Argomento 12

Soluzioni Esercizi

Suggerimento Ex. 12.17
Applicare il Teorema di Kronecker.

Suggerimento Ex. 12.18
Poichè A è una matrice quadrata conviene prima calcolarne il determinante. Quando $\det A \neq 0$, si avrà Car $A = 3$. Altrimenti....

Poichè B è una matrice rettangolare conviene applicare il Teorema di Kronecker partendo da un minore non nullo per ogni valore di k.

Sol. Ex. 12.1

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{d)}\ \mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = -1; \quad \textbf{e)}\ \mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_3} = 2; \quad \textbf{f)}\ \mathbf{v_3} \bullet \mathbf{v_4} = \sqrt{2}.$$

Sol. Ex. 12.2

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{d)}\ \text{impossibile.}$$

Sol. Ex. 12.3

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} -1 & 13 & 11 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 14 & -8 & 2 \\ -2 & -1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.4

$$A\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad A\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$B\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad B\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad B\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.5

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad AC = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ -6 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -8 & 17 & -4 \end{pmatrix}; \qquad CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}; \qquad DA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 16 & -2 \\ -4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. Ex. 12.6

a) se $a = -4$; **b)** impossibile.

Sol. Ex. 12.7

$$A\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 24 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 1 & 1 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.8

$$\begin{aligned} 7A - A^2 &= 7\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ -7 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = 14I \end{aligned}$$

Sol. Ex. 12.9

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad AE = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}; \qquad BC = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BF = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$CE = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad DA = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad DB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$DE = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}; \qquad ED = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \qquad FC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.10

a) $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A+B)=-12$; $\det A=-1$; $\det B=-6$. Quindi $\det(A+B)\neq \det A+\det B$;

c) $\det(AB)=6$; $\det(BA)=6$. Quindi $\det(AB)=\det(BA)=\det A\cdot\det B$.

Sol. Ex. 12.11

a) $\det A=-6$; **b)** $\det B=-9$; **c)** $\det C=-11$;

d) $\det D=-16$; **e)** $\det E=-6$; **f)** $\det F=45$.

Sol. Ex. 12.12

$\det A=k+2-k^2$ quindi $\det A=0 \Leftrightarrow k=-1$ oppure $k=2$.

Sol. Ex. 12.13

a) $A^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $B^{-1}=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$;

c) $C^{-1}=\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$; **d)** D^{-1} non esiste.

Sol. Ex. 12.14

a) Il complemento algebrico di a_{11} è: $(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=6$; analogamente si ricava che:

i complementi algebrici di a_{12}, a_{13}, e a_{23} sono 0;

il complemento algebrico di a_{21} è -6 e quello di a_{22} è 3;

il complemento algebrico di a_{31} è -4, quello di a_{32} è 1 e quello di a_{33} è 2.

b) $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.15

a) Poichè $\det A=a$, la matrice A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $a\neq 0$.

b) Per $a\neq 0$, $A^{-1}=\dfrac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -2a & a & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.16

a) Car $A=2$; **b)** Car $B=1$; **c)** Car $C=3$; **d)** Car $D=2$.

Sol. Ex. 12.17

$$\textbf{a)}\quad \text{Car } A = 3; \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \text{Car } B = 2.$$

Sol. Ex. 12.18

a) Se $k \neq \frac{4}{3}$, allora Car $A = 3$; se $k = \frac{4}{3}$, allora Car $A = 2$.

b) Se $k \neq 0$, allora Car $B = 3$; se $k = 0$, allora Car $B = 2$.

Sol. Ex. 12.19 **D)**

Sol. Ex. 12.20 **A)**