

Argomento 14 - Esercizi

ESERCIZIO 14.1 Trovare parte reale, parte immaginaria, coniugato e modulo dei seguenti numeri complessi

a) $z = 2 - \sqrt{2}i$ b) $z = -\sqrt{7}i$ c) $z = -10 + 10\sqrt{3}i$ d) $z = 10 - 10\sqrt{3}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.2 Dati i numeri $z = -2 - 3i$ e $w = -3 + 4i$, calcolare $z - w$, zw , $\frac{1}{w}$, $\frac{z}{w}$ esprimendo il risultato in forma algebrica.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.3 Scrivere in forma algebrica:

a) $z = \frac{(2+i)(1-i)}{3-2i}$ b) $z = \frac{1}{i(3+2i)^2}$ c) $z = \frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.4 Trovare il modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi:

a) $z = 1 - i$ b) $z = 11i$ c) $z = -\frac{\pi}{4}$
d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ e) $z = -4i$ f) $z = \frac{1}{2}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.5 Dati i numeri $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $w = \sqrt{3} + i$, calcolare z^{20} e w^{13} .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.6 Trovare modulo ed un argomento delle radici n -esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

a) $z = -8$ ove $n = 3$ b) $z = 27i$ ove $n = 3$
c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ove $n = 2$ d) $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ove $n = 4$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.6 bis Trovare modulo ed un argomento delle radici n -esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

- | | | | | | |
|----|---|-------------|----|--|-------------|
| a) | $z = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ | ove $n = 3$ | b) | $z = 64i$ | ove $n = 6$ |
| c) | $z = -64i$ | ove $n = 6$ | d) | $z = -16$ | ove $n = 8$ |
| e) | $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | ove $n = 4$ | f) | $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ | ove $n = 3$ |

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.7 Sia $z_0 = 1 + 2i$ una radice quarta di un numero complesso α ; si scrivano in forma algebrica le restanti radici quarte di α , dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.8 Sia $z_0 = 4 - 3i$ una radice ottava di un numero complesso α ; si scrivano in forma algebrica le restanti radici ottave di α , dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.9 Sia $z_0 = -3 + 2i$ una radice terza di un numero complesso α ; si scrivano in forma algebrica le restanti radici terze di α , dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.10 Si rappresentino le radici del polinomio a coefficienti reali $P(x) = (x + 2)^4 + 1$ nel piano di Argand-Gauss. Si dia poi una scomposizione di $P(x)$ come prodotto di polinomi a coefficienti complessi di primo grado e una come prodotto di polinomi reali di secondo grado.

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 14.11 Determinare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a) | $z^2 + 2z + 3 = 0$ | b) | $z^2 + 2iz - 3 = 0$ |
| c) | $iz^2 + (1 + i)z + 1 = 0$ | d) | $z^6 + 2z^3 - 1 = 0$ |
| e) | $2 z ^2 = z^3$ | f) | $z^2 + \bar{z} = 0$ |
| g) | $(\bar{z})^4 = z $ | h) | $iz^3 = \bar{z}$ |
| i) | $i \operatorname{Re}(z) + z^2 = z ^2 + 1$ | j) | $z + 3i + (\operatorname{Re}(z))(i + (\operatorname{Im}(z))^2) = 0$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 14.12 Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi e descriverli a parole:

a) $A = \{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\pi\}$

b) $B = \{z : 0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 2\pi\}$

c) $C = \{z : \operatorname{Re}(z^2) = 2\}$

d) $D = \{z : \operatorname{Im}(z^2) = 2\}$

e) $E = \{z : |z^3| < 2\}$

f) $F = \{z : \left|\frac{1}{z}\right| < 2\}$

g) $G = \{z : \left|\frac{1}{z}\right| \geq 2\}$

h) $H = \{z : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 2\}$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 14.13 Individuare sul piano complesso il luogo dei punti z tali che sia reale il numero:

$$\frac{z+1-i}{z+1}$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.14 Si rappresenti sul piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z per i quali risulti

$$|z+1| \leq \frac{5}{2} < |z-2i|.$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.15 Si rappresentino sul piano di Argand-Gauss gli insiemi dei numeri complessi z per i quali risulti

a) $|z+1| \leq |z-2i| < \frac{5}{2}$

b) $|z-2| \leq |z+i| < \frac{5}{4}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.16 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z . Disegnare sul piano complesso i seguenti insiemi:

a) $A = \left\{z : 1 < |z| < 2; \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $B = \{iz : z \in A\}$

c) $C = \left\{z : |z-1| < \left|\frac{z}{2}\right|; 3\arg(z) > \frac{\pi}{2} + \arg(\bar{z})\right\}$

Argomento

Soluzione

Qualche esercizio teorico

ESERCIZIO 14.17 Si mostri che w è una radice n -esima del numero complesso z se e solo se \overline{w} è una radice n -esima di \overline{z} .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.18 Denotati con α e β due numeri complessi, che cosa rappresenta l'uguaglianza $|z - \alpha| = |z - \beta|$ nel piano di Argand-Gauss?

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 14.19 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z . Si dica, motivando, se almeno una delle seguenti relazioni è verificata da ogni numero complesso non nullo z :

$$\begin{aligned}\arg(z \overline{z}) &= \arg(z) \cdot \arg(z^{-1}), \\ \arg(z \overline{z}) &\equiv \arg(z) + \arg(z^{-1}) \pmod{2\pi}, \\ \arg(z \overline{z}) &\equiv \arg(z) \cdot \arg(z^{-1}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 14.20 Senza operare conti, si dica quali delle seguenti disuguaglianze sono risolubili, quali impossibili, quali prive di significato:

$$z + \overline{z} + |z|^2 \leq 0, \quad z - \overline{z} + |z|^2 \geq 0, \quad |2z| < |z - \overline{z}|$$

Argomento

Soluzione