

## Argomento 11 - Esercizi

**ESERCIZIO 11.1** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (3, -4)$  e  $B = (-2, 0)$ . Disegnare il vettore  $\overrightarrow{AB}$  e trovare il punto  $P$  tale che  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ ; calcolare infine le componenti del vettore.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.2** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (3, -4)$ ,  $B = (-2, 0)$ ,  $C = (-1, 1)$  e  $D = (2, 4)$ . Calcolare la somma dei vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  con la regola del parallelogramma. Verificare il risultato calcolando la somma per componenti.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.3** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (1, 3)$ ,  $B = (4, 7)$ ,  $C = (-2, -1)$  e  $D = (6, 5)$ . Quali tra i seguenti vettori sono uguali a  $-2\overrightarrow{AB}$ ?

A)  $\overrightarrow{AC}$

B)  $\overrightarrow{CD}$

C)  $\overrightarrow{BC}$

D)  $\overrightarrow{CB}$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.4** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (2a_1, 2a_2)$  e  $D = (2b_1, 2b_2)$ . L'affermazione  $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$  è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di  $a_1, a_2, b_1, b_2$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.5** Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine  $O$ ) si considerino i punti  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  e  $C = (2b_1, 2b_2)$ . L'affermazione  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$  è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di  $a_1, a_2, b_1, b_2$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.6** Nel piano si considerino: un vettore  $\mathbf{v}$  di modulo 4 avente la direzione e il verso dell'asse  $x$ , una retta  $r$  tale che  $\widehat{xr} = \pi/4$  e una retta  $s$  tale che  $\widehat{xs} = -\pi/3$ . Si determinino geometricamente i vettori componenti di  $\mathbf{v}$  secondo le direzioni delle due rette e si calcoli il valore dei loro moduli.

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.7** Nello spazio si considerino il vettore  $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$  ed il punto  $A = (1, 0, 2)$ . Quali sono le coordinate del punto  $B$  tale che  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ ?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.8** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$  e  $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$ . È vero che  $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ? Qualunque sia la risposta, si spieghi che cosa significa.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.9** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$  e  $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ . Si calcoli il modulo di  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.10** A che cosa è uguale il prodotto scalare  $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4)$ ?

- A)  $(3, -2, -8)$       B)  $-7$       C)  $(6, 10, 7)$       D)  $13$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.11** Nel piano si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (4, 3)$  e  $\mathbf{v} = (-1, 2)$ . Si calcoli il vettore proiezione ortogonale di  $\mathbf{v}$  nella direzione di  $\mathbf{u}$ .

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.12** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (2, -\sqrt{5}, -1)$  e  $\mathbf{v} = (1, \sqrt{5}, 2)$ . Si dica se l'angolo da essi formato vale (in radianti)

- A)  $-\pi/3$       B)  $2\pi/3$       C)  $\pi/3$       D)  $\pi/6$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.13** Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-1, 1, 2).$$

Si dica se  $\mathbf{u}$  forma con  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  angoli (non orientati) uguali.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.14** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  e  $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$ . Si trovi un vettore  $\mathbf{w}$  non nullo ortogonale ad entrambi. È unico?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.15** A che cosa è uguale il prodotto vettoriale  $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1)$ ?

A)  $(3, -2, 0)$       B)  $1$       C)  $(2, 1, 7)$       D)  $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.16** Come devono essere fatti i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}?$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.17** Nello spazio si considerino i vettori  $\mathbf{u} = (-2, -4, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$  e  $\mathbf{w} = (1, -1, 2)$ . Si stabilisca se  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.18** Si stabilisca per quali valori reali di  $h$  i vettori

$$\mathbf{u} = (h, -1, h) \text{ e } \mathbf{v} = (2 - h, 1, 0)$$

sono ortogonali e per tali valori si trovi il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.19** Si trovi un vettore  $\mathbf{w}$  di modulo 1 che sia contemporaneamente ortogonale a  $\mathbf{u} = (2, 1, -4)$  e a  $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$ . È unico?

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.20** Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (-2, -4, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (1, -1, 2).$$

Si stabilisca se sono complanari.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.21** Come devono essere fatti i vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})?$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.22** Spiegare perché per ogni coppia di vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  si ha  $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$  mentre, se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non sono proporzionali, il vettore  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$  è sempre non nullo.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.23** Mostrare che per ogni numero reale  $h$  risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{u} + h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \\ (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u})) \bullet \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} + h\mathbf{u}). \end{aligned}$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.24** Quali delle seguenti scritte hanno senso?

$$\text{A)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \quad \text{B)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \quad \text{C)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} \quad \text{D)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u}$$

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.25** Quali delle seguenti scritte hanno senso?

$$\text{A)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{B)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{C)} \quad (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})) \bullet \mathbf{u}$$

*Argomento*

*Soluzione*

## Applicazioni geometriche

**ESERCIZIO 11.26** Trovare le equazioni parametriche della retta passante per  $A = (1, -2, 1)$  e  $B = (0, 1, -1)$ . Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.27** Trovare le equazioni parametriche della retta passante per  $A = (1, 0, 1)$  e avente la direzione del vettore  $\mathbf{v} = (4, 1, 2)$ . Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.28** Nello spazio di dimensione 3 il sistema  $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$  rappresenta una retta? In caso affermativo se ne trovi un vettore direttore e i coseni degli angoli formati con gli assi.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.29** Trovare le equazioni parametriche della retta passante per  $A = (1, 1, -1)$  e parallela alla retta di equazioni  $x + z = 3x - y + 1 = 0$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.30** Trovare le equazioni parametriche della retta passante per  $A = (3, -2, 1)$  e ortogonale al piano di equazione  $2x + y - 4z = 0$ . Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.31** Trovare le equazioni parametriche della retta passante per  $A = (1, 2, 3)$  e ortogonale alle due rette di equazioni rispettivamente  $\frac{x-2}{3} = \frac{2-y}{2} = 2z+1$  e  $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = 2t \end{cases}$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.32** Stabilire se le rette trovate nei due esercizi precedenti sono diverse e in caso affermativo se sono parallele, incidenti o sghembe.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.33** Calcolare la misura dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni  $\frac{x-3}{2} = y+2 = \frac{1-z}{4}$  e  $x = -y = z$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.34** Trovare le equazioni della retta passante per  $A = (1, 0, 0)$ , ortogonale alla retta di equazioni  $2-x = 3y = z$  e parallela al piano di equazione  $x + y + z = 0$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.35** Si scriva l'equazione del piano passante per  $A = (0, 1, 1)$  e parallelo al piano di equazione:  $3x - 2y - z = 0$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.36** Si scriva l'equazione del piano passante per  $A = (1, 0, 1)$  e ortogonale alla retta di equazioni:  $1 - x = y = 3z$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.37** Si scriva l'equazione del piano passante per  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 1)$  e  $C = (1, 0, 2)$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.38** Si verifichi che il punto  $C = (1, 0, 2)$  non appartiene alla retta di equazioni  $2 - x = y = 2z$  e si calcoli l'equazione del piano contenente tanto la retta che il punto.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.39** Si scriva l'equazione del piano passante per  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e parallelo alla retta di equazioni:  $x = y = 2z - 1$  e si calcoli la sua distanza dall'origine.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.40** Si scriva l'equazione del piano passante per  $A = (0, 1, 0)$ , parallelo alla retta di equazioni:  $x - 1 = 2y = -z$  e ortogonale al piano di equazione  $x - y - z = 0$ .

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.41** Calcolare la misura dell'angolo ottuso formato dai piani trovati nei due esercizi precedenti.

*Argomento*

*Soluzione*

## Applicazioni fisiche

**ESERCIZIO 11.42** Una renna trascina una slitta mediante una bretella con una forza di  $20N$ . La bretella forma un angolo  $30^\circ$  con il suolo. Determinare il valore della forza che fa muovere la slitta ed il valore della forza che tende a sollevarla.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.43** La renna dell'esercizio precedente trascina la slitta in linea retta lungo il suolo per  $16m$ . Trovare il lavoro effettuato dalla forza applicata alla slitta.

*Argomento*

*Soluzione*

**ESERCIZIO 11.44** Un battello che si muove con una velocità di  $16km/h$  deve attraversare un fiume la cui corrente, costante in ogni suo punto, è di  $8km/h$ . Quale angolo rispetto alla riva deve mantenere il battello per raggiungere la riva opposta compiendo il tragitto minimo?

*Argomento*

*Suggerimento*

*Soluzione*