

## Lezione 4

### Soluzioni Esercizi

**Sol. Ex. 4.1.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$6x - \frac{x}{6} = 11 \quad \Leftrightarrow \quad 36x - x = 66 \quad \Leftrightarrow \quad 35x = 66 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{66}{35}$$

**Sol. Ex. 4.2.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$3x - 3 - \frac{1}{7} = 4x - 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{27}{7}$$

**Sol. Ex. 4.3.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5x + 4 + 36x - 2 = 28x + 14 \quad \Leftrightarrow \quad 13x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{12}{13}$$

**Sol. Ex. 4.4.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5x - 6 + 3x + 6 = 3x - 21 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = -21 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{21}{5}$$

**Sol. Ex. 4.5.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$140 + 5x - 60x = 16 - 30 - 25x \quad \Leftrightarrow \quad 30x = 154 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{77}{15}$$

**Sol. Ex. 4.6.** L'equazione è impossibile. Infatti, applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$50 + 6x - 9 - 6x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = -40 \quad : \text{ per nessun } x$$

**Sol. Ex. 4.7.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$\begin{aligned} 5x + \sqrt{2}x - 2 &= 4x + \sqrt{2} & \Leftrightarrow & \quad (1 + \sqrt{2})x = 2 + \sqrt{2} & \Leftrightarrow \\ (1 + \sqrt{2})x &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) & \Leftrightarrow & \quad x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Sol. Ex. 4.8.** Per  $x \geq 0$  l'equazione si riscrive  $2x = 1$  e ha soluzione  $x = \frac{1}{2}$ .  
 Per  $x < 0$  l'equazione diventa  $0 = 1$  ed è impossibile.  
 In conclusione l'unica soluzione è  $x = \frac{1}{2}$ .

**Sol. Ex. 4.9.** Per  $x \geq 0$  l'equazione si riscrive  $2x + 1 = 3x - 6$  e ha soluzione  $x = 7$ .  
 Per  $x < 0$  abbiamo

$$-2x + 1 = 3x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{5},$$

soluzione non accettabile perché positiva.

In conclusione l'unica soluzione è  $x = 7$ .

**Sol. Ex. 4.10.** L'equazione si riscrive  $4|x + 1| = 1$ , cioè  $x + 1 = \pm \frac{1}{4}$ .  
 In conclusione ci sono due soluzioni (una maggiore, l'altra minore di  $-1$ ):

$$x = -\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad x = -\frac{5}{4}.$$

**Sol. Ex. 4.11.** Si può scrivere:  $\frac{4 - 7x}{7x - 4} = \frac{-(7x - 4)}{7x - 4}$ : quest'espressione è definita per ogni  $x \neq \frac{4}{7}$  e per tali valori è uguale a  $-1$ ; soluzioni dell'equazione sono quindi tutti i numeri reali  $x \neq \frac{4}{7}$ .

**Sol. Ex. 4.12.** Si può scrivere:  $\frac{2x - 13}{13 - 2x} = \frac{2x - 13}{-(2x - 13)}$ : quest'espressione è definita per ogni  $x \neq \frac{13}{2}$  ma per tali valori è sempre uguale a  $-1$  e non a  $4$ : quindi nessun  $x$  è soluzione dell'equazione.

**Sol. Ex. 4.13.** Poiché  $2 + |x| \geq 2 > 0$ , la frazione  $\frac{3 + |x|}{2 + |x|}$  è sempre definita. Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$5(3 + |x|) = 6(2 + |x|) \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ oppure } x = 3$$

**Sol. Ex. 4.14.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$3x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

**Sol. Ex. 4.15.** Si deve supporre  $a + b \neq 0$ . Sommando le due frazioni al primo membro si ha

$$\frac{2x + a + b}{a + b} = a + b.$$

Moltiplicando per il denominatore otteniamo

$$2x + a + b = (a + b)^2 \Leftrightarrow 2x = (a + b)(a + b - 1) \Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2}(a + b - 1).$$

**Sol. Ex. 4.16.** Si deve supporre  $a \neq -2$ . Semplificando le tre espressioni razionali fratte si ha

$$\begin{aligned} \frac{x + 2a}{a + 2} - \frac{x - 4}{2a + 4} &= \frac{3x + 3a}{4} \Leftrightarrow \frac{4(x + 2a) - 2(x - 4) - (a + 2)(3x + 3a)}{4(a + 2)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(-4 - 3a) + 8 + 2a - 3a^2 &= 0 \Leftrightarrow (4 + 3a)x = 8 + 2a - 3a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (4 + 3a)x &= (4 + 3a)(2 - a) \end{aligned}$$

In conclusione:

se  $a = -\frac{4}{3}$  l'equazione è identicamente verificata, poiché è della forma  $0 \cdot x = 0$ ;

se  $a \neq -\frac{4}{3}$  (e  $a \neq -2$ ) l'equazione ha una e una sola soluzione:  $x = 2 - a$ .

**Sol. Ex. 4.17.** Le scomposizioni sono:

**a)**  $(x - 2) \cdot (x + 3)$

**b)**  $(x - 2) \cdot (x - 3)$

**c)**  $(x - 5) \cdot (x + 7)$

**d)**  $(x + 1) \cdot (x + 4)$

**Sol. Ex. 4.18.**

	radici	scomposizione
<b>a)</b>	non esistono	
<b>b)</b>	$1, -\frac{7}{3}$	$3(x - 1) \cdot \left(x + \frac{7}{3}\right) = (x - 1) \cdot (3x + 7)$
<b>c)</b>	$\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
<b>d)</b>	$-\frac{3}{8}(1 \pm \sqrt{65})$	$\frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{8}(1 + \sqrt{65})\right) \cdot \left(x + \frac{3}{8}(1 - \sqrt{65})\right)$

**Sol. Ex. 4.19.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$x^2 + 5(5 - 4x) = -10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

**Sol. Ex. 4.20.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni, otteniamo:

$$40x^2 - 40x + 10 = 2x^2 + 15x - 1 + 5x^2 \Leftrightarrow 33x^2 - 55x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

**Sol. Ex. 4.21.** Applicando i principi per la risoluzione delle equazioni e utilizzando la proprietà che lega i coefficienti di un polinomio di secondo grado alla somma e prodotto delle sue radici, otteniamo:

$$6x + 9 = 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - (3\sqrt{2} + 3)x + 9\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ oppure } x = 3\sqrt{2}$$

**Sol. Ex. 4.22.** Deve essere  $x \neq 0$ .

$$\frac{96 - 54 - 7x}{12x} = 0 \Leftrightarrow 42 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

**Sol. Ex. 4.23.** Deve essere  $x \neq 1$ . Ma per tali valori di  $x$  si ha  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1 \neq 0$ . Quindi l'equazione è impossibile.

**Sol. Ex. 4.24.** Deve essere  $x \neq 3$ .

$$\frac{5 - x^2 + x(x-3)}{x-3} = \Leftrightarrow 5 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

**Sol. Ex. 4.25.** Deve essere  $x \neq \pm 1$ .

$$\frac{1 - (x-1) - (x+1)}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

**Sol. Ex. 4.26.** Deve essere  $x \neq 0$  e  $x \neq -\frac{3}{2}$ .

$$\frac{2x^2 - 7x + (2x+3)(1+4x) - 8x^2}{x(2x+3)} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ oppure } x = -\frac{1}{2}$$

**Sol. Ex. 4.27.** Deve essere  $x \neq \pm 1$ .

$$\frac{x(x+1) + (x-1) - 2(x^2-1)}{x^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

**Sol. Ex. 4.28.** Deve essere  $x \neq 1$  e  $x \neq 2$ . L'equazione  $\frac{x-1+|x|(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 0$  è verificata solo se  $x-1+|x|(x-2) = 0$ , cioè

$$\begin{array}{l} x-1+x(x-2) = 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0 \\ \text{oppure} \\ x-1-x(x-2) = 0 \quad \text{e} \quad x < 0 \end{array}$$

cioè sviluppando

$$\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0 \\ \text{oppure} \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x < 0 \end{array}$$

La prima equazione ha una sola soluzione  $\geq 0$ :  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , la seconda equazione non ha soluzioni  $< 0$ .

In conclusione l'unica soluzione dell'equazione di partenza è  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Sol. Ex. 4.29.** Deve essere  $x \neq a$  e  $x \neq -2a$ .

$$\frac{(x-1)(x+2a) + (x+1)(x-a) - 2(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+2a)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax = a(4a-3).$$

Se  $a = 0$ , l'equazione è identicamente verificata. Se  $a \neq 0$ , otteniamo  $x = 4a - 3$ ; poiché  $x$  deve essere diverso sia da  $a$  che da  $-2a$ , i casi  $a = 1$  e  $a = 1/2$  danno luogo ad una equazione impossibile.

In conclusione:

se $a = 0$	ogni numero reale è soluzione
se $a = 1$ oppure $a = 1/2$	non ci sono soluzioni
se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ e $a \neq 1/2$	c'è una e una sola soluzione: $x = 4a - 3$ .

**Sol. Ex. 4.30.** Deve essere  $x \neq \pm 2$ . È chiaro che  $x = 0$  è una soluzione dell'equazione. Se  $x > 0$ , otteniamo l'equazione

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2x^2}{x^2-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x-1) = 0$$

che, essendo  $x > 0$ , ha la sola soluzione  $x = \frac{1}{2}$ .

Per  $x < 0$ , otteniamo l'equazione

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+4x}{x^2-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 0$$

che, essendo  $x < 0$ , non ha soluzioni.

In conclusione le soluzioni dell'equazione di partenza sono  $x = 0$  e  $x = \frac{1}{2}$ .

**Sol. Ex. 4.31.** Elevando al quadrato otteniamo l'equazione  $x - 1 = 4$ , da cui  $x = 5$ ; si verifica immediatamente che  $x = 5$  è anche soluzione dell'equazione originaria.

**Sol. Ex. 4.32.** Elevando al cubo abbiamo

$$2x + 7 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4.$$

Si verifica immediatamente che  $x = -4$  è soluzione dell'equazione di partenza.

**Sol. Ex. 4.33.** L'equazione è impossibile: il primo membro, come somma di due quantità non negative e non simultaneamente nulle, è sempre positivo.

**Sol. Ex. 4.34.** L'equazione è impossibile: se tutte le radici sono definite (il che succede per  $x > 0$ ) si ha  $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4}$  poiché  $5 > 4$ : a maggior ragione non può essere  $\sqrt{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+5}$  visto che  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  è sempre positivo.

**Sol. Ex. 4.35.** La radice  $\sqrt{2x^2+9}$  è sempre definita e  $\geq \sqrt{9} > 0$ : quindi può valere l'uguaglianza  $2x-3 = \sqrt{2x^2+9}$  solo se  $2x-3 > 0$ . Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene l'uguaglianza  $2x^2 - 12x = 0$ , che è vera per  $x = 0$  e  $x = 6$ : il primo valore non soddisfa la condizione  $2x - 3 > 0$  e quindi l'unica soluzione dell'equazione data è  $x = 6$ .

**Sol. Ex. 4.36.** La radice  $\sqrt{x-2}$  è definita per  $x \geq 2$ ; il denominatore è sempre diverso da 0, anzi, per la condizione su  $x$  è  $|x| = x \geq 2$  e  $|x| + 1 = x + 1 \geq 3$ . Ma il rapporto non può valere 1 per alcun valore reale di  $x$ : altrimenti elevando al quadrato si avrebbe  $\frac{x-2}{(x+1)^2} = 1$ , che è impossibile (provare a risolvere questa equazione fratta!). Quindi l'equazione è impossibile.

**Sol. Ex. 4.37.** Si devono trovare i valori di  $x$  che sono soluzioni tanto dell'equazione  $x^2 - 1 = 0$  che dell'equazione  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ . La prima ha soluzioni  $x = 1$  e  $x = -1$ :  $x = 1$  non può essere soluzione di  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ , poiché  $3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 = 8 \neq 0$  mentre  $x = -1$  ne è soluzione, poiché  $3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$ : quindi il sistema di equazioni ha soluzione  $x = -1$ .

Nota bene: avremmo potuto anche cercare direttamente le soluzioni della seconda equazione e confrontarle con quelle della prima, ma sarebbe stato inutilmente pesante.

**Sol. Ex. 4.38.** Si devono trovare i valori di  $x$  che sono soluzioni tanto dell'equazione  $6x + 9 = (x\sqrt{2} - 3)^2 + 18\sqrt{2}$  che dell'equazione  $\frac{3 + |x|}{2 + |x|} = \frac{6}{5}$ . Anche senza risolvere la prima equazione, osserviamo che la seconda ha soluzioni  $x = 3$  e  $x = -3$  (vedi esercizio 4.13):  $x = -3$  non può essere soluzione di  $6x + 9 = (x\sqrt{2} - 3)^2 + 18\sqrt{2}$ , poiché  $6(-3) + 9 < 0 < (-3\sqrt{2} - 3)^2 + 18\sqrt{2}$  e quindi i due membri non sono uguali, mentre  $x = 3$  ne è soluzione poiché  $(3\sqrt{2} - 3)^2 + 18\sqrt{2} = 9(3 - 2\sqrt{2}) + 18\sqrt{2} = 27 = 6 \cdot 3 + 9$ : quindi il sistema di equazioni ha soluzione  $x = 3$ .

**Sol. Ex. 4.39.** Devono essere eliminati gli eventuali valori di  $x$  che annullano almeno uno dei denominatori, cioè gli  $x$  che sono soluzione di almeno una delle due equazioni seguenti

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

La prima equazione ha come soluzioni  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , mentre la seconda ha come unica soluzione  $x = 1$ .

In conclusione, l'espressione ha significato per tutti i numeri reali tranne  $x = 1$  e  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Sol. Ex. 4.40.** Deve essere  $x \neq \pm 1$ . Inoltre deve essere non nullo il denominatore della intera frazione, quindi dobbiamo eliminare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = 0$$

che equivale alla

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} = 0,$$

che è impossibile.

In conclusione l'espressione di partenza ha significato per  $x \neq \pm 1$ .

**Sol. Ex. 4.41.** Deve essere  $x \neq \pm 1$ . Inoltre deve essere non nullo il denominatore della intera frazione, quindi dobbiamo eliminare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} = 0$$

che equivale alla

$$\frac{3 + (x - 1) - 2(x + 1)}{x^2 - 1} = 0$$

che ha soluzione  $x = 0$ : dunque l'espressione ha significato per tutti gli  $x$  diversi da  $-1, 0, 1$ .

**Sol. Ex. 4.42.** Deve essere  $x \neq \pm 1$ . Inoltre, poiché per ogni  $x$  (diverso da  $-1$  e  $1$ ) risulta

$$\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{-2}{x^2 - 1},$$

cioè il denominatore si annulla, l'espressione data non ha significato per alcun valore di  $x$ .