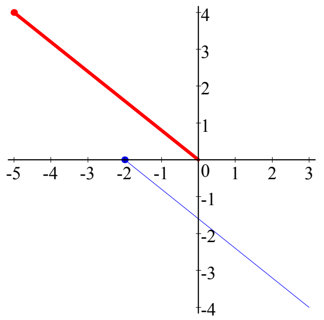
ESERCIZIO 11.6 Si ricordi che dire che $\widehat{xs} = -\pi/3$ significa che la retta s forma con l'asse x un angolo di $\pi/3$ in verso orario.

ESERCIZIO 11.11 Se $\mathbf{w}$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$ il vettore componente di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w}$.

ESERCIZIO 11.44 Schematizzando le due rive del fiume come due rette parallele, il tragitto minimo è quello ortogonale alle due rette.

SOLUZIONI [(1)]

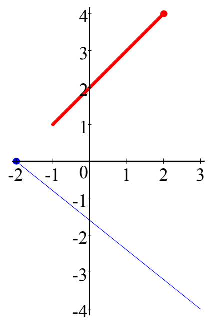
Sol. Ex. 11.1



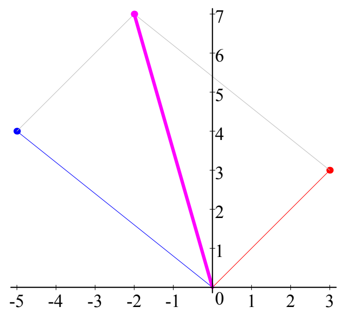
$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu, $\overrightarrow{OP}$ spesso e rosso.

$\overrightarrow{OP} = (-2-3, 0-(-4)) = (-5, 4)$

Sol. Ex. 11.2



A sinistra sono rappresentati i vettori da sommare.
A destra sono rappresentati i vettori ad essi equivalenti applicati nell'origine e se ne calcola la somma con la regola del parallelogramma.



$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu; $\overrightarrow{CD}$ spesso e rosso

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ spesso e violetto

$\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$; $\overrightarrow{CD} = (3, 3)$: quindi la somma per componenti è $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-2, 7)$.

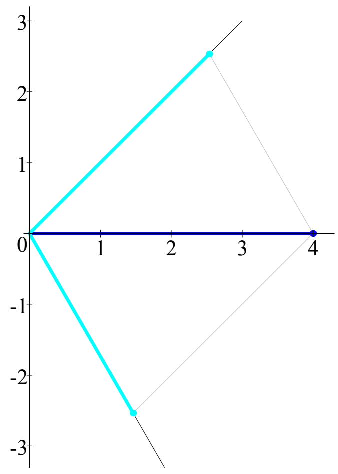
Sol. Ex. 11.3
C). Infatti $\overrightarrow{AB} = (4-1, 7-3) = (3, 4)$ e quindi $-2\overrightarrow{AB} = (-6, -8)$. Si ha
$\overrightarrow{AC} = (-2-1, -1-3) = (-3, -4) = -\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CD} = (6-(-2), 5-(-1)) = (8, 6)$
$\overrightarrow{BC} = (-2-4, -1-7) = (-6, -8) = -2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

Sol. Ex. 11.4
A). Infatti $\overrightarrow{CD} = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2) = (2(b_1 - a_1), 2(b_2 - a_2)) = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2\overrightarrow{AB}$

Sol. Ex. 11.5
C). Infatti $\overrightarrow{AC} = (2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2)$ mentre $2\overrightarrow{AB} = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2)$: quindi i due vettori sono uguali se e solo se $2a_1 = a_1$ e $2a_2 = a_2$ cioè se e solo se $a_1 = a_2 = 0$.

1) Anche in questi svolgimenti, come già nella seconda parte della teoria, la freccia che denota il verso del vettore è rappresentata con un pallino (per motivi puramente tecnici).

Sol. Ex. 11.6



Per comodità disegnamo $\mathbf{v}$ come il vettore $\overrightarrow{OP} = (4,0)$ e pensiamo le rette r ed s passanti per O: quindi anche i vettori componenti di $\overrightarrow{OP}$ saranno rappresentati come frecce $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ uscenti da O.

Quanto al modulo di $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ osserviamo che:

R appartiene alla retta di equazione $y = x$ e quindi ha coordinate (a, a)

S appartiene alla retta di equazione $y = -\sqrt{3}x$ e quindi ha coordinate $\left(b, -\sqrt{3}b\right)$:

dunque $\overrightarrow{OR} = (a, a)$ e $\overrightarrow{OS} = \left(b, -\sqrt{3}b\right)$

Ora $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP}$ se e solo se $(a, a) + \left(b, -\sqrt{3}b\right) = (4, 0)$

cioè per $a = 6 - 2\sqrt{3}$ e $b = 2\sqrt{3} - 2$.

Dunque $\left|\overrightarrow{OR}\right| = |(a, a)| = |a|\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

e $\left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|\left(b, -\sqrt{3}b\right)\right| = |b|\sqrt{4} = 4\sqrt{3} - 4$.

Attenzione: qui non è lecito usare il prodotto scalare per trovare i vettori componenti. Infatti tali vettori sono ottenuti scomponendo $\mathbf{v}$ con la regola del parallelogramma, che qui non è un rettangolo, poiché s non è ortogonale a r. Invece con il prodotto scalare si può solo trovare la proiezione ortogonale di un vettore su una retta!

Sol. Ex. 11.7

Se $B = (x, y, z)$, si deve avere $\overrightarrow{AB} = (x - 1, y, z - 2) = (4, -2, 1)$: uguagliando le componenti si trova $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$; dunque $B = (5, -2, 3)$.

Sol. Ex. 11.8

Sì: $(1, 2, 1) - (2, 1, -1) - (-1, 1, 2) = (1 - 2 + 1, 2 - 1 - 1, 1 + 1 - 2) = (0, 0, 0)$. Si può riscrivere l'uguaglianza come $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, quindi il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ sta nel piano individuato da $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$.

Sol. Ex. 11.9

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 1) - (-1, 1, 3) = (1 + 1, 3 - 1, 1 - 3) = (2, 2, -2)$. Quindi $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.

Sol. Ex. 11.10

B). Infatti $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4) = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -7$. Attenzione: le risposte **A)** e **C)** sono da escludere a priori, poiché <u>il prodotto scalare è un numero, non un vettore</u>!

Sol. Ex. 11.11

$\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$. Dunque il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w} = \left(-1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}\right)\mathbf{w} = \frac{2}{5}\mathbf{w} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{8}{25}, \frac{6}{25}\right)$.

Sol. Ex. 11.12

B). Infatti da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 1 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4+5+1} \cdot \sqrt{1+5+4}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$. Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dai due vettori è $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$.

Sol. Ex. 11.13
Da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{1\cdot2+2\cdot1+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2}$.

Similmente da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta'$ si ricava $\cos\theta' = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{w}|} = \frac{1\cdot(-1)+2\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2}$.

Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dalle due coppie di vettori è lo stesso e vale $\pi/3$.

Sol. Ex. 11.14
Se $\mathbf{w} = (x, y, z)$, si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = x + y = 0$ e $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 2y - z = 0$. Dunque, un vettore soluzione è $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$. Ci sono però infiniti vettori con questa proprietà, quelli della forma $(-t, t, 2t)$, con t reale non nullo.

Sol. Ex. 11.15
C). Infatti $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1) = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, 7)$. Attenzione: le risposte **B)** e **D)** sono da escludere a priori, poiché <u>il prodotto vettoriale è un vettore, non un numero!</u>

Sol. Ex. 11.16
$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere proporzionali (ciò non esclude che uno o entrambi siano nulli). Infatti

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \Longleftrightarrow 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

e il prodotto vettoriale si annulla se e solo se i due vettori sono proporzionali.

Sol. Ex. 11.17
Invece di calcolare direttamente i due prodotti vettoriali, usiamo le proprietà di tale prodotto: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \Longleftrightarrow \mathbf{u}$ e $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ hanno la stessa direzione. Risulta $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1, 2, -1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}$. Quindi la risposta è affermativa

Sol. Ex. 11.18
Si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (h, -1, h) \bullet (2 - h, 1, 0) = 0$, cioè $h\,(2 - h) - 1 = 0$, che ha la sola soluzione $h = 1$. Per tale valore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 2)$.

Sol. Ex. 11.19
Si può procedere come nell'esercizio 11.14. Oppure: un vettore contemporaneamente ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è proporzionale a $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (2, 1, -4) \wedge (3, -2, 1) = (-7, -14, -7) = -7\,(1, 2, 1)$.
Se h è un numero reale non nullo, il modulo $|h\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})| = |-7h\,(1, 2, 1)| = 7\,|h| \cdot \sqrt{1 + 4 + 1} = 7\sqrt{6}\,|h|$ vale 1 se e solo se $h = 1/7\sqrt{6}$ o $h = -1/7\sqrt{6}$.
Ci sono dunque due possibili soluzioni: $\big(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\big)$ e $\big(-1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\big)$.

Sol. Ex. 11.20
I vettori sono quelli dell'esercizio 11.17. Poiché $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, c'è un vettore che è ortogonale a tutti e tre i vettori e quindi essi sono complanari. Un altro modo di procedere è quello di chiedersi se $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = 0$:

$$((-2, -4, 2) \wedge (2, 1, 1)) \bullet (1, -1, 2) = (-6, 6, 6) \bullet (1, -1, 2) = -6 - 6 + 12 = 0.$$

Sol. Ex. 11.21
$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere complanari (ciò non esclude che qualcuno sia nullo). Infatti
$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}) \iff \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \mathbf{u}\bullet(-\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) \iff \mathbf{u}\bullet(2\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = 0 \iff \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = 0$
e il prodotto misto si annulla se e solo se i tre vettori sono complanari.

Sol. Ex. 11.22
Il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ o è nullo oppure, per definizione, è ortogonale a $\mathbf{u}$: in entrambi i casi il loro prodotto scalare è nullo. Invece, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono proporzionali (e, in particolare, nessuno dei due è nullo), il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ non è nullo e quindi non può essere proporzionale a $\mathbf{u}$ avendo direzione ad esso ortogonale: quindi il vettore $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ non può essere nullo.

Sol. Ex. 11.23
Usando le proprietà del prodotto vettoriale si ha
$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{u}\wedge\mathbf{u} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
$(\mathbf{u}+h\mathbf{v})\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{v}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{v}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Come conseguenza della prima si ha $(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u}))\bullet\mathbf{w} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$.
Invece, usando le proprietà dei prodotti scalare e vettoriale si ha
$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet(\mathbf{w}+h\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h\,(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h\cdot 0$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{u}$.
Queste proprietà hanno ben noti corrispettivi geometrici: l'area di un parallelogrammo non varia facendo slittare un lato, se la distanza dal lato opposto rimane costante; similmente il volume di un parallelepipedo non varia facendo slittare una faccia, se la distanza dalla faccia opposta rimane costante.

Sol. Ex. 11.24
Ha senso solo la **B)** che rappresenta il prodotto scalare di due vettori. Invece:
in **A)** $\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ e un numero,
in **C)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$,
in **D)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto scalare tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$.

Sol. Ex. 11.25
Hanno senso la **B)** e la **C)**, mentre la **A)** non ha senso poiché il prodotto vettoriale non è associativo e quindi non si possono "togliere le parentesi". Notiamo tra l'altro che, visto che $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\bullet\mathbf{c} = (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\bullet\mathbf{b}$, si ha:
$(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}))\bullet\mathbf{u} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{u})\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \mathbf{0}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = 0$,
mentre non è detto che $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$ sia nullo: ad esempio per $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{j}$ si ha
$((\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i} = (\mathbf{k}\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i} = -\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = -1$.

Applicazioni geometriche

Attenzione Come osservato nella teoria, una retta può essere rappresentata in forma parametrica in infiniti modi, tra di loro equivalenti. Inoltre, ci sono infiniti modi di rappresentarla come intersezione di due piani, visto che per una retta passano infiniti piani distinti. Quindi può darsi che, anche svolgendo correttamente un esercizio, alla fine si trovi un risultato diverso da quello proposto: per verificare la correttezza del risultato, si può - ad esempio - controllare se <u>due</u> punti della retta trovata hanno coordinate che verificano <u>tutte</u> le equazioni contenute nella soluzione proposta.

Sol. Ex. 11.26

Scegliendo di rappresentare i punti P della retta tramite l'equazione vettoriale: $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BA}$, si ottengono le equazioni parametriche: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Eliminando t dalla prima e sostituendo: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.27

Scegliendo di rappresentare i punti P della retta tramite l'equazione vettoriale: $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$, si ottengono le equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Ricavando t in tutte le equazioni ed uguagliando: $\dfrac{x-1}{4} = y = \dfrac{z-1}{2}$.

Sol. Ex. 11.28

$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta in quanto è intersezione di due piani aventi vettori direttori $(2, -1, 3)$ e $(0, 1, -4)$ non proporzionali (quindi i piani non sono paralleli). Si può passare in forma parametrica dando (ad esempio) a y valore variabile t e ricavando x e z dalle due equazioni: $\begin{cases} x = 5/4 + t/8 \\ y = t \\ z = -1/2 + t/4 \end{cases}$. Dunque un vettore direttore è dato ad esempio da $(1, 8, 2)$.

Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse x è $\frac{(1,8,2)\bullet(1,0,0)}{|(1,8,2)|} = \frac{1}{\sqrt{69}}$.

Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse y è $\frac{(1,8,2)\bullet(0,1,0)}{|(1,8,2)|} = \frac{8}{\sqrt{69}}$.

Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse z è $\frac{(1,8,2)\bullet(0,0,1)}{|(1,8,2)|} = \frac{2}{\sqrt{69}}$.

Sol. Ex. 11.29

La retta è assegnata come intersezione di due piani $\begin{cases} x + z = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Equazioni parametriche corrispondenti: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$: dunque un suo vettore direttore è $(1, 3, -1)$.

La retta cercata, dovendo essere parallela ad essa ha la stessa direzione e quindi, passando per $A = (1, 1, -1)$, ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.30

Il vettore direttore del piano, $\mathbf{v} = (2, 1, -4)$, è ortogonale al piano e quindi dà anche la direzione della retta, che ha quindi equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$.

Ricavando t in tutte le equazioni ed uguagliando: $\dfrac{x-3}{2} = y + 2 = \dfrac{1-z}{4}$.

Sol. Ex. 11.31

Vettore direttore della prima retta: $\mathbf{v} = (3, -2, 1/2)$.
Vettore direttore della seconda retta: $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$.
Vettore ortogonale ad entrambe: $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (-11/2, -13/2, 7)$.

Equazioni parametriche della retta cercata: $\begin{cases} x = 1 + 11t \\ y = 2 + 13t \\ z = 3 - 14t \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.32

Le due rette sono sicuramente diverse poiché il vettore direttore della prima $(2, 1, -4)$ non è proporzionale a quello $(11, 13, -14)$ della seconda: questo dice anche che le due rette non sono parallele. Per stabilire se le due rette sono incidenti, visto che una è in forma non parametrica, possiamo vedere se ci sono punti $(1 + 11t, 2 + 13t, 3 - 14t)$ della seconda che appartengono alla prima che ha equazioni: $\dfrac{x-3}{2} = y + 2 = \dfrac{1-z}{4}$ cioè se c'è qualche valore di t per cui valgono le due uguaglianze $\dfrac{(1+11t)-3}{2} = (2 + 13t) + 2 = \dfrac{1-(3-14t)}{4}$. Ma

$$\frac{11t-2}{2} = 4 + 13t = \frac{-2+14t}{4} \iff \begin{cases} 22t - 4 = -2 + 14t \\ 11t - 2 = 8 + 26t \end{cases} \iff \begin{cases} 8t = 2 \\ 15t = -10 \end{cases}.$$

Visto che queste due equazioni non possono essere verificate contemporaneamente, si conclude che le due rette non hanno punti in comune: dunque sono sghembe.

Sol. Ex. 11.33

Si possono scegliere come vettori direttori (rispettivamente) della prima e della seconda retta $(2, 1, -4)$ e $(1, -1, 1)$: dunque il coseno di uno degli angoli tra le due rette vale

$$\frac{(2,1,-4)\bullet(1,-1,1)}{|(2,1,-4)|\cdot|(1,-1,1)|} = \frac{2-1-4}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-3}{3\sqrt{7}} = \frac{-1}{\sqrt{7}}.$$

Ne consegue che tale angolo è ottuso (e misura $\arccos\frac{-1}{\sqrt{7}} \simeq 1.958$ radianti). L'angolo cercato è il suo supplementare e quindi misura $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}} \simeq 1.1832$ radianti.

Sol. Ex. 11.34
Vettore direttore della retta assegnata: $(-1, 1/3, 1)$; vettore direttore del piano: $(1, 1, 1)$.
Il vettore direttore (a, b, c) della retta cercata deve essere ortogonale a entrambi, quindi si può scegliere $(a, b, c) = (1, 1, 1) \wedge (-3, 1, 3) = (2, -6, 4)$ oppure un vettore ad esso proporzionale.
Equazioni parametriche della retta cercata:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases} .$$

Sol. Ex. 11.35
Tutti i piani passanti per $A = (0, 1, 1)$ hanno la forma $a\,(x - 0) + b\,(y - 1) + c\,(z - 1) = 0$. Il piano assegnato ha vettore direttore $(3, -2, -1)$ ed il piano cercato, essendo ad esso parallelo, è perpendicolare alla stessa direzione. Dunque ha la forma: $3\,(x - 0) - 2\,(y - 1) - (z - 1) = 0$ o, sviluppando, $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Sol. Ex. 11.36
Tutti i piani passanti per $A = (1, 0, 1)$ hanno la forma $a\,(x - 1) + b\,(y - 0) + c\,(z - 1) = 0$. La retta assegnata ha vettore direttore $(-1, 1, 1/3)$: il piano cercato, essendo perpendicolare a tale direzione ha la forma: $-3\,(x - 1) + 3\,(y - 0) + (z - 1) = 0$ o, sviluppando, $-3x + 3y + z + 2 = 0$.

Sol. Ex. 11.37
Un possibile modo di procedere è il seguente. Se $P = (x, y, z)$ è un punto del piano, i vettori $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, devono essere complanari, cioè deve risultare $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AP} = 0$. Poiché:
$\overrightarrow{AP} = (x - 2, y, z)\,$, $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)\,$, si ricava l'equazione $\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$
che, sviluppata, fornisce: $4\,(x - 2) + 3y + 2z = 0$.

Sol. Ex. 11.38
Il punto $C = (1, 0, 2)$ non appartiene alla retta di equazioni $2 - x = y = 2z$ poiché (ad esempio) le sue coordinate non verificano l'uguaglianza $y = 2z$.
Un modo per trovare l'equazione del piano contenente la retta e il punto è di individuare due punti A e B sulla retta e di calcolare il piano passante per i tre punti. Ponendo $y = 0$ nelle equazioni della retta si trova il punto $A = (2, 0, 0)$; invece ponendo $x = 0$, si trova il punto $B = (0, 2, 1)$: i punti individuati sono quelli dell'esercizio precedente e quindi l'equazione è la stessa.

Un altro modo di procedere è quello di osservare che:
- il piano ha equazione del tipo $a\,(x - 1) + b\,(y) + c\,(z - 2) = 0$,
- i punti della retta hanno coordinate del tipo $(2 - 2t, 2t, t)$ (basta passare in forma parametrica),
- la retta è contenuta nel piano se e solo se le coordinate dei suoi punti verificano l'equazione del piano per ogni t.

Quindi, per ogni t, deve risultare

$$a\,(2 - 2t - 1) + b\,(2t) + c\,(t - 2) = 0, \text{ cioè } (2b - 2a + c)\,t + a - 2c = 0, \text{ cioè } \begin{cases} a = 2c \\ 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

Una soluzione possibile è data dal vettore $(4, 3, 2)$ e quindi il piano ha equazione $4x + 3y + 2z - 8 = 0$.

Sol. Ex. 11.39
Si può procedere come nell'esercizio 11.37, pur di sostituire al vettore $\overrightarrow{AC}$ il vettore direttore della retta a cui il piano deve essere parallelo: $(2,2,1)$. Alternativamente osservare che:
- il piano, passando per $A=(1,0,0)$, ha equazione della forma $\quad a\,(x-1)+by+cz=0$,
- le coordinate di $B=(0,1,0)$ verificano tale equazione, cioè $\quad -a+b=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello della retta, cioè $2a+2b+c=0$.

Una soluzione del sistema $\begin{cases} a=b \\ 2a+2b+c=0 \end{cases}$ è data da $(1,1,-4)$ e quindi il piano ha equazione $x+y-4z=1$.
La sua distanza dall'origine è $\frac{|-1|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

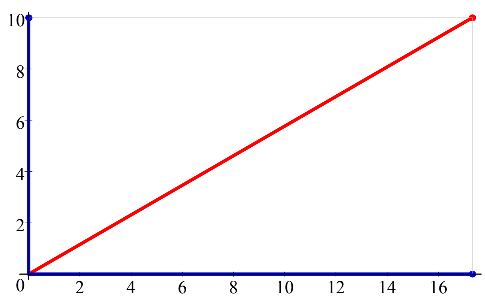
Sol. Ex. 11.40
Osserviamo che:
- il piano, passando per $A=(0,1,0)$, ha equazione della forma $\quad ax+b\,(y-1)+cz=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello $(2,1,-2)$ della retta, cioè $2a+b-2c=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello $(1,-1,-1)$ del piano assegnato, cioè $a-b-c=0$.

Una soluzione del sistema $\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases}$ è data da $(1,0,1)$ e quindi il piano ha equazione $x+z=0$.

Sol. Ex. 11.41
Uno dei due angoli diversi formati tra il piano di equazione $x+y-4z=1$ e quello di equazione $x+z=0$ coincide con l'angolo tra i loro vettori direttori $(1,1,-4)$ e $(1,0,1)$, l'altro è il suo supplementare. Ora, l'angolo tra i vettori direttori misura $\arccos\frac{(1,1,-4)\bullet(1,0,1)}{|(1,1,-4)|\cdot|(1,0,1)|}=\arccos\frac{-3}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$ ed è quindi ottuso, come richiesto: dunque la misura dell'angolo ottuso formato dai due piani è $\frac{2}{3}\pi$.

Applicazioni fisiche

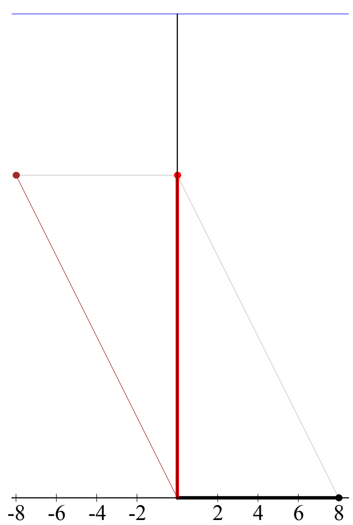
Sol. Ex. 11.42
Il problema assegna il modulo della forza $20N$, la sua direzione (inclinata di $30°$ rispetto al piano orizzontale) e il verso (dalla slitta alla renna) e vuole conoscere il vettore componente orizzontale e il vettore componente verticale. Possiamo schematizzare il problema come in figura



ove si pensa la slitta nell'origine del sistema di riferimento. Il vettore può essere rappresentato per componenti come $(20\cos 30°, 20\sin 30°)=$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 20, \frac{1}{2}\cdot 20\right)=\left(10\sqrt{3}, 10\right)$.
Allora la componente orizzontale (che provoca il moto) è di $10\sqrt{3}N$ e quella verticale (che tende a sollevare la slitta) è di $10N$.

Sol. Ex. 11.43
Il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento (orizzontale) di $16m$: in termini di componenti basta fare il prodotto $\left(10\sqrt{3}, 10\right) \bullet (16, 0) = 160\sqrt{3}J$ (essendo $1J = 1N \cdot 1m$). Oppure secondo la definizione di prodotto scalare: $(20N) \cdot (16m) \cdot \cos 30° = 160\sqrt{3}J$

Sol. Ex. 11.44



Rappresentiamo una riva come l'asse x e l'altra come una retta ad esso parallela e pensiamo che il fiume scorra nel verso positivo dell'asse x e che il battello parta dall'origine: l'obiettivo è di fargli mantenere una traiettoria ortogonale alle due rive e perché questo succeda la velocità che si ottiene componendo la velocità del fiume con quella del battello deve essere diretta come l'asse y: ciò è possibile solo se la componente orizzontale della velocità del battello è opposta a quella del fiume.
Riportando i vettori velocità come in figura, si vede che la velocità risultante e la velocità del fiume individuano un triangolo rettangolo con il cateto orizzontale ($8km/h$) che è metà dell'ipotenusa ($16km/h$): quindi l'angolo compreso tra tale cateto e l'ipotenusa è di $60° = \arccos \frac{1}{2}$.
Attenzione però: l'angolo tra il vettore velocità del fiume e il vettore velocità del battello è di $120°$.

È possibile anche ottenere questo risultato lavorando per componenti: denotiamo con (a, b) il vettore velocità del battello e con $(8, 0)$ il vettore velocità del fiume (l'unità di misura è per le componenti di entrambi i vettori: km/h): allora $(a, b) + (8, 0)$ è diretto come l'asse y, cioè ha la prima componente nulla se e solo se $a = -8$ e un vettore $(-8, b)$ di modulo 16 forma con $(8, 0)$ un angolo tale che il suo coseno vale: $\frac{(-8,b)\bullet(8,0)}{16 \cdot 8} = -\frac{1}{2}$ cioè un angolo di $120°$.
Si nota che questa seconda maniera di procedere permette di arrivare al risultato anche con un'analisi del modello fisico molto ridotta e sostanzialmente senza il supporto di disegni.