

Lezione 3

Esercizi

ESERCIZIO 3.1. Calcolare il valore assunto dai seguenti monomi, in corrispondenza dei valori indicati per ciascuna lettera

| | | | | | |
|----|--------------------|--------|--------------------|-------------------|-------------------|
| a) | $3d^2ax$ | per | $a = 1$ | $d = 2$ | $x = \frac{1}{6}$ |
| | | oppure | $a = 2$ | $d = \frac{1}{2}$ | $x = 6$ |
| | | oppure | $a = \frac{1}{2}$ | $d = 1$ | $x = 5$ |
| b) | $-\frac{1}{2}xz^3$ | per | $x = 1$ | $z = 2$ | |
| | | oppure | $x = \frac{2}{3}$ | $z = -3$ | |
| | | oppure | $x = -\frac{1}{4}$ | $z = -1$ | |

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.2. Per ciascuno dei seguenti monomi indicare il grado complessivo e quello rispetto a ciascuna lettera

| | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $\frac{1}{2}x^2ayz^4$ | b) $-\frac{3}{7}abc$ | c) $\frac{8}{5}h^3d^2xy^4$ | d) $\sqrt{3}a^2x^2y$ |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.3. Svolgere le seguenti operazioni, indicando se il risultato è un monomio:

| | |
|---|---|
| a) $(-3x^2yz^3) + (5yz^3x^2) =$ | b) $\left(\frac{3}{2}axb^5\right) - \left(\frac{1}{2}ax^5b\right) =$ |
| c) $(2xyaz^2) \cdot (3x^2dwz) =$ | d) $\left(-\frac{2}{3}bx^2w\right) \cdot \left(\frac{3}{2}b^2xy\right) =$ |
| e) $(11a^3x^2y^5) : (5ax^2) =$ | f) $(6a^3xw^2) : (3a^2xy) =$ |
| g) $\left(-\frac{2}{5}x^2yw^3\right)^2 =$ | h) $(xy^2ab^3)^3 =$ |

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.4. Svolgere le seguenti operazioni fra polinomi:

a) $(8x^2y - 3xz + 4x^2z^3) + (8y + 5xz - x^2z^3) =$

b) $(7a^2y + 11a^2y^2) - (2z^3 - 11a^2y + 2a^2y^2) =$

c) $(2 - ax) \cdot (y + 5a) =$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.5. Svolgere i seguenti prodotti notevoli:

a) $\left(3a^2 + \frac{2}{3}y^3\right)^2 =$

b) $(2x^2 - b)^3 =$

c) $(a^3 - 3) \cdot (a^3 + 3) =$

d) $(3y + 4w) \cdot (3y - 4w) =$

e) $(2a - 3b) \cdot (4a^2 + 6ab + 9b^2) =$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.6. Scomporre in fattori i seguenti polinomi, utilizzando i prodotti notevoli:

a) $\frac{1}{4}a^2 + a + 1 =$

b) $9x^4 + 12cx^2 + 4c^2 =$

c) $x^2y^2 - 6xya^2 + 9a^4 =$

d) $4x^4 - 25b^2 =$

e) $16 - a^2x^4 =$

f) $8x^3 - 36x^2b + 54xb^2 - 27b^3 =$

g) $8w^6 - 27 =$

h) $(x + a)^2 - (x - a)^2 =$

i) $(x + a)^3 - (x - a)^3 =$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.7. Razionalizzare il denominatore delle seguenti frazioni:

a) $\frac{2}{3\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{1 - \sqrt[3]{4}}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.8. Calcolare a mente:

a) $563^2 - 562^2$

b) $233^2 - 231^2$

c) $(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.9. Completare le seguenti uguaglianze:

a) $\sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{-1}{\dots\dots}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + x}}{\dots\dots}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.10. Semplificare le seguenti espressioni:

a) $\frac{1}{x^2 - y^2} : \frac{1}{x + y}$

b) $\frac{6a^2}{a^3 - b^3} : \frac{3a}{a^2 + ab + b^2}$

c) $\frac{y + 2}{y^2 + y} - \frac{y - 2}{y^2 - y} - \frac{3}{y^2 - 1}$

d) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{x - y}{\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right]$

f) $\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) : (a^3 - b)^2$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.11. Raccogliere eventuali fattori comuni:

- a) $cx^2 - cxy =$
b) $6a^3 + 3az - 9a^2x^2 =$
c) $13x^3z^5 + 12x^2z^4 + 4x^6z^6 =$
d) $27x^4 - 18x^3 + 3x^2 =$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.12. Scomporre in fattori mediante raccoglimenti parziali:

- a) $6x - 3 - 10x^2y + 5xy =$
b) $2x^2yz + 3y^2z^2 - 2x^2z - 3yz^2 =$
c) $-3xy^3 + 5x^2 - 3b^2xy^3 + 5b^2x^2 =$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.13. Dato il polinomio in una variabile $P(x) = -x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 1$ calcolare:

$$P(0), \quad P(1), \quad P(-1), \quad P(2), \quad P(-2), \quad P\left(\frac{1}{2}\right), \quad P\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.14. Calcolare a, b, c, d , in modo che i due seguenti polinomi (nella variabile x) siano uguali

$$P(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 5$$

$$Q(x) = (a + c)x^2 + bx + d$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.15. Calcolare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $D(x)$, scrivendo poi le relazioni che legano i quattro polinomi

a) $P(x) = x^4 + 1$

$D(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - x$

$D(x) = x^2 - x + 1$

c) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$D(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $P(x) = \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 4x - 1$

$D(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

e) $P(x) = -4x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 1$

$D(x) = 2x^2 + x - 1$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.16. Utilizzando il teorema di Ruffini stabilire quali dei seguenti polinomi sono divisibili per $x + 1$:

a) $x^3 - 1$

b) $x^3 + 1$

c) $x^4 - 1$

d) $x^4 + 1$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.17. Determinare il quoziente e il resto nella divisione per $x - 1$ dei polinomi dell'esercizio precedente, dopo aver evidenziato quali tra loro sono divisibili per $x - 1$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.18. Decidere se i seguenti polinomi sono divisibili per $x + 1$ e $x - 1$. In ogni caso determinare quoziente e resto

a) $x^6 - 1$

b) $x^6 + 1$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.19. Per ciascuno dei polinomi $P(x)$ e $D(x)$ verificare che $P(x)$ è divisibile per $D(x)$ (usando il teorema di Ruffini) e calcolare il quoziente (usando la regola di Ruffini o la scomposizione in fattori)

a) $D(x) = x - 2$

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

b) $D(x) = x + 1$

$P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 3$

Attenzione: $x + b = x - (-b)$...

c) $D(x) = x + \frac{3}{2}$

$P(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{15}{2}$

d) $D(x) = x - \frac{1}{2}$

$P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 3$

e) $D(x) = x - a$

$P(x) = x^3 - ax^2 + bx^2 - abx + x - a$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.20. Verificare che i valori della x indicati sono radici del polinomio $P(x)$, e scomporre quest'ultimo mediante applicazioni ripetute della regola di Ruffini

a) $x = 1, \quad x = 2$

$$P(x) = x^3 - 7x + 6$$

b) $x = 1, \quad x = -1, \quad x = -2$

$$P(x) = x^5 + \frac{5}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 3.21. Calcolare quoziente e resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il binomio indicato

a) $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 19x + 3$

$$x - 4$$

b) $P(x) = x^6 + 5x^5 - x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 14x - 8$

$$x + 5$$

Argomento

Soluzione