Argomento 1

Numeri reali. Funzioni e loro grafici

Parte A - Numeri reali

Operazioni e ordinamento in $\mathbb{R}$

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali**, ossia l'insieme di numeri che sono esprimibili in forma decimale, ad esempio

$$5 \qquad -\frac{3}{4} = -0.75 \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\overline{3}$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots \qquad \pi = 3.14159\ldots$$

I numeri reali che ammettono una rappresentazione decimale finita oppure infinita ma periodica sono detti **razionali** [(1)]: essi possono sempre essere scritti sotto forma di frazione di due numeri interi. I numeri reali con forma decimale infinita *non* periodica sono detti **irrazionali**: essi *non* possono essere scritti sotto forma di frazione di due numeri interi.

Dati due numeri reali a e b, la *somma* $a + b$, la *sottrazione* $a - b$, il *prodotto* $a \cdot b$ sono definiti e sono ancora numeri reali; se $b \neq 0$ anche il *quoziente* $a : b$ è un numero reale, che spesso, utilizzando la notazione delle potenze, si denota con ab^{-1}, oppure con $\dfrac{a}{b}$ (anche se il numero ottenuto non è razionale). La definizione concreta di queste operazioni, nel caso di numeri irrazionali, è laboriosa: ma la cosa fondamentale è che per tutti i numeri reali valgono le ordinarie regole di calcolo (proprietà commutativa e associativa della somma, proprietà commutativa e associativa del prodotto, proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma).

Dati due numeri reali a e b, essi possono essere confrontati, cioè si può stabilire se sono uguali, o in caso contrario qual è il maggiore dei due; in particolare ogni numero può essere confrontato con 0: si dicono

- **positivi** i numeri > 0
- **negativi** i numeri < 0.

Poiché se $a < b$ e $b < c$ si ha anche $a < c$, un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo.
In generale per confrontare due numeri reali si utilizzano regole formali, del tutto simili a quelle che si usano nel caso di numeri razionali, che si rifanno alle seguenti tre proprietà:

- per ogni numero reale c, se $a < b$, anche $a + c < b + c$;

---

1) Tutti i numeri che nella parte decimale contengono un $\overline{9}$ sono uguali al decimale finito più vicino; ad esempio

$$1.\overline{9} = 1.9999\ldots = 2 \qquad 3.21\overline{9} = 3.2199\ldots = 3.22 \qquad -5.0\overline{9} = -5.0999\ldots = -5.1;$$

quindi i numeri con questa forma hanno due diverse rappresentazioni decimali; nessun altro numero reale ha due diverse rappresentazioni decimali.

- per ogni numero reale positivo c, se $a < b$, anche $a \cdot c < b \cdot c$
- per ogni numero reale negativo c, se $a < b$, risulta $a \cdot c > b \cdot c$ [(2)].

Come succede per i numeri razionali, dati comunque due numeri reali a e b, con $a < b$, esiste un numero reale c compreso tra i due, ad esempio il numero $\frac{a+b}{2}$, cioè vale la

Proposizione 1.1 *L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è denso.*

Definizione 1.2 Se a è un numero reale, il **modulo** (o valore assoluto) di a è un numero reale non negativo, che indichiamo con $|a|$: esso è uguale ad a stesso se $a \geq 0$, mentre coincide con $-a$ se $a < 0$.

Ad esempio $|-3/4| = 3/4$. Avremo spesso a che fare con il modulo di un'espressione, ad esempio $2 - x$: per calcolare $|2 - x|$ si usa esattamente la definizione di modulo:

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases} .$$

Notiamo che $|2 - x| = |x - 2|$, visto che l'unica differenza nella definizione si ha per $x = 2$, ma in questo caso $x - 2 = 2 - x = 0$.

Sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$

Vogliamo ora scoprire che cosa rende l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sostanzialmente diverso da quello dei razionali. Prima è necessaria un po' di terminologia.

Definizione 1.3 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ viene detto **superiormente limitato** se esiste un numero reale b tale che

$$x \leq b \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

Si dice, in questo caso, che b è un **maggiorante** per l'insieme A.

Ovviamente, un insieme superiormente limitato non ha mai un solo maggiorante; infatti, ogni altro numero $c \geq b$ è un maggiorante per A.

Esempio 1.4 L'insieme $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n = 1, 2, 3, ... \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \right\}$ è superiormente limitato e ogni numero $b \geq 1$ ne è un maggiorante.
Invece, l'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è superiormente limitato.

[2)] Queste proprietà permettono in particolare di confrontare due numeri espressi in forma decimale. Se sono entrambi positivi si guarda innanzi tutto quale dei due ha parte intera maggiore: ad esempio 1.010010001... ha parte intera 1 e quindi è maggiore di $0.\overline{98}$, che ha parte intera 0. Se la parte intera è la stessa, si confrontano successivamente tutte le cifre decimali a destra del punto: ad esempio 1.010010001... è maggiore di 1.01001, poiché la sua nona cifra decimale è 1 mentre quella di 1.01001 è 0.

Se invece i due numeri sono negativi il discorso si ribalta.

Teorema di completezza *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora esiste un (unico!) numero reale b^* tale che:*
i) *b^* è un maggiorante per A;*
ii) *ogni numero $b < b^*$ non è un maggiorante per A.*

Definizione 1.5 Il numero b^* viene chiamato **estremo superiore di** A, e denotato anche con $\sup A$. Le due proprietà che lo caratterizzano ci permettono di identificarlo come "*il più piccolo dei maggioranti di A*" [3].
Se il numero $b^* = \sup A$ appartiene ad A, diciamo che A ammette **massimo** e scriviamo $b^* = \max A$.

La scrittura $b^* = \max A$ contiene perciò due informazioni: il numero b^* è l'estremo superiore di A, e inoltre b^* appartiene all'insieme A.

Esempio 1.6 Nell'esempio precedente $\sup A = 1$. Infatti il numero 1 è un maggiorante per A. Inoltre nessun $b < 1$ è un maggiorante per A, poiché la condizione $\dfrac{n}{n+1} < b$ non è soddisfatta dagli interi $n > \dfrac{b}{1-b}$: infatti, se $b < 1$,

$$\frac{n}{n+1} < b \quad \Leftrightarrow \quad (1-b)\,n < b \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{b}{1-b}.$$

Infine, poichè $1 \notin A$, l'insieme A non ammette massimo.

Attenzione. È il teorema di completezza che permette di garantire che, se $a \geq 0$, l'equazione $x^n = a$ ammette una e una sola soluzione reale non negativa, cioè di garantire che esiste la **radice** (aritmetica) n**-esima di** a: $\sqrt[n]{a}$. A sua volta ciò permette di arrivare a definire la *potenza con esponente reale di un numero reale positivo* (Vedi MiniMat, Lezione 2).

Osservazione 1.7 Finora ci siamo occupati di insiemi superiormente limitati. In modo del tutto analogo si dice che un insieme A è **inferiormente limitato**, se esiste un numero reale a tale che $a \leq x$ per ogni $x \in A$ (a **minorante** di A). Il teorema di completezza garantisce l'esistenza dell'**estremo inferiore di** A (in simboli: $\inf A$), cioè garantisce che esiste in $\mathbb{R}$ un (unico) minorante a^* maggiore di ogni altro minorante di A. Se questo numero $a^* = \inf A$ appartiene ad A, è detto **minimo** di A, in simboli, $a^* = \min A$.

Definizione 1.8 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ viene detto **limitato** se è sia superiormente che inferiormente limitato.
Questo comporta l'esistenza di due numeri reali, $a^* = \inf A$ e $b^* = \sup A$, che soddisfano le condizioni

$$a^* \leq x \leq b^* \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

---

[3] Ciò che rende diversi i numeri reali dai razionali è proprio il fatto che *nei numeri razionali il teorema di completezza non vale.* Ad esempio, l'insieme $G = \{x \text{ razionali positivi tali che } x^2 < 2\}$ è superiormente limitato (gli elementi sono tutti minori ad esempio di 1.5) e ammette quindi estremo superiore reale (il numero $\sqrt{2}$), ma non c'è un numero razionale b^* più piccolo di ogni altro maggiorante razionale di G.

Esempi 1.9

- L'insieme $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n = 1,2,3,... \right\} = \left\{ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{2}{3}, \ \dfrac{3}{4}, ... \right\}$ è limitato, con $\min A = \dfrac{1}{2}$, $\sup A = 1$.
- L'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è limitato, ma $\min B = 1$.
- L'insieme $C = \left\{ \dfrac{n+1}{n} ; \ n = 1,2,3,... \right\} = \left\{ 2, \ \dfrac{3}{2}, \ \dfrac{4}{3}, ... \right\}$ è limitato, e $\inf C = 1$, $\max C = 2$.
- L'insieme $D = \left\{ 2, \ -4, \ \dfrac{2}{3}, \ -16, \ \dfrac{2}{5}, \ -36, \ \dfrac{2}{7}, ..., \ \dfrac{2}{(2k-1)}, \ -(2k)^2, ... \right\}$ non è limitato, ma $\max D = 2$.
- L'insieme $E = \{..., -2n, ..., -6, -4, -2, \ 1, \ 3, \ 5, ..., 2n+1, ...\}$ non è limitato né superiormente né inferiormente.

Il numero reale *e*

Consideriamo gli insiemi $A = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n : n = 1,2,3,... \right\}$ e $B = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} : n = 1,2,3,... \right\}$ di cui sotto sono elencati alcuni elementi ottenuti ponendo n uguale a potenze di 10:

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
10^0	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
10^1	$1.1^{10} = 2.59\ldots$	$1.1^{11} = 2.85\ldots$
10^2	$1.01^{100} = 2.70\ldots$	$1.01^{101} = 2.73\ldots$
10^3	$1.001^{1000} = 2.716\ldots$	$1.001^{1001} = 2.719\ldots$
10^4	$1.0001^{10000} = 2.718\ldots$	$1.0001^{10001} = 2.718\ldots$

Si può mostrare che, per ogni numero naturale n, valgono le seguenti disuguaglianze:

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, cioè al crescere di n, cresce anche il corrispondente elemento di A;
- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n$, cioè al crescere di n, il corrispondente elemento di B diventa più piccolo.

Poiché, fissato n, ogni elemento di A è più piccolo del corrispondente elemento di B, cioè

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

per ogni n si ha:

$$2 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \leq \ldots \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \ldots \leq \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4,$$

cioè i due insiemi A e B sono limitati e quindi sono dotati di estremo inferiore ed estremo superiore in $\mathbb{R}$. Precisamente: $\min A = 2$, $\max B = 4$, mentre si può mostrare che $\sup A$ e $\inf B$ (che non appartengono ai due insiemi, anzi non sono neppure numeri razionali) coincidono: il numero reale così ottenuto viene detto **numero di Nepero** e denotato con e.
È facile convincersi guardando la tabella sopra riportata che le prime cifre decimali del numero e sono $2.718\ldots$: infatti deve essere $1.0001^{10000} \leq e \leq 1.0001^{10001}$.
L'utilità del numero di Nepero emergerà quando si tratteranno limiti, derivate e integrali indefiniti.

Retta reale e intervalli. I simboli $+\infty$ e $-\infty$

Su una retta si fissi un sistema di riferimento cioè un'orientazione, un'origine e un'unità di misura; questa è la **retta euclidea**. Ad ogni punto di tale retta corrisponde uno e un solo numero reale. Viceversa, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto della retta euclidea. Di conseguenza, identificheremo la retta euclidea ed $\mathbb{R}$.
Notiamo che quando si pensano i numeri reali come punti di una retta è molto facile confrontarli: di due numeri è minore quello che, percorrendo la retta secondo la sua orientazione, precede l'altro (cioè, visto che di solito si adotta l'orientazione da sinistra a destra, quello più a sinistra).
La maggior parte della teoria che verrà svolta in queste lezioni riguarderà particolari insiemi di numeri reali che possono essere visualizzati sulla retta reale come segmenti (con o senza gli estremi).

Definizione 1.10 Si chiamano **intervalli** i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x < b\}$ intervallo limitato aperto
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x \leq b\}$ intervallo limitato chiuso
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra (e aperto a destra)
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x \leq b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra (e chiuso a destra).

È utile poter rappresentare come intervalli anche insiemi che sulla retta reale si visualizzano come semirette: ma questi sono insiemi non limitati. Ad esempio l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x > a\}$ ha estremo inferiore a ma non ha un maggiorante b che possa essere usato per delimitare l'intervallo a destra: questa situazione viene descritta usando il simbolo ∞ (che si legge: "**infinito**"). Precisamente si scrive

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x > a\} = (a, +\infty)$$

e si dice che $(a, +\infty)$ è un **intervallo aperto illimitato a destra**.

Analogamente

- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x < b\}$ intervallo aperto illimitato (a sinistra)
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \geq a\}$ intervallo illimitato (a destra)
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \leq b\}$ intervallo illimitato (a sinistra).

Con la stessa simbologia: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Conviene sottolineare che $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri reali (anche se nella descrizione degli intervalli illimitati compaiono nella stessa posizione in cui, nella descrizione degli intervalli limitati, compaiono i numeri reali) ma puri simboli, il cui significato è chiarito proprio dalla definizione precedente [4]. Questo significa in particolare che non hanno senso scritture come $-\infty < x < b$ o come $[-\infty, b]$.

Più in generale, si possono utilizzare i simboli $+\infty$ e $-\infty$ per descrivere un insieme A non limitato (superiormente o inferiormente):

- quando A non è superiormente limitato, si usa dire che $\sup A = +\infty$
- quando A non è inferiormente limitato, si usa dire che $\inf A = -\infty$.

Ad esempio, riprendendo gli esempi 1.9,

1) l'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è superiormente limitato, quindi $\sup B = +\infty$

2) l'insieme $D = \left\{..., -36, -16, -4, \ 2, \ \frac{2}{3}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{2}{7}, ...\right\}$ non è inferiormente limitato, quindi $\inf D = -\infty$

3) l'insieme $E = \{..., -2n, ..., -6, -4, -2, 1, 3, 5, ..., 2n+1, ...\}$ non è limitato, né inferiormente né superiormente e quindi $\inf E = -\infty$, $\sup E = +\infty$.

Una nota pratica Numeri che, rappresentati in forma decimale, risultino illimitati (periodici o no) non possono essere "scritti per esteso". Quando si devono risolvere problemi pratici si usano quindi approssimazioni decimali limitate (più o meno precise, a seconda delle esigenze): è quello che fa una calcolatrice quando approssima π con 3.141592654; usiamo certamente un'approssimazione meno precisa quando vogliamo rappresentare π sulla retta reale. Dato un numero, la sua approssimazione per difetto, ad esempio, alla quinta cifra decimale si ottiene troncando la sua rappresentazione decimale alla quinta cifra, quella per eccesso si ottiene aggiungendo un'unità alla quinta cifra della rappresentazione per difetto. Ad esempio, l'approssimazione per difetto di π alla quinta cifra decimale è 3.14159 e quella per eccesso è 3.14160. Questo equivale ad aver suddiviso l'asse reale in intervalli di ampiezza 10^{-5} e a dire che π cade nell'intervallo $[3.14159, 3.14160)$. Ogni numero reale è compreso tra una qualunque sua approssimazione per difetto ed una qualunque sua approssimazione per eccesso ed eventualmente può coincidere con una per difetto: ad esempio, l'approssimazione per difetto alla quinta cifra decimale di 1.23 è $1.23000 = 1.23$. La scelta tra i due tipi di approssimazione è legata alla necessità di arrotondare il numero reale al numero decimale finito che gli è più vicino: ad esempio, se si vuole dare una approssimazione alla quarta cifra decimale di π, è meglio scegliere quella per eccesso.

Prima di introdurre le funzioni reali di variabile reale, conviene infine ricordare che $\mathbb{R}^2$ indica l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali e la sua rappresentazione geometrica è il piano cartesiano cioè un piano nel quale è stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Può essere utile in proposito rivedere i "Richiami di geometria analitica" contenuti nella Lezione 6 di Minimat.

---

4) È possibile introdurre delle operazioni tra questi simboli, ma il loro senso sarà chiaro solo parlando di limiti e quindi l'aritmetizzazione dei simboli $-\infty$ e $+\infty$ sarà data solo nell'Argomento 3.