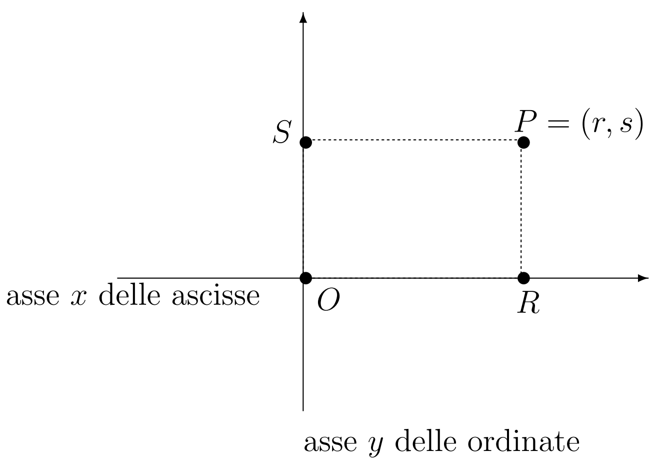
Lezione 6
Richiami di Geometria Analitica

1. Piano cartesiano

Consideriamo nel piano due rette **perpendicolari** che si intersecano in un punto O. Consideriamo ciascuna di queste rette come retta orientata con origine O.
Abbiamo così introdotto un **sistema di riferimento ortogonale** nel piano; ciascuna delle due rette verrà detta **asse** del sistema di riferimento. Usualmente nel disegno una retta è orizzontale e indicata con la lettera x, l'altra, verticale, è indicata con la lettera y. Inoltre se la retta x è orientata da sinistra a destra, la y è orientata dal basso verso l'alto. Infine, spesso si sceglie la stessa unità di misura sulle due rette.
Consideriamo ora un punto P nel piano: le parallele agli assi passanti per P intersecano l'asse orizzontale nel punto R e l'asse verticale nel punto S. I numeri reali r ed s associati (sulle due rette orientate) ai punti R ed S sono dette rispettivamente **ascissa** e **ordinata** del punto P.
Quindi ad ogni punto del piano è associata una coppia ordinata (r, s) di numeri reali, che sono dette **coordinate cartesiane** del punto P.
Viceversa ad ogni coppia ordinata di numeri reali, facendo la costruzione inversa della precedente, si associa un punto nel piano.
In tale modo i punti del piano sono identificati con le coppie ordinate di numeri reali:

$$P = (r, s).$$

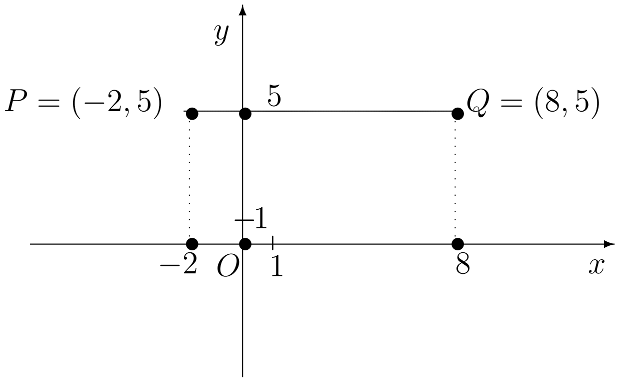


2. Distanza di due punti

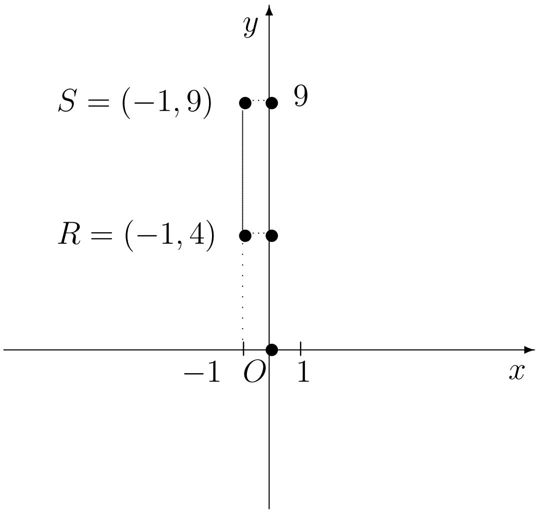
Vogliamo determinare la distanza tra due punti P e Q del piano. Se i punti hanno uguale ordinata la distanza (come visto nella Lezione 1) si determina calcolando il modulo della differenza delle ascisse di P e Q. Analogamente si procede se P e Q hanno la stessa ascissa.

Esempio 6.1 Determiniamo la distanza

- tra $P = (-2, 5)$ e $Q = (8, 5)$: $dist(P, Q) = |-2-8| = |-10| = 10.$
- tra $R = (-1, 4)$ e $S = (-1, 9)$: $dist(R, S) = |4-9| = 5.$



Distanza tra i punti $P = (-2, 5)$ e $Q = (8, 5)$.



Distanza tra i punti $R = (-1, 4)$ e $S = (-1, 9)$.

In generale la distanza si ricava utilizzando il:

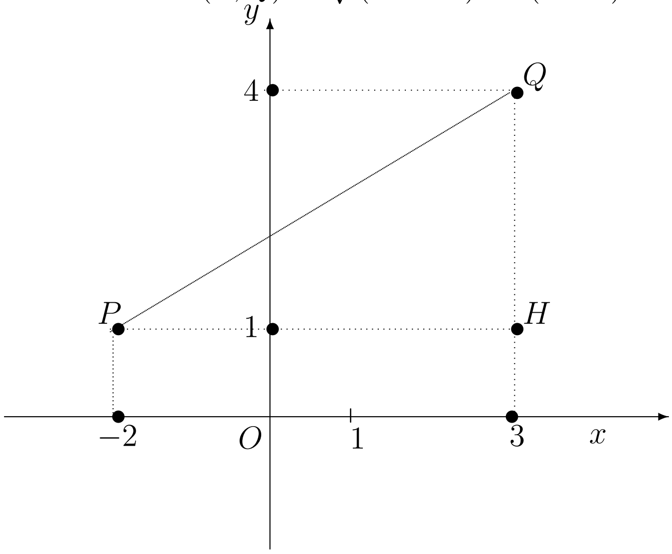
Teorema di Pitagora *Dato un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

Quindi se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Esempio 6.2 Determiniamo la distanza tra $P = (-2, 1)$ e $Q = (3, 4)$:

$$dist(P, Q) = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{34}.$$



Distanza tra i punti $P = (-2, 1)$ e $Q = (3, 4)$.

3. Equazione della retta

Ogni equazione di I grado in due incognite x e y

$$\boxed{(*) \qquad \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c} = 0 \quad \text{con } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \text{ non entrambe} = 0}$$

è l'**equazione di una retta nel piano**.

Ciò significa che:

- tutti i punti $P = (r, s)$ tali che $\mathbf{a}r + \mathbf{b}s + \mathbf{c} = 0$ appartengono ad una stessa retta

e viceversa

- tutti i punti che appartengono ad una stessa retta hanno coordinate che sono soluzione di una stessa equazione di tipo $(*)$.

Ad esempio, sono equazioni di rette: $2x - y + 1 = 0$; $3x - 2 = 0$; $y = 6x$.

Per disegnare una retta osserviamo che:

- se $\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{b} \neq 0$, e quindi la $(*)$ diventa $y = -\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$, la retta è parallela all'asse delle ascisse e passa per $\left(0, -\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$;
- se $\mathbf{a} \neq 0$ e $\mathbf{b} = 0$, e quindi la $(*)$ diventa $x = -\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$, la retta è parallela all'asse delle ordinate e passa per $\left(-\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$;

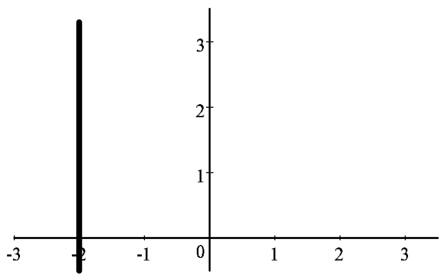
- se $\mathbf{a} \neq 0$ e $\mathbf{b} \neq 0$ e $\mathbf{c} = 0$ la retta passa per l'origine $O = (0,0)$. Inoltre, ad esempio, se $x = 1$ allora $y = -\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, e quindi la retta passa anche per $\left(1, -\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$;

- Se $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$ e $\mathbf{c} \neq 0$ la retta interseca gli assi rispettivamente nei punti $P = \left(-\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$ e $Q = \left(0, -\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$.

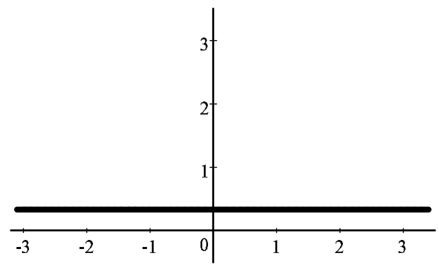
Esempio 6.3 Tracciamo le rette di equazione

$$i)\ 5x + 10 = 0, \qquad ii)\ 9y - 3 = 0, \qquad iii)\ 2x - 3y = 0, \qquad iv)\ x + y - 2 = 0.$$

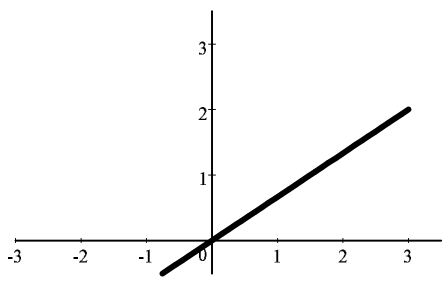
Le rette $i)$ e $ii)$ sono parallele agli assi.
Per tracciare la retta $iii)$ osserviamo che passa per l'origine e per il punto $(1, 2/3)$.
Per tracciare la retta $iv)$ osserviamo che passa per $(2,0)$ e per $(0,2)$.



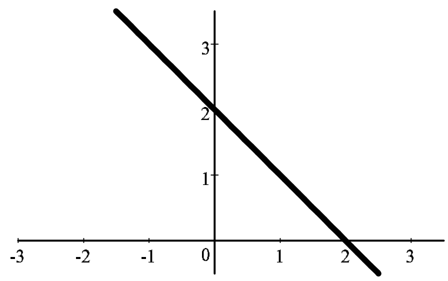
$i) \qquad 5x + 10 = 0$



$ii) \qquad 9y - 3 = 0$



$iii) \qquad 2x - 3y = 0$



$iv) \qquad x + y - 2 = 0$

Esempio 6.4 Scriviamo l'equazione della retta[1] che passa per

[1] È chiaro che le equazioni $x + y - 2 = 0$, $x + y = 2$, $3x + 3y - 6 = 0, \ldots$ sono tra loro equivalenti: quindi rappresentano la stessa retta. Di fatto, per ogni retta ci sono infinite equazioni che la rappresentano; non si dovrebbe dire *l'equazione della retta passante per* $(2,0)$, $(0,2)$ *è* $x + y - 2 = 0$ bensì *un'equazione della retta passante per* $(2,0)$, $(0,2)$ *è* $x + y - 2 = 0$. Di solito però ci si dimentica di questa "finezza grammaticale" e si dice l'equazione della retta intendendo l'equazione che, note alcune informazioni sulla retta, è più comodo calcolare.

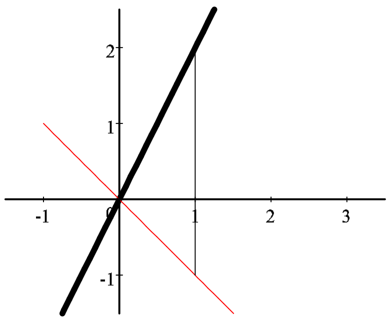
- $A = (3, -1)$ e $B = (7, -1)$: poiché i due punti hanno la stessa ordinata, la retta ha equazione: $y = -1$.
- $A = (1, 0)$ e $B = (0, 5)$: A e B sono i punti intersezione della retta con gli assi cartesiani, cioè i punti $P = \left(-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, 0\right)$ e $Q = \left(0, -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right)$ visti sopra. Quindi $-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = 1$ e $-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = 5 \Leftrightarrow -\mathbf{c} = \mathbf{a}$ e $-\mathbf{c} = 5\mathbf{b}$, da cui, ponendo $\mathbf{c} = -1$, otteniamo che la retta ha equazione: $x + \frac{y}{5} - 1 = 0$
- $A = (5, -2)$ e $B = (5, 1)$: poiché i due punti hanno la stessa ascissa, la retta ha equazione: $x = 5$.

Se $\mathbf{b} \neq 0$, cioè se la retta non è parallela all'asse y, può essere comodo scrivere l'equazione $(*)$ nella forma

$$\boxed{(**) \qquad\qquad y = \mathbf{m}x + \mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{m}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}}$$

ove $\mathbf{m}$ è detto **coefficiente angolare** della retta e $\mathbf{q}$ è detta ordinata all'origine.
L'interpretazione geometrica di $\mathbf{m}$ e $\mathbf{q}$ è la seguente

- $\mathbf{q}$ rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta di equazione $(**)$ con l'asse y;
- $\mathbf{m}$ è una misura della pendenza della retta. Questo fatto si vede molto bene con le rette passanti per l'origine, cioè quelle della forma $y = \mathbf{m}x$. Infatti il punto della retta di ascissa 1 ha ordinata $\mathbf{m}$: quindi, a parità di ascissa, più $|\mathbf{m}|$ è grande, maggiore è l'inclinazione della retta rispetto all'asse x.



$y = 2x$ (spesso); $y = -x$ (sottile)

Se $\mathbf{m} = 0$ la retta è parallela all'asse x. Inoltre all'aumentare dei valori delle ascisse dei punti della retta:

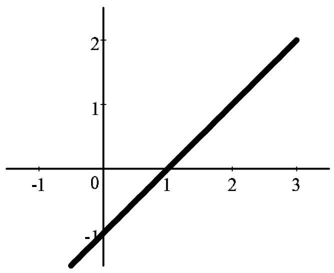
- se $\mathbf{m} > 0$ aumentano anche i valori delle ordinate (la retta "cresce");
- se $\mathbf{m} < 0$ i valori delle ordinate diminuiscono (la retta "decresce") [2]

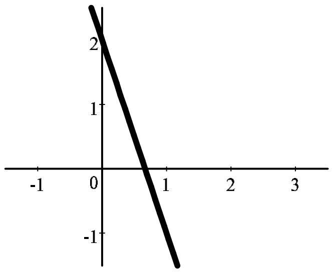
Ricordiamo che le rette parallele all'asse y NON possono essere scritte nella forma $(**)$.

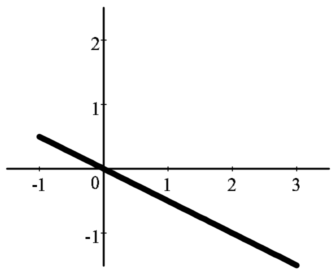
[2] In particolare se $\mathbf{m} > 0$ e x cresce di 1 allora y cresce di $\mathbf{m}$, mentre se $\mathbf{m} < 0$ e x cresce di 1 allora y decresce di $|\mathbf{m}| = -\mathbf{m}$.

Esempio 6.5 Tracciamo le rette di equazione

$$i)\ y = x - 1, \qquad ii)\ y = -3x + 2, \qquad iii)\ y = -x/2.$$







$i)$ $\quad y = x - 1$ $\qquad$ $ii)$ $\quad y = -3x + 2$ $\qquad$ $iii)$ $\quad y = -x/2$

Esempio 6.6

- Determiniamo l'equazione della retta che passa per $A = (1, -1)$ e $B = (2, 2)$. Le coordinate dei due punti verificano l'equazione $(**)$ quindi $-1 = \mathbf{m} + \mathbf{q}$ e $2 = 2\mathbf{m} + \mathbf{q}$, da cui $\mathbf{m} = 3$ e $\mathbf{q} = -4$. L'equazione della retta è $y = 3x - 4$.
- Determiniamo le intersezioni con gli assi cartesiani della retta di equazione $y = 2x - 3$. Se poniamo $x = 0$ nell'equazione della retta troviamo che l'intersezione con l'asse y è $Q = (0, -3)$; se poniamo $y = 0$ troviamo che l'intersezione con l'asse x è $P = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

In generale, per determinare l'eventuale intersezione di due rette dobbiamo cercare le soluzioni comuni alle loro equazioni, ossia risolvere il sistema delle loro equazioni.

Esempio 6.7 Determiniamo l'intersezione, se esiste, tra le rette aventi rispettivamente equazione $y = -x + 2$ e $y = 4x - 3$. Deve essere: $-x + 2 = 4x - 3$, da cui $x = 1$. Calcolando il valore dell'ordinata in una delle due equazioni della retta otteniamo $y = 1$; le due rette si intersecano in $(1, 1)$.

Possiamo rileggere geometricamente ciascuno degli esempi 4.20 della Lezione 4.
Abbiamo visto che il sistema $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ ha soluzione $x = 6/5$ e $y = -2/5$: ciò significa che le due rette di equazione $2x + y = 2$ e $x + 3y = 0$ hanno intersezione nel punto di coordinate $(6/5, -2/5)$.
Invece il sistema $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y = 0 \end{cases}$ è impossibile: ciò significa che le due rette di equazione $y = 5x-7$ e $10x-2y = 0$ non hanno alcun punto di intersezione (e nel piano questo succede solo se sono parallele).
Infine il sistema $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 10x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$ è indeterminato: ciò significa che le equazioni $y = 5x - 7$ e $10x - 2y - 14 = 0$ rappresentano la stessa retta (si usa dire che le due rette coincidono).

Due rette non parallele agli assi sono:

- **parallele** se (e solo se) hanno lo stesso coefficiente angolare $\mathbf{m}$;
- **perpendicolari** se il prodotto dei loro coefficienti angolari vale -1 .

Esempio 6.8 Scriviamo l'equazione della retta che:

- Passa per $A = (1, 2)$ ed è parallela alla retta di equazione $y = 3x + 1$: la retta è del tipo $y = 3x + \mathbf{q}$, poiché ha lo stesso coefficiente angolare di quella data; inoltre passando da A risulta $2 = 3 + \mathbf{q}$, quindi $\mathbf{q} = -1$. La retta ha perciò equazione $y = 3x - 1$.

  È più veloce osservare che per passare dal punto A la retta deve avere la forma $y-2 = \mathbf{m}(x-1)$, e per essere parallela alla retta data deve essere $\mathbf{m} = 3$.

- Passa per l'origine O ed è perpendicolare alla retta di equazione $y = -x/2$: poiché la retta è perpendicolare a quella data, che ha coefficiente angolare $-1/2$, il suo coefficiente angolare è 2; inoltre passa per l'origine, quindi $\mathbf{q} = 0$. La retta ha equazione $y = 2x$.

4. Equazione della circonferenza

L'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto fissato si chiama **circonferenza**. La circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r è costituita dall'insieme dei punti $P = (x, y)$ tali che:

$$dist(P, C) = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r.$$

Elevando al quadrato otteniamo l'equazione della circonferenza:

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.}$$

Sviluppando, la si può scrivere nella forma:

$$(\bigstar) \qquad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \text{con} \quad a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Esempio 6.9 L'equazione della circonferenza con centro $C = (-1, 2)$ e raggio 5 è :

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,$$

ossia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

Esempio 6.10 Data la circonferenza di equazione $2x^2+2y^2-2x+10y-5 = 0$ vogliamo determinare il suo centro e il suo raggio:

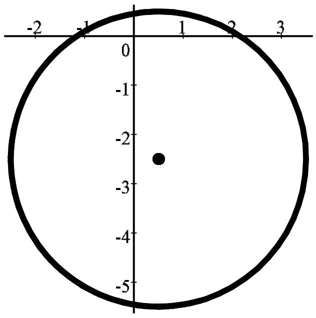
$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - x + 5y - \frac{5}{2} = 0$$

riscriviamo l'equazione come il completamento di un quadrato sia per la variabile x che per la y:

$$(x^2 - x) + (y^2 + 5y) - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 9$$

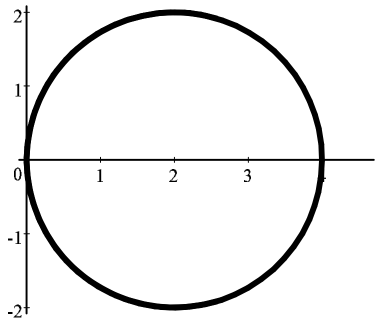
quindi $C = (1/2, -5/2)$ e $r = 3$.
Lo stesso risultato si può anche ottenere utilizzando le formule $(\bigstar)$.



Non è sempre detto che, data un'equazione di 2° grado, in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali, questa rappresenti una circonferenza. Ad esempio

- l'equazione $x^2 + y^2 + 4 = 0$ è impossibile, NON rappresenta alcun punto del piano;
- l'equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ è verificata per $x = 1$ e $y = 2$, quindi solo il punto $(1, 2)$ è soluzione. NON rappresenta una circonferenza.
- l'equazione $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ cioè $(x-y)^2 = 0$ rappresenta la retta di equazione $y = x$, e quindi NON rappresenta una circonferenza.
- l'equazione $x^2 + y^2 - 2xy - x + y = 0$ cioè $(x-y)(x-y-1) = 0$ rappresenta le due rette di equazioni $y = x$ e $y = x - 1$, e quindi NON rappresenta una circonferenza.

Esempio 6.11 Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $0 = (0, 0)$ e $P = (4, 0)$: osserviamo che la circonferenza ha centro in $(2, 0)$ e raggio 2, quindi l'equazione della circonferenza è $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

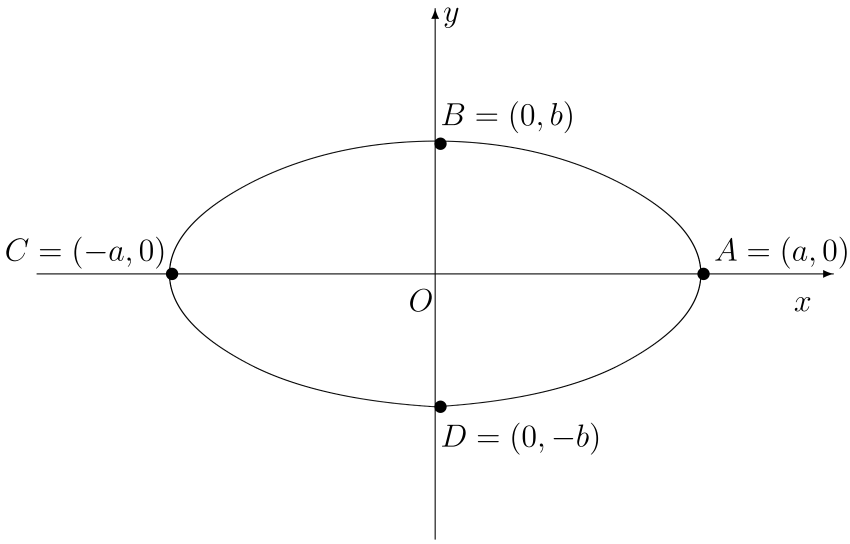


5. Equazione dell'ellisse

L'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano le cui coordinate verificano l'equazione

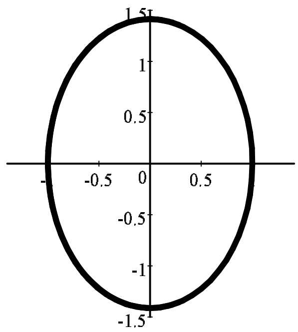
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

è un'**ellisse** con centro nell'origine e assi di simmetria gli assi cartesiani.
I punti $A = (a, 0)$ e $C = (-a, 0)$ sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse x. I punti $B = (0, b)$ e $D = (0, -b)$ sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse y.
Quindi a e b rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse. Ovviamente se $a = b$, cioè se i semiassi sono uguali, l'ellisse è una circonferenza di raggio a.

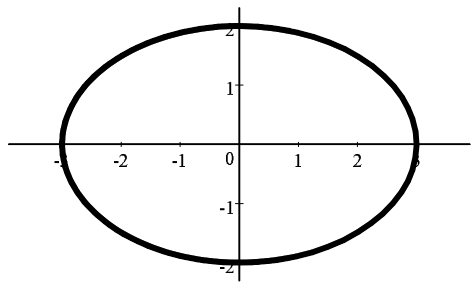


Esempio 6.12 Disegnamo le ellissi di equazione

$$i)\ \ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, \qquad\qquad ii)\ \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$i)\ \ x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$



$ii)\ \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. Equazione dell'iperbole

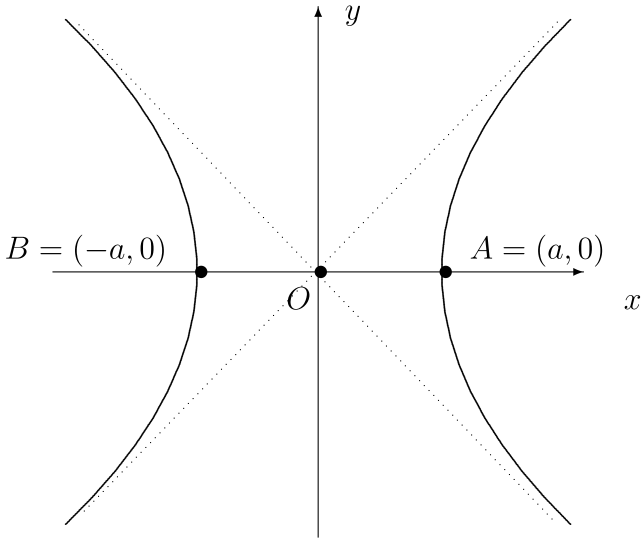
L'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano le cui coordinate verificano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con} \ \ a > 0 \ \ \text{e} \ \ b > 0$$

è un'**iperbole** che ha gli assi cartesiani come assi di simmetria e interseca l'asse x nei punti di ascissa a e $-a$. I suoi asintoti (rette che non l'intersecano mai, ma le sono sempre più vicine quando $|x|$ diventa grande) sono $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Se $a = b$ l'iperbole è detta equilatera e con una rotazione della figura nel piano la si può trasformare nella forma

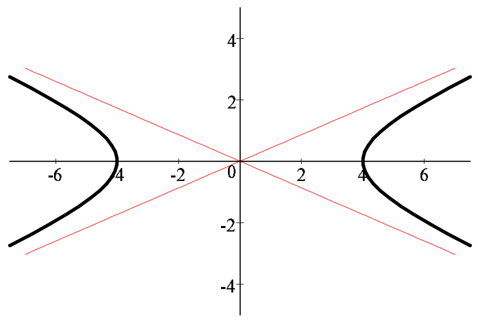
$$xy = k \qquad \text{con } k \in \mathbb{R} \ \ \text{e} \ \ k \neq 0$$

che è quella più usata e di solito si scrive nella forma $y = \frac{k}{x}$: essa ha gli assi cartesiani come asintoti.

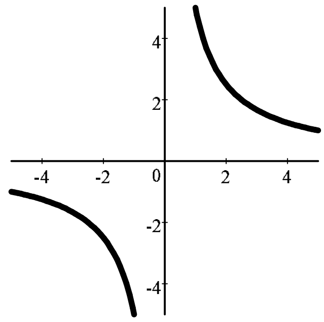


Esempio 6.13 Disegnamo le iperboli di equazione

$$i) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad\qquad ii) \quad y = \frac{5}{x}$$



$i) \ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1,$



$ii) \ y = \frac{5}{x}$

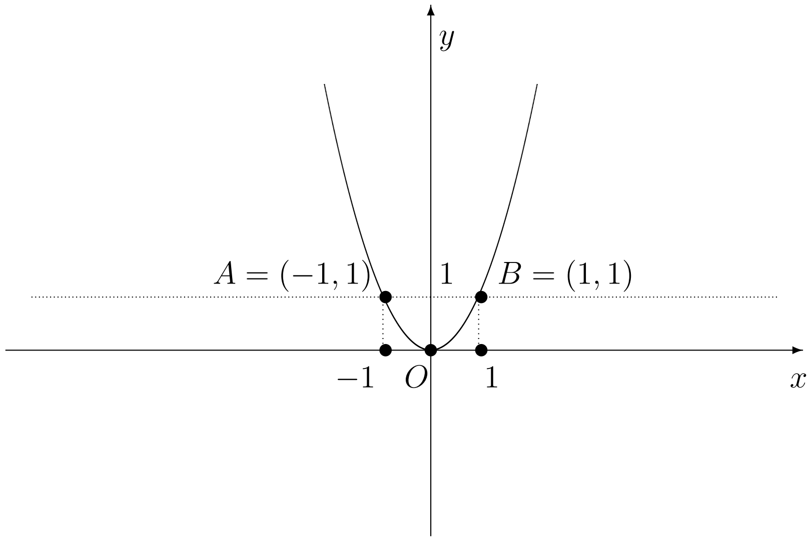
7. Equazione della parabola

Consideriamo ora la più nota delle coniche: la parabola.
L'insieme dei punti $P = (x, y)$ del piano le cui coordinate verificano l'equazione

$$\boxed{\clubsuit \qquad\qquad y = ax^2 + bx + c \qquad \text{con} \quad a \neq 0}$$

si chiama **parabola** con asse parallelo all'asse y.
L'**asse** è la retta di equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$ che interseca la parabola in un unico punto V, detto **vertice**, di coordinate $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Esempio 6.14 Determiniamo il vertice e l'asse della parabola di equazione $y = x^2$: l'equazione dell'asse è $x = 0$ e $V = (0, 0)$. Il grafico è il seguente:



Consideriamo ora la retta, parallela all'asse x, di equazione $y = 1$: essa interseca la parabola nei punti $A = (-1, 1)$ e $B = (1, 1)$ e l'asse in $C = (0, 1)$. Osserviamo che C è il punto medio del segmento AB. Lo stesso risultato si ottiene intersecando la parabola con qualsiasi retta orizzontale di equazione $y = y_0$ con $y_0 > 0$: *dunque la parabola è simmetrica rispetto al suo asse.*
Questo risultato è vero per ogni parabola.

Esempio 6.15 Determiniamo il vertice e l'asse della parabola di equazione $y = -3x^2 - 6x$: l'equazione dell'asse è $x = -\frac{6}{6} = -1$ e $V = (-1, 3)$. Osserviamo che l'ordinata del vertice si ricava, senza utilizzare la formula generale, semplicemente sostituendo il valore dell'ascissa $x = -1$ nell'espressione $y = -3x^2 - 6x$.

Vogliamo vedere come è posizionata nel piano una parabola di equazione ♣.

Osserviamo che trovare le ascisse delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle x (che ha equazione $y = 0$) equivale a risolvere l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quindi:

- se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ la parabola interseca l'asse delle x in due punti distinti di ascisse $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- se $\Delta = 0$ la parabola interseca l'asse delle x in due punti coincidenti di ascissa $-\frac{b}{2a}$;
- se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse delle x.

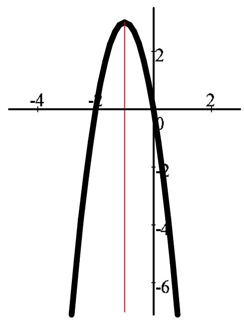
Osserviamo che:

- se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto (è convessa);
- se $a < 0$ la parabola è rivolta verso il basso (è concava).
- se $|a| > 1$ la parabola è poco aperta;
- se $|a| < 1$ la parabola è molto aperta;

Osserviamo inoltre che:

- se $a > 0$ le ordinate di tutti i punti che appartengono alla parabola sono $\geq$ dell'ordinata del vertice;
- se $a < 0$ le ordinate di tutti i punti che appartengono alla parabola sono $\leq$ dell'ordinata del vertice.

Esempio 6.16 Riprendiamo l'esempio 6.15. La parabola di equazione $y = -3x^2 - 6x$ ha asse $x = -1$ e vertice $V = (-1, 3)$; interseca l'asse delle x in due punti $A = (-2, 0)$, $B = (0, 0)$ ed è concava. Dunque la parabola ha questo grafico:

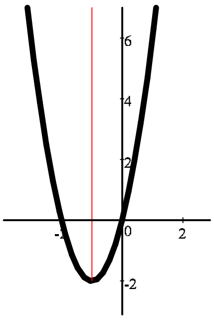


$y = -3x^2 - 6x$

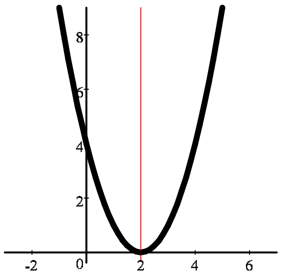
Esempio 6.17 Tracciamo le parabole di equazione:

$$i)\ y = 2x^2 + 4x, \qquad ii)\ y = x^2 - 4x + 4, \qquad iii)\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3,$$

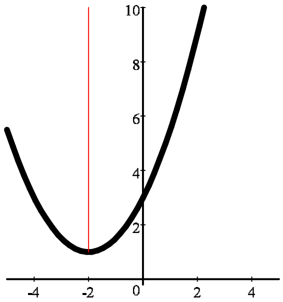
$$iv)\ y = 1 - 3x^2, \qquad v)\ y = -x^2 + 6x - 9, \qquad vi)\ y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2.$$



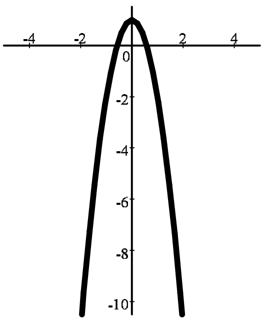
$y = 2x^2 + 4x$



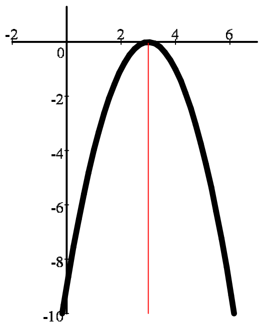
$y = x^2 - 4x + 4$



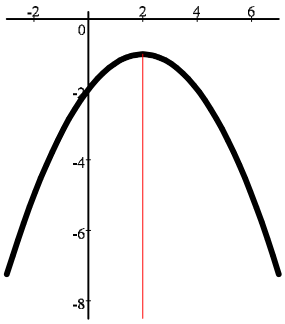
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$



$y = 1 - 3x^2$



$y = -x^2 + 6x - 9$



$y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$