Argomento 5
Esercizi

Gli esercizi contrassegnati con **(*)** possono risultare più impegnativi degli altri.

Esercizio 5.1 Determinare per quale valore del parametro reale α la funzione f è continua in tutto il proprio insieme di definizione:

1) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

4) $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha\,(x - 1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

5) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(e^x - x) + 1}{x - e^x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha(x + \alpha + 3) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

6) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + 5\alpha x^2)}{2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha^2 - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

7) $$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x + \frac{1}{x-2}} & \text{se } x \leq 0 \\ x^{1/(3\alpha - 5)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

8) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt[5]{2 - x}}{\log x} & \text{se } x > 0,\ x \neq 1 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.2 i) Determinare per quali valori reali m, q la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x + q & \text{se } x \leq -1 \\ mx + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

risulta continua in $\mathbb{R}$.

ii) Successivamente, determinare m e q così da avere f continua in $\mathbb{R}$ e $f(-2) = f(5)$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.3 Dimostrare che l'equazione $x^3 - 3x = 4$ ha almeno una soluzione x_0 nell'intervallo $(1, 3)$. Sapendo che questa soluzione è unica, stabilire se x_0 è maggiore o minore di 2.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.4 Sia $f(x) = x^3 - 3x$. Dopo aver calcolato $f(1)$, verificare che l'equazione

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

ha esattamente tre soluzioni reali.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.5 Riconoscere le (eventuali) discontinuità delle seguenti funzioni:

1) $$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 10 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \log(1+3x) & \text{se } -\frac{1}{3} < x < 0 \\ \sqrt{x}(3-x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{2x}{x-5} & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+5)^2} & \text{se } x < -5 \\ 3x+1 & \text{se } -5 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{1}{\log(\sqrt{x}-2)} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.6 Riconoscere le (eventuali) discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{se } x < 4 \\ \alpha & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.7 Disegnare il grafico, e classificare le discontinuità, della funzione "signum"

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.8 (*) Riconoscere le (eventuali) discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{se } x \leq 4 \\ \sqrt{\dfrac{x}{2} + 7} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.9(*) Riconoscere le discontinuità della *funzione di Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.10 (*) Determinare i punti di continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.11 (*) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ e classificarne le discontinuità.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.12 (*) Dopo aver verificato che le funzioni $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = \lfloor x \rfloor$ hanno discontinuità negli stessi punti $x \in \mathbb{Z}$, verificare che la funzione composta $(g \circ f)(x) = \lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.13 (*) Classificare le discontinuità della funzione $f(x) = sgn(x - \lfloor x \rfloor)$.

Argomento *Soluzione*