Argomento 1
Numeri reali. Funzioni e loro grafici
Parte A - Numeri reali

Operazioni e ordinamento in $\mathbb{R}$

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali**, ossia l'insieme di numeri che sono esprimibili in forma decimale, ad esempio

$$5 \qquad -\frac{3}{4} = -0.75 \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\overline{3}$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots \qquad \pi = 3.14159\ldots$$

I numeri reali che ammettono una rappresentazione decimale finita oppure infinita ma periodica sono detti **razionali** [1]: essi possono sempre essere scritti sotto forma di frazione di due numeri interi. I numeri reali con forma decimale infinita *non* periodica sono detti **irrazionali**: essi *non* possono essere scritti sotto forma di frazione di due numeri interi.

Dati due numeri reali a e b, la *somma* $a + b$, la *sottrazione* $a - b$, il *prodotto* $a \cdot b$ sono definiti e sono ancora numeri reali; se $b \neq 0$ anche il *quoziente* $a : b$ è un numero reale, che spesso, utilizzando la notazione delle potenze, si denota con ab^{-1}, oppure con $\frac{a}{b}$ (anche se il numero ottenuto non è razionale). La definizione concreta di queste operazioni, nel caso di numeri irrazionali, è laboriosa: ma la cosa fondamentale è che per tutti i numeri reali valgono le ordinarie regole di calcolo (proprietà commutativa e associativa della somma, proprietà commutativa e associativa del prodotto, proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma).

Dati due numeri reali a e b, essi possono essere confrontati, cioè si può stabilire se sono uguali, o in caso contrario qual è il maggiore dei due; in particolare ogni numero può essere confrontato con 0: si dicono

- **positivi** i numeri > 0
- **negativi** i numeri < 0.

Poiché se $a < b$ e $b < c$ si ha anche $a < c$, un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo.
In generale per confrontare due numeri reali si utilizzano regole formali, del tutto simili a quelle che si usano nel caso di numeri razionali, che si rifanno alle seguenti tre proprietà:

- per ogni numero reale c, se $a < b$, anche $a + c < b + c$;

[1] Tutti i numeri che nella parte decimale contengono un $\overline{9}$ sono uguali al decimale finito più vicino; ad esempio

$$1.\overline{9} = 1.9999\ldots = 2 \qquad 3.21\overline{9} = 3.2199\ldots = 3.22 \qquad -5.0\overline{9} = -5.0999\ldots = -5.1;$$

quindi i numeri con questa forma hanno due diverse rappresentazioni decimali; nessun altro numero reale ha due diverse rappresentazioni decimali.

- per ogni numero reale positivo c, se $a < b$, anche $a \cdot c < b \cdot c$
- per ogni numero reale negativo c, se $a < b$, risulta $a \cdot c > b \cdot c$ [2].

Come succede per i numeri razionali, dati comunque due numeri reali a e b, con $a < b$, esiste un numero reale c compreso tra i due, ad esempio il numero $\frac{a+b}{2}$, cioè vale la

Proposizione 1.1 *L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è denso.*

Definizione 1.2 Se a è un numero reale, il **modulo** (o valore assoluto) di a è un numero reale non negativo, che indichiamo con $|a|$: esso è uguale ad a stesso se $a \geq 0$, mentre coincide con $-a$ se $a < 0$.

Ad esempio $|-3/4| = 3/4$. Avremo spesso a che fare con il modulo di un'espressione, ad esempio $2 - x$: per calcolare $|2 - x|$ si usa esattamente la definizione di modulo:

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases} .$$

Notiamo che $|2 - x| = |x - 2|$, visto che l'unica differenza nella definizione si ha per $x = 2$, ma in questo caso $x - 2 = 2 - x = 0$.

Sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$

Vogliamo ora scoprire che cosa rende l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sostanzialmente diverso da quello dei razionali. Prima è necessaria un po' di terminologia.

Definizione 1.3 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ viene detto **superiormente limitato** se esiste un numero reale b tale che

$$x \leq b \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

Si dice, in questo caso, che b è un **maggiorante** per l'insieme A.

Ovviamente, un insieme superiormente limitato non ha mai un solo maggiorante; infatti, ogni altro numero $c \geq b$ è un maggiorante per A.

Esempio 1.4 L'insieme $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n = 1, 2, 3, ... \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ... \right\}$ è superiormente limitato e ogni numero $b \geq 1$ ne è un maggiorante.
Invece, l'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è superiormente limitato.

---

[2] Queste proprietà permettono in particolare di confrontare due numeri espressi in forma decimale. Se sono entrambi positivi si guarda innanzi tutto quale dei due ha parte intera maggiore: ad esempio 1.010010001... ha parte intera 1 e quindi è maggiore di $0.\overline{98}$, che ha parte intera 0. Se la parte intera è la stessa, si confrontano successivamente tutte le cifre decimali a destra del punto: ad esempio 1.010010001... è maggiore di 1.01001, poiché la sua nona cifra decimale è 1 mentre quella di 1.01001 è 0.
Se invece i due numeri sono negativi il discorso si ribalta.

Teorema di completezza *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora esiste un (unico!) numero reale b^* tale che:*
i) *b^* è un maggiorante per A;*
ii) *ogni numero $b < b^*$ non è un maggiorante per A.*

Definizione 1.5 Il numero b^* viene chiamato **estremo superiore di** A, e denotato anche con $\sup A$. Le due proprietà che lo caratterizzano ci permettono di identificarlo come "*il più piccolo dei maggioranti di A*" [3].
Se il numero $b^* = \sup A$ appartiene ad A, diciamo che A ammette **massimo** e scriviamo $b^* = \max A$.

La scrittura $b^* = \max A$ contiene perciò due informazioni: il numero b^* è l'estremo superiore di A, e inoltre b^* appartiene all'insieme A.

Esempio 1.6 Nell'esempio precedente $\sup A = 1$. Infatti il numero 1 è un maggiorante per A. Inoltre nessun $b < 1$ è un maggiorante per A, poiché la condizione $\dfrac{n}{n+1} < b$ non è soddisfatta dagli interi $n > \dfrac{b}{1-b}$: infatti, se $b < 1$,

$$\frac{n}{n+1} < b \quad \Leftrightarrow \quad (1-b)\, n < b \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{b}{1-b}.$$

Infine, poichè $1 \notin A$, l'insieme A non ammette massimo.

Attenzione. È il teorema di completezza che permette di garantire che, se $a \geq 0$, l'equazione $x^n = a$ ammette una e una sola soluzione reale non negativa, cioè di garantire che esiste la **radice** (aritmetica) **n-esima di** a: $\sqrt[n]{a}$. A sua volta ciò permette di arrivare a definire la *potenza con esponente reale di un numero reale positivo* (Vedi MiniMat, Lezione 2).

Osservazione 1.7 Finora ci siamo occupati di insiemi superiormente limitati. In modo del tutto analogo si dice che un insieme A è **inferiormente limitato**, se esiste un numero reale a tale che $a \leq x$ per ogni $x \in A$ (a **minorante** di A). Il teorema di completezza garantisce l'esistenza dell'**estremo inferiore di** A (in simboli: $\inf A$), cioè garantisce che esiste in $\mathbb{R}$ un (unico) minorante a^* maggiore di ogni altro minorante di A. Se questo numero $a^* = \inf A$ appartiene ad A, è detto **minimo** di A, in simboli, $a^* = \min A$.

Definizione 1.8 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ viene detto **limitato** se è sia superiormente che inferiormente limitato.
Questo comporta l'esistenza di due numeri reali, $a^* = \inf A$ e $b^* = \sup A$, che soddisfano le condizioni

$$a^* \leq x \leq b^* \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

[3] Ciò che rende diversi i numeri reali dai razionali è proprio il fatto che *nei numeri razionali il teorema di completezza non vale*. Ad esempio, l'insieme $G = \{x \text{ razionali positivi tali che } x^2 < 2\}$ è superiormente limitato (gli elementi sono tutti minori ad esempio di 1.5) e ammette quindi estremo superiore reale (il numero $\sqrt{2}$), ma non c'è un numero razionale b^* più piccolo di ogni altro maggiorante razionale di G.

Esempi 1.9

- L'insieme $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n = 1, 2, 3, ... \right\} = \left\{ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}, ... \right\}$ è limitato, con $\min A = \dfrac{1}{2},\ \sup A = 1$.
- L'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è limitato, ma $\min B = 1$.
- L'insieme $C = \left\{ \dfrac{n+1}{n};\ n = 1, 2, 3, ... \right\} = \left\{ 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3}, ... \right\}$ è limitato, e $\inf C = 1,\ \max C = 2$.
- L'insieme $D = \left\{ 2,\ -4,\ \dfrac{2}{3},\ -16,\ \dfrac{2}{5},\ -36,\ \dfrac{2}{7}, ...,\ \dfrac{2}{(2k-1)},\ -(2k)^2, ... \right\}$ non è limitato, ma $\max D = 2$.
- L'insieme $E = \{..., -2n, ..., -6, -4, -2,\ 1,\ 3,\ 5, ..., 2n+1, ...\}$ non è limitato né superiormente né inferiormente.

Il numero reale e

Consideriamo gli insiemi $A = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n : n = 1, 2, 3, ... \right\}$ e $B = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} : n = 1, 2, 3, ... \right\}$ di cui sotto sono elencati alcuni elementi ottenuti ponendo n uguale a potenze di 10:

n	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
10^0	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
10^1	$1.1^{10} = 2.59\ldots$	$1.1^{11} = 2.85\ldots$
10^2	$1.01^{100} = 2.70\ldots$	$1.01^{101} = 2.73\ldots$
10^3	$1.001^{1000} = 2.716\ldots$	$1.001^{1001} = 2.719\ldots$
10^4	$1.0001^{10000} = 2.718\ldots$	$1.0001^{10001} = 2.718\ldots$

Si può mostrare che, per ogni numero naturale n, valgono le seguenti disuguaglianze:

- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, cioè al crescere di n, cresce anche il corrispondente elemento di A;
- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n$, cioè al crescere di n, il corrispondente elemento di B diventa più piccolo.

Poiché, fissato n, ogni elemento di A è più piccolo del corrispondente elemento di B, cioè

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

per ogni n si ha:

$$2=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \leq \ldots \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \ldots \leq \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4,$$

cioè i due insiemi A e B sono limitati e quindi sono dotati di estremo inferiore ed estremo superiore in $\mathbb{R}$. Precisamente: $\min A = 2$, $\max B = 4$, mentre si può mostrare che $\sup A$ e $\inf B$ (che non appartengono ai due insiemi, anzi non sono neppure numeri razionali) coincidono: il numero reale così ottenuto viene detto **numero di Nepero** e denotato con e.
È facile convincersi guardando la tabella sopra riportata che le prime cifre decimali del numero e sono $2.718\ldots$: infatti deve essere $1.0001^{10000} \leq e \leq 1.0001^{10001}$.
L'utilità del numero di Nepero emergerà quando si tratteranno limiti, derivate e integrali indefiniti.

Retta reale e intervalli. I simboli $+\infty$ e $-\infty$

Su una retta si fissi un sistema di riferimento cioè un'orientazione, un'origine e un'unità di misura; questa è la **retta euclidea**. Ad ogni punto di tale retta corrisponde uno e un solo numero reale. Viceversa, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto della retta euclidea. Di conseguenza, identificheremo la retta euclidea ed $\mathbb{R}$.
Notiamo che quando si pensano i numeri reali come punti di una retta è molto facile confrontarli: di due numeri è minore quello che, percorrendo la retta secondo la sua orientazione, precede l'altro (cioè, visto che di solito si adotta l'orientazione da sinistra a destra, quello più a sinistra).
La maggior parte della teoria che verrà svolta in queste lezioni riguarderà particolari insiemi di numeri reali che possono essere visualizzati sulla retta reale come segmenti (con o senza gli estremi).

Definizione 1.10 Si chiamano **intervalli** i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x < b\}$ intervallo limitato aperto
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x \leq b\}$ intervallo limitato chiuso
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a \leq x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra (e aperto a destra)
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } a < x \leq b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra (e chiuso a destra).

È utile poter rappresentare come intervalli anche insiemi che sulla retta reale si visualizzano come semirette: ma questi sono insiemi non limitati. Ad esempio l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x > a\}$ ha estremo inferiore a ma non ha un maggiorante b che possa essere usato per delimitare l'intervallo a destra: questa situazione viene descritta usando il simbolo ∞ (che si legge: "**infinito**"). Precisamente si scrive

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x > a\} = (a, +\infty)$$

e si dice che $(a, +\infty)$ è un **intervallo aperto illimitato a destra**.

Analogamente

- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x < b\}$ intervallo aperto illimitato (a sinistra)
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \geq a\}$ intervallo illimitato (a destra)
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \leq b\}$ intervallo illimitato (a sinistra).

Con la stessa simbologia: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Conviene sottolineare che $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri reali (anche se nella descrizione degli intervalli illimitati compaiono nella stessa posizione in cui, nella descrizione degli intervalli limitati, compaiono i numeri reali) ma puri simboli, il cui significato è chiarito proprio dalla definizione precedente [4]. Questo significa in particolare che non hanno senso scritture come $-\infty < x < b$ o come $[-\infty, b]$.

Più in generale, si possono utilizzare i simboli $+\infty$ e $-\infty$ per descrivere un insieme A non limitato (superiormente o inferiormente):

- quando A non è superiormente limitato, si usa dire che $\sup A = +\infty$
- quando A non è inferiormente limitato, si usa dire che $\inf A = -\infty$.

Ad esempio, riprendendo gli esempi 1.9,

1) l'insieme $B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ non è superiormente limitato, quindi $\sup B = +\infty$

2) l'insieme $D = \left\{..., -36, -16, -4, \ 2, \ \frac{2}{3}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{2}{7}, ...\right\}$ non è inferiormente limitato, quindi $\inf D = -\infty$

3) l'insieme $E = \{..., -2n, ..., -6, -4, -2, 1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...\}$ non è limitato, né inferiormente né superiormente e quindi $\inf E = -\infty$, $\sup E = +\infty$.

Una nota pratica Numeri che, rappresentati in forma decimale, risultino illimitati (periodici o no) non possono essere "scritti per esteso". Quando si devono risolvere problemi pratici si usano quindi approssimazioni decimali limitate (più o meno precise, a seconda delle esigenze): è quello che fa una calcolatrice quando approssima π con 3.141592654; usiamo certamente un'approssimazione meno precisa quando vogliamo rappresentare π sulla retta reale. Dato un numero, la sua approssimazione per difetto, ad esempio, alla quinta cifra decimale si ottiene troncando la sua rappresentazione decimale alla quinta cifra, quella per eccesso si ottiene aggiungendo un'unità alla quinta cifra della rappresentazione per difetto. Ad esempio, l'approssimazione per difetto di π alla quinta cifra decimale è 3.14159 e quella per eccesso è 3.14160. Questo equivale ad aver suddiviso l'asse reale in intervalli di ampiezza 10^{-5} e a dire che π cade nell'intervallo $[3.14159, 3.14160)$. Ogni numero reale è compreso tra una qualunque sua approssimazione per difetto ed una qualunque sua approssimazione per eccesso ed eventualmente può coincidere con una per difetto: ad esempio, l'approssimazione per difetto alla quinta cifra decimale di 1.23 è $1.23000 = 1.23$. La scelta tra i due tipi di approssimazione è legata alla necessità di arrotondare il numero reale al numero decimale finito che gli è più vicino: ad esempio, se si vuole dare una approssimazione alla quarta cifra decimale di π, è meglio scegliere quella per eccesso.

Prima di introdurre le funzioni reali di variabile reale, conviene infine ricordare che $\mathbb{R}^2$ indica l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali e la sua rappresentazione geometrica è il piano cartesiano cioè un piano nel quale è stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Può essere utile in proposito rivedere i "Richiami di geometria analitica" contenuti nella Lezione 6 di Minimat.

[4] È possibile introdurre delle operazioni tra questi simboli, ma il loro senso sarà chiaro solo parlando di limiti e quindi l'aritmetizzazione dei simboli $-\infty$ e $+\infty$ sarà data solo nell'Argomento 3.

Argomento 1
Numeri reali. Funzioni e loro grafici
Parte B - Funzioni e loro grafici

Funzioni reali di variabile reale

Definizioni 1.11

- Supponiamo che A sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e che esista una legge che ad ogni elemento x di A associa *uno e un solo* numero reale. In questo modo viene definita una **funzione** f da A in $\mathbb{R}$ che indichiamo con $f : A \to \mathbb{R}$.
- L'insieme A è detto **dominio di** f : per definire la funzione esso è importante quanto la legge.
- Per ogni x di A il numero associato ad x si indica con $f(x)$ ed è detto **immagine di** x **attraverso** f.
- L'insieme $f(A) = \{y \in \mathbb{R}$ tali che esista almeno un $x \in A$ con $f(x) = y\}$, è detto **immagine di** A tramite f.
- L'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

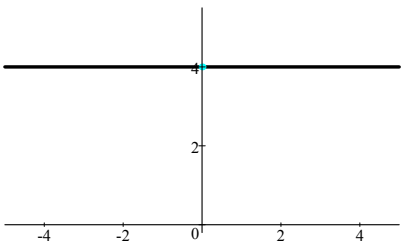
è detto **grafico della funzione** $f : A \to \mathbb{R}$.
Con queste notazioni, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta variabile **dipendente**[1].

Introducendo la nozione di grafico si ha in mente di fornire una descrizione geometrica della funzione che ne visualizzi le proprietà: in particolare, nel piano cartesiano, il dominio è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse, l'immagine $f(A)$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, mentre il grafico è un insieme di punti con la proprietà che, *su ogni retta parallela all'asse* y passante per un punto $(a, 0)$ del dominio, *c'è uno e un sol punto del grafico.*

Esempio 1.12

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 4$

è una funzione avente:
dominio $\mathbb{R}$
e
immagine (in azzurro in figura) $f(\mathbb{R}) = \{4\}$.

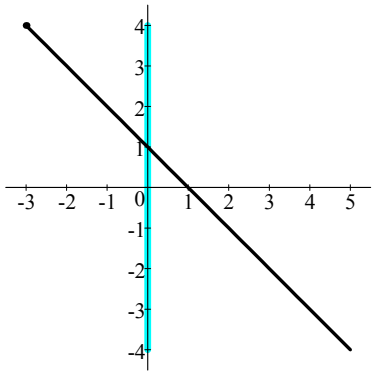


[1] Attenzione: si può decidere, a seconda delle necessità, di dare alla variabile indipendente e a quella dipendente nomi diversi da x e y. Ad esempio $t = f(s)$ rappresenta una funzione con variabile indipendente s e variabile dipendente t.

Esempio 1.13 [2]

$f : [-3, 5) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - x$

è una funzione avente:
dominio $[-3, 5)$
e
immagine (in azzurro in figura) $f([-3, 5)) = (-4, 4]$.



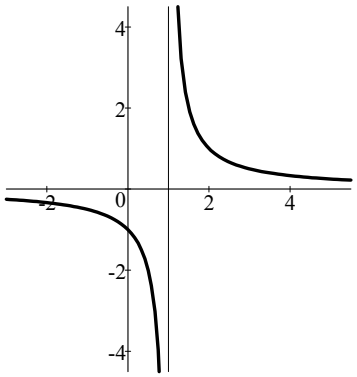
Esempio 1.14

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ è una funzione avente dominio $\mathbb{R}$ e immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Esempio 1.15

$f : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

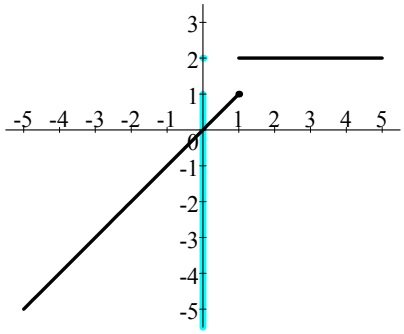
è una funzione avente:
dominio $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
e immagine
$f((-\infty, 1) \cup (1, +\infty)) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Esempio 1.16

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

è una funzione avente:
dominio $\mathbb{R}$
e
immagine (in azzurro in figura) $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1] \cup \{2\}$.



[2] Il punto in evidenza che delimita alcune curve indica, qui e negli esempi successivi, che si deve pensare quel punto appartenente al grafico; invece il punto non appartiene al grafico se non è in evidenza.

Esempi 1.17

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \pm x$ **non** è una funzione perchè ad ogni $x \neq 0$ sono associati due valori, $+x$ e $-x$, e **non uno solo**.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 3 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ **non** è una funzione perchè ad ogni x dell'intervallo $(1, 3]$ sono associati due valori.

A riprova del fatto che le leggi degli esempi 1.17 non descrivono funzioni, si noti che in entrambi i casi, se si disegna sul piano cartesiano l'insieme dei punti $B = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$, c'è almeno una retta parallela all'asse y su cui si trovano due punti di B: in entrambi i casi può andar bene ad esempio la retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

Per assegnare una funzione si devono specificare il dominio A e la legge f. Quindi due **funzioni** sono **uguali** se i loro domini coincidono e se ad ogni elemento del dominio associano lo stesso valore.

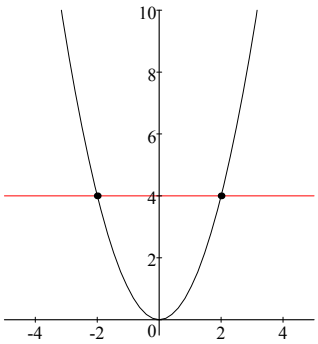
Spesso si assegna una funzione specificando solo la legge. In questo caso il dominio è il più grande sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ tale che per ogni x di I esiste il numero reale $f(x)$. Il sottoinsieme I è detto **insieme di definizione** o **campo di esistenza** della funzione f e viene denotato con $E(f)$.

Esempi 1.18

- $f(x) = \dfrac{1}{3x - 2 - x^2}$ ha insieme di definizione $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, poiché il denominatore deve essere diverso da zero.
- $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ ha insieme di definizione $(-\infty, 1/2]$, poiché il radicando, $1 - 2x$, deve essere ≥ 0.
- $f(x) = \dfrac{1}{4 - \sqrt{x}}$ ha insieme di definizione $[0, 16) \cup (16, +\infty)$, poiché il radicando, x, deve essere ≥ 0 e il denominatore deve essere diverso da zero.

Iniettività

Non è detto che a due valori distinti di x la funzione f faccia corrispondere numeri diversi. Negli Esempi 1.12 e 1.16 la legge stessa con cui è definita f mostra che la funzione associa a valori distinti di x lo stesso numero; nell'Esempio 1.14 la stessa cosa si vede dal grafico: basta trovarne le intersezioni con rette parallele all'asse x. Ad esempio intersecando il grafico di $f(x) = x^2$ con la retta di equazione $y = 4$ si trovano i due punti di ascissa $x = 2$ e $x = -2$.



Definizione 1.19 Si dice che la funzione è **iniettiva su** A se per ogni coppia di elementi s e t di A con $s \neq t$ risulta $f(s) \neq f(t)$. Questo è equivalente a dire che se $f(s) = f(t)$ allora $s = t$.

Graficamente questo significa che ogni retta orizzontale interseca il grafico di f al più in un punto.

Di conseguenza se f è iniettiva e y è un elemento di $f(A)$ c'è un solo x in A tale che risulti $y = f(x)$.

Esempio 1.20 La funzione: $f(x) = 3x+2$ è iniettiva: infatti si ha $f(s) = f(t)$ solo se $3s+2 = 3t+2$ cioè, risolvendo, solo se $s = t$.

Esempio 1.21 La funzione: $f(x) = x^3$ è iniettiva: infatti si ha $f(s) = f(t)$ solo se $s^3 = t^3$, cioè, risolvendo, solo se $s = t$.

Composizione di funzioni

Consideriamo due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $f(A) \subseteq B$, da un elemento x di A si può passare a un elemento $t = f(x)$ di B e da questo a un elemento $y = g(f(x))$ di $g(B)$. Ciò porta alla seguente

Definizione 1.22 Date due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$, definiamo **funzione composta** $g \circ f$ la funzione $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che associa ad x il valore $g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Si usa sintetizzare tutto il procedimento con due diagrammi (uno sugli insiemi e l'altro, parallelo, sugli elementi):

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{g\circ f}{---\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow} & g(B) \\ {\scriptstyle f}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle g} \\ & f(A) \subseteq B & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & \overset{g\circ f}{---\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow} & g(f(x)) \\ {\scriptstyle f}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle g} \\ & f(x) & \end{array}$$

Prima di esaminare qualche esempio, ribadiamo che per calcolare il valore della funzione $g \circ f$ in un punto x di A prima si calcola il valore $t = f(x)$ di f in x e successivamente si calcola il valore $g(t)$ di g in t.

Esempio 1.23 Consideriamo le funzioni: $f(x) = 3x + 2$, definita in $A = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$, definita in $B = \mathbb{R}$. Si ha $f(A) = \mathbb{R} = B$ e la funzione composta $g \circ f$ è definita da

$$(g \circ f)(x) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

Esiste anche la funzione composta $f \circ g$, poiché $g(B) = [0, +\infty) \subset A$; ma $(f \circ g)(x) = f(x^2) = 3x^2+2$: questa legge è diversa dalla $(g \circ f)(x)$.

Esempio 1.24 Consideriamo le funzioni: $f(x) = \sqrt{x}$, definita in $A = [0, +\infty)$ e $g(x) = -|x| - 1$, definita in $B = \mathbb{R}$. Si ha $f(A) = [0, +\infty) \subset B$ e la funzione composta $g \circ f$ è definita da $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = -|\sqrt{x}| - 1 = -\sqrt{x} - 1$. Invece la funzione $f \circ g$ non esiste per nessun valore reale di x, poiché $g(B) = (-\infty, -1]$ non ha nessun punto in comune con il dominio $[0, +\infty)$ di $f(x)$.

Gli esempi che seguono mostrano come individuare le **funzioni componenti** di una funzione composta. In qualche caso c'è un solo modo di scomporre una funzione, in altri no. Se si scompone una funzione per poter fare su di essa "dei conti" (ad esempio, ricerca dell'insieme di definizione o, come vedremo negli argomenti successivi, calcolo di limiti o derivate) si favoriscono le scomposizioni più semplici. In qualche caso invece una scomposizione apparentemente più complicata può aiutare a vedere meglio particolari proprietà o evidenziare una particolare costruzione.

Esempio 1.25 La funzione $F(x) = \sqrt{x-1}$ si può descrivere solo come segue: "prendi un qualunque numero reale x (purché ≥ 1): ad esso sottrai 1; poi calcola la radice quadrata del risultato". In simboli:

$$x \xrightarrow{(\,)-1} x-1 \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{x-1}$$

e quindi si può vedere come la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x-1$, $g(t) = \sqrt{t}$.

Esempio 1.26 La funzione $F(x) = 3(x-2)+1$, che si può leggere come: "al triplo della differenza tra x e 2 aggiungi 1", è ottenuta attraverso i seguenti 3 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\,)-2} x-2 \xrightarrow{3\cdot(\,)} 3(x-2) \xrightarrow{(\,)+1} 3(x-2)+1$$

e quindi è la funzione composta $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$ con $f(x) = x-2$, $g(t) = 3t$, $h(z) = z+1$.
Ma la stessa funzione si riscrive $F(x) = 3x - 5$ e si può dunque ottenere facendo solo i seguenti due passaggi:

$$x \xrightarrow{3\cdot(\,)} 3x \xrightarrow{(\,)-5} 3x-5$$

e quindi si può vedere come la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = 3x$, $g(t) = t-5$.

Traslazioni

Particolari esempi di funzioni composte sono quelle ottenute componendo la funzione f con la funzione $g(t) = t + c$ (ove c denota un numero reale), in ciascuno dei modi possibili:

$$g \circ f \text{ e } f \circ g \ ^{(3)}.$$

[3] Attenzione: mentre $g \circ f$ è definita purché sia definita f, può succedere che l'insieme di definizione di $f \circ g$ cambi a seconda del numero reale c scelto.

Osservazione 1.27 Comunque si scelga il numero reale c,

- il grafico della funzione composta $f(x)+c$ si ottiene traslando verticalmente il grafico di $f(x)$ di c unità nel verso positivo dell'asse y
- il grafico della funzione composta $f(x+c)$ si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di $f(x)$ di c unità nel verso negativo dell'asse x.

Perciò queste composizioni di funzioni vengono talora dette traslazioni della funzione f.

Esempio 1.28 La funzione $F(x)=x^2+2$ è ottenuta attraverso i seguenti 2 passaggi:

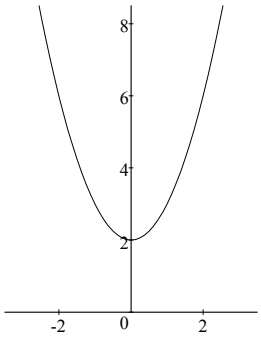
$$x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{(\,)+2} x^2+2$$

e quindi è la funzione composta $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ con $f(x)=x^2$, $g(t)=t+2$ [4].
Il grafico della funzione F si ottiene per traslazione della parabola $y=x^2$ di 2 unità nel verso positivo dell'asse y.

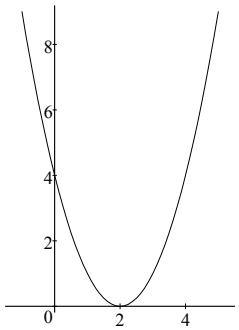
Esempio 1.29 La funzione $F(x)=(x-2)^2$ è ottenuta con i seguenti 2 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\,)-2} x-2 \xrightarrow{(\,)^2} (x-2)^2$$

e quindi è la funzione composta $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ con $f(x)=x-2$, $g(t)=t^2$.
Il grafico della funzione F si ottiene per traslazione della parabola $y=x^2$ di 2 unità nel verso positivo dell'asse x.



Esempio 1.28



Esempio 1.29

Di solito è abbastanza facile rendersi conto se una funzione è ottenuta da un'altra per traslazione nella direzione dell'asse y, mentre è meno facile visualizzare le eventuali traslazioni orizzontali.

[4] In questo caso non c'è modo di interpretare diversamente la composizione.

Esempio 1.30 È chiaro che la funzione $F(x) = x^2 + x - 2$ si può scomporre semplicemente così

$$x \xrightarrow{(\,)^2 + (\,)} x^2 + x \xrightarrow{(\,) - 2} (x^2 + x) - 2$$

cioè $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2 + x$ e $g(t) = t - 2$, per cui il grafico di F è ottenuto traslando quello di f di 2 unità nella direzione negativa dell'asse y.
Ma $F(x) = x^2 + x - 2$ è anche ottenuta con i seguenti 3 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\,) + \frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} \xrightarrow{(\,)^2} x^2 + x + \frac{1}{4} \xrightarrow{(\,) - \frac{9}{4}} x^2 + x - 2$$

cioè è la funzione composta $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$ con $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $g(t) = t^2$ e $h(z) = z - \frac{9}{4}$.
Quindi si può anche dire che il grafico della funzione F è ottenuto traslando la parabola $y = x^2$ di $1/2$ nella direzione negativa dell'asse x e di $9/4$ nella direzione negativa dell'asse y [5].

In genere il primo tipo di scomposizione è più che sufficiente per applicare regole di calcolo, il secondo è invece di aiuto quando si cerca di individuare l'andamento di un grafico utilizzando grafici già noti.

Simmetrie

Particolari esempi di funzioni composte sono quelle ottenute componendo la funzione f con la funzione $g(t) = -t$, in ciascuno dei modi possibili: $g \circ f$ e $f \circ g$. Le funzioni così ottenute vengono talora dette simmetriche della funzione f: infatti vale la seguente

Osservazione 1.31

- Il grafico della funzione composta $f(-x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y,
- il grafico della funzione composta $-f(x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x,
- il grafico della funzione composta $-f(-x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'origine O del sistema di riferimento;

ne segue che $-f(x)$ ha grafico simmetrico del grafico di $f(-x)$ rispetto all'origine O del sistema di riferimento.

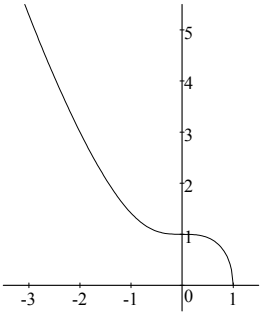
Ad esempio, se il primo grafico in figura è quello di $f(x)$, gli altri sono, nell'ordine, i grafici di $f(-x)$ e $-f(-x)$.

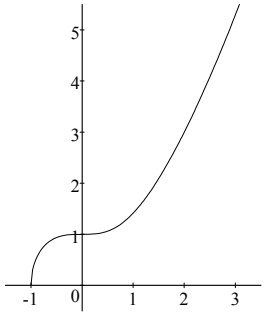
---

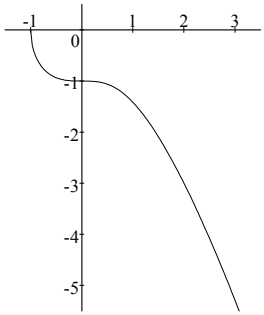
[5] Non si può invece scomporre

$$x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{???} (x^2) + x - 2$$

poiché non c'è una legge univoca che applicata a x^2 dia $(x^2) + x - 2$





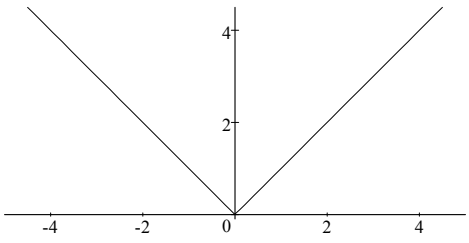


Definizioni 1.32

- Se $f(-x) = f(x)$ per ogni x del dominio di f la funzione è detta **pari**. Essa ha grafico simmetrico rispetto all'asse y.
- Se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x del dominio di f la funzione è detta **dispari**. Essa ha grafico simmetrico rispetto all'origine O del sistema di riferimento.

Esempi 1.33

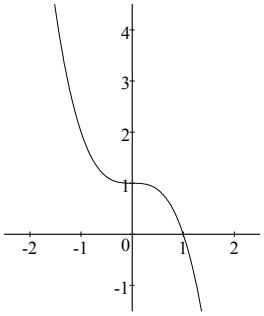
- La funzione $f(x) = x^3$ è dispari, mentre la funzione $f(x) = x^2$ è pari.
- Anche la funzione modulo di x: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è pari; essa ha questo grafico



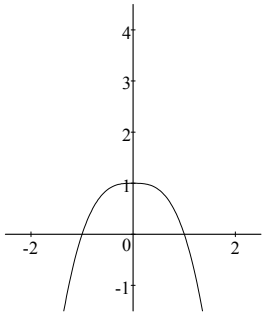
Può essere interessante vedere che cosa succede componendo nei due modi possibili la funzione $f(x) = |x|$ con un'altra funzione $g(x)$. Per definizione

$$g(f(x)) = g(|x|) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad \text{mentre} \quad f(g(x)) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}.$$

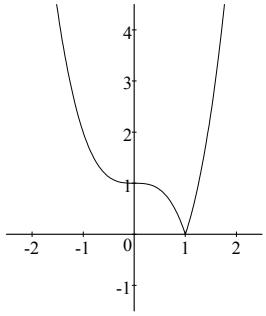
Allora, se il primo grafico nella figura successiva è quello di $g(x)$, gli altri sono, nell'ordine, i grafici di $g(|x|)$ e $|g(x)|$



$g(x)$



$g(|x|)$



$|g(x)|$

cioè:

- il grafico di $g(|x|)$ si ottiene facendo il simmetrico rispetto all'asse y della parte del grafico di g che sta nel semipiano delle x positive (e quindi $g(|x|)$ è una funzione pari)
- il grafico di $|g(x)|$ si ottiene facendo il simmetrico rispetto all'asse x della parte del grafico di g che sta nel semipiano delle y negative (e quindi $|g(x)|$ non assume mai valori negativi e non ha, a priori, particolari simmetrie)

Funzione inversa

Abbiamo visto che se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva, per ogni elemento y di $f(A)$ c'è un solo x in A tale che risulti $y = f(x)$. Si può allora definire una funzione $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni y di $f(A)$,

$$g(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y.$$

La funzione così definita è tale che per ogni x di A si ha $g(f(x)) = x$ e per ogni y di $f(A)$ si ha $f(g(y)) = y$: per questo di solito si indica con f^{-1}. Riassumendo

Definizione 1.34 Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. La funzione $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo per ogni y di $f(A)$

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y.}$$

si chiama **funzione inversa** di f.

Per quanto osservato prima della definizione, per ogni x di A si ha

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$$

e per ogni y di $f(A)$ si ha

$$y \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(y) \xrightarrow{f} y.$$

Non sempre, anche se esiste, si può ricavare esplicitamente la funzione inversa. Nel caso degli Esempi 1.20 e 1.21, si può: basta scrivere $f(x) = y$ e risolvere questa come un'equazione in x cioè "ricavare la x in funzione di y".

Esempio 1.20 bis $f(x) = 3x + 2 = y$ implica $x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$: quindi $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$ [6]. In effetti: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+2) = \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x$ e $f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right) + 2 = y$.

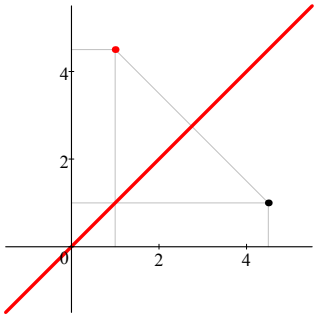
Esempio 1.21 bis $f(x) = x^3 = y$ implica $x = \sqrt[3]{y}$: quindi $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. La verifica si fa come sopra: da notare anzi che posso dire che "definisco radice cubica" la funzione inversa della potenza terza.

Esempio 1.14 bis Si è già detto che $f(x) = x^2$ non è iniettiva se si prende come dominio tutto $\mathbb{R}$. Lo è però se si restringe il dominio a $[0, +\infty)$: verificarlo sul grafico! Come negli esempi precedenti, $f(x) = x^2 = y$ con $x \geq 0$ implica $x = \sqrt{y}$: quindi in questo caso $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Si può fare lo stesso ragionamento anche se $x \leq 0$: ma in questo caso la soluzione è $x = -\sqrt{y}$, quindi l'inversa della funzione $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

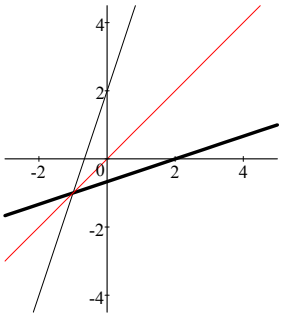
Per quanto riguarda il grafico $\mathcal{G}(f^{-1})$ della funzione f^{-1}, osserviamo che un punto $P = (t, s)$ appartiene al grafico di f^{-1} se e solo se $s = f^{-1}(t)$; questo succede se e solo se $f(s) = t$ cioè se e solo se $P' = (s, t)$ appartiene al grafico $\mathcal{G}(f)$ di f :

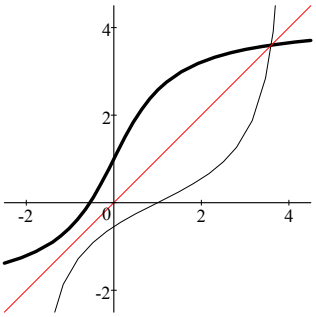
$$P = (t, s) \in \mathcal{G}(f^{-1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad P' = (s, t) \in \mathcal{G}(f),$$

cioè ogni punto P del grafico di f^{-1} si ottiene da un punto P' del grafico di f scambiando le coordinate. Ma scambiare le coordinate di un punto nel piano equivale ad operare una simmetria rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante:



Di conseguenza il grafico di f^{-1} è simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante.
L'idea è illustrata in ciascuna delle due figure sottostanti accostando i grafici di f (linea sottile) e di f^{-1} (linea spessa). In particolare nella prima figura sono rappresentati i grafici di $f(x) = 3x + 2$ e di $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.





[6] Attenzione a non confondere! La funzione $h(x) = \frac{1}{3x+2}$ è la reciproca della funzione $f(x) = 3x + 2$, NON la sua inversa!

Funzioni monotòne

Definizione 1.35 Consideriamo una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Essa è detta

(a) **monotòna strettamente crescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) < f(t)$

(b) **monotòna strettamente decrescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) > f(t)$

(c) **monotòna** (debolmente) **crescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) \leq f(t)$, ma c'è almeno una coppia di elementi s, t di A per i quali risulta $f(s) = f(t)$

(d) **monotòna** (debolmente) **decrescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) \geq f(t)$, ma c'è almeno una coppia di elementi s, t di A per i quali risulta $f(s) = f(t)$.

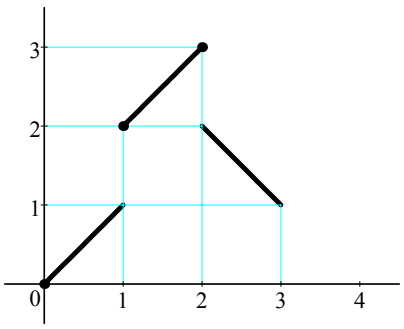
Una funzione è detta **strettamente monotòna su** A se per essa vale una delle due condizioni **(a)** o **(b)**.
Osserviamo che *ogni funzione strettamente monotona su* A è iniettiva su A e quindi *ha inversa su* A [7].
Una funzione è detta **debolmente monotòna su** A se per essa vale una delle due condizioni **(c)** o **(d)**.
Osserviamo che le funzioni debolmente monotone su A non sono iniettive su A (anche se possono esserlo su dei sottoinsiemi di A).
Le funzioni costanti sono esempi di funzioni debolmente monotone: per esse **(c)** e **(d)** valgono contemporaneamente.

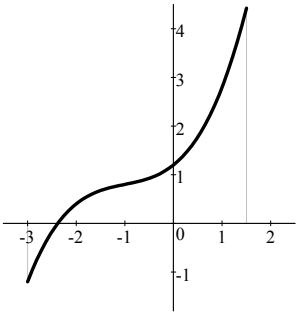
---

[7] Ma non è vero che tutte le funzioni iniettive siano monotòne. Ad esempio

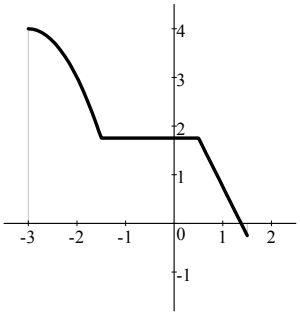
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 4-x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

non è monotòna, ma è iniettiva, come si vede dal grafico:





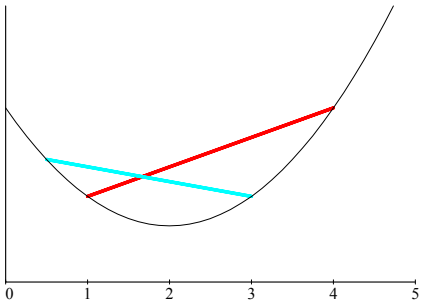
Funzione strettamente crescente su $[-3{,}1.5]$



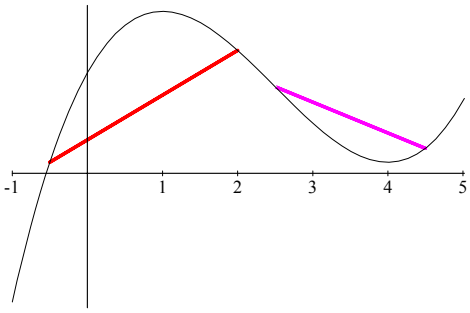
Funzione (debolmente) decrescente su $[-3{,}1.5]$

Funzioni convesse e concave

Definizione 1.36 Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta **convessa** (o concava verso l'alto) nell'intervallo (a, b) se, per ogni coppia di elementi s e t in (a, b) con $s < t$, il segmento che unisce i punti $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ sta tutto sopra il grafico di f in (s, t) [8].
Analogamente la funzione f è detta **concava** (verso il basso) nell'intervallo (a, b) se per ogni coppia di elementi s e t in (a, b) il segmento che unisce i punti $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ sta tutto sotto il grafico di f in (s, t).



Funzione convessa in $[0{,}5]$



Funzione nè concava nè convessa in $[-1{,}5]$

[8] Questa ultima proprietà si esprime in formule richiedendo che per ogni $x \in (a, b)$ valga la relazione

$$f(x) \leq f(s) + \frac{f(t) - f(s)}{t - s}(x - s)$$

o anche che, per ogni $\lambda \in (0, 1)$, valga la relazione

$$f(\lambda s + (1 - \lambda) t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(t).$$

Funzioni limitate. Massimi e minimi

Definizione 1.37 Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **limitata in** A se la sua immagine

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tali che esista almeno un } x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

è un insieme limitato.
Questo significa che esistono due numeri h, $k \in \mathbb{R}$ per i quali vale la relazione

$$h \leq f(x) \leq k \qquad \text{per ogni } x \in A;$$

e quindi il grafico di f sta tutto sotto la retta $y = k$ e tutto sopra la retta $y = h$.
Similmente

Definizioni 1.38

- Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **superiormente limitata in** A se la sua immagine $f(A)$ è un insieme superiormente limitato, cioè esiste un numero reale k tale che $f(x) \leq k$ per ogni $x \in A$. L'estremo superiore di $f(A)$ è detto **estremo superiore di** f **in** A e si indica con [9] $\sup f$.

- Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitata in** A se la sua immagine $f(A)$ è un insieme inferiormente limitato, cioè esiste un numero reale h tale che $h \leq f(x)$ per ogni $x \in A$. L'estremo inferiore di $f(A)$ è detto **estremo inferiore di** f **in** A e si indica con $\inf f$.

- Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ ha **massimo** (assoluto) M (e si scrive $\max f = M$) se M è il massimo dell'insieme immagine $f(A)$. In tal caso esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \leq f(x_0) = M$ e il punto x_0 è detto **punto di massimo per** f **in** A.

- Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ ha **minimo** (assoluto) m (e si scrive $\min f = M$) se m è il minimo dell'insieme immagine $f(A)$. In tal caso esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ risulta $m = f(x_0) \leq f(x)$ e il punto x_0 è detto **punto di minimo per** f **in** A.

Esempi 1.39

- La funzione $f(x) = 1 - x$ è limitata in $(0, 1]$, ha minimo $m = 0$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$ (punto di minimo), ma non ha massimo. Il suo estremo superiore è 1.

- La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è limitata in $[1, +\infty)$, ha massimo $M = 1$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$ (punto di massimo), ma non ha minimo. Il suo estremo inferiore è 0.

- La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è limitata inferiormente in $(0, 1]$, ha minimo $m = 1$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$, ma non è limitata.

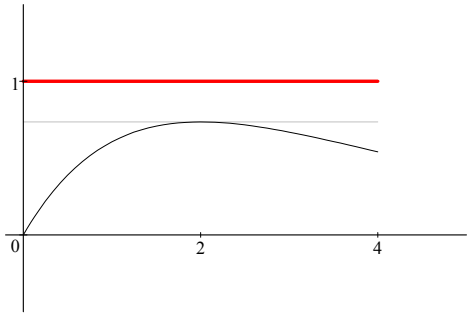
Come già accennato, si può stabilire se una funzione è limitata guardando se il suo grafico è tutto compreso tra due rette parallele all'asse x. Nell'esempio in figura

---

[9] Se occorre distinguere l'estremo superiore assunto dalla funzione f su un insieme A da quello assunto su un insieme B, si possono usare le notazioni:

$$\sup\{f(x) \,|\, x \in A\} \qquad \text{o} \qquad \sup_{x \in A}\{f(x)\} \qquad \text{o} \qquad \sup_{A} f.$$

Notazioni analoghe vengono usate nelle definizioni successive.



$$f : [0, 4] \to R$$

la funzione è sicuramente limitata poiché il grafico è compreso tra le rette $y = 0$ e $y = 1$.
La retta $y = 0$ interseca il grafico nel punto $(0, 0)$: questo significa che $x_0 = 0$ è punto di minimo e il minimo di f su $[0, 4]$ è 0.
Invece $y = 1$ non interseca il grafico, anzi si vede che ci sono (infinite) rette "a quota più bassa di $y = 1$" (cioè della forma $y = k$ con $k < 1$) che stanno sopra il grafico: ciò significa che 1 è un maggiorante dell'insieme $f([0, 4])$, ma non il suo estremo superiore. In realtà è chiaro dalla figura che la funzione ha un massimo: per trovarlo, consideriamo le rette $y = k$ con $k < 1$, a partire da $y = 1$, finché in corrispondenza a una retta di equazione $y = k^*$ troviamo un'intersezione: k^* è il massimo.

Segno e zeri di una funzione

Finora abbiamo messo in evidenza quelle proprietà delle funzioni che non variano anche se si operano traslazioni del grafico: ad esempio se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è monotòna crescente in A anche $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) + c$ è monotòna crescente in A e, analogamente, risulta monotòna crescente in $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x + c \in A\}$ la funzione $h : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x + c)$.
Non è invece di questo tipo una proprietà come il segno, che pure talora si dimostra utile per tracciare il grafico della funzione.

Definizione 1.40 Si dice che

- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è **positiva su** A se per ogni x di A risulta $f(x) > 0$
- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è **negativa su** A se per ogni x di A risulta $f(x) < 0$
- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **ha uno zero in** A se esiste un x_0 di A tale che $f(x_0) = 0$ [10].

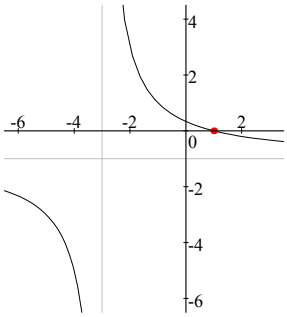
[10] ATTENZIONE: quando si dice che f ha uno zero in A si intende che ne ha almeno uno, non che ne ha esattamente uno. Ancora, non è detto che se $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è positiva su (a, c) e negativa su (c, b) allora f abbia uno zero in c. Vedi ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in (0, 2] \\ -1 \text{ se } x \in (2, 3) \end{cases} .$$

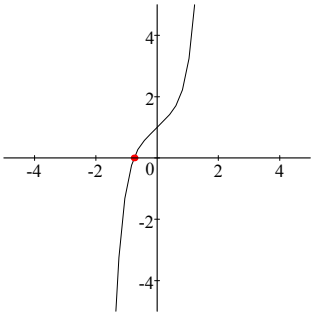
Esempio 1.41 La funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$, che ha insieme di definizione $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, ha uno zero solo in $x_0 = 1$, come si vede risolvendo l'equazione $\dfrac{1-x}{x+3} = 0$ (vedi Minimat, lezione 4, equazioni fratte). Invece, studiando la disequazione fratta $\dfrac{1-x}{x+3} > 0$ (vedi Minimat, lezione 5), si vede che essa è verificata dagli x appartenenti all'intervallo $(-3, 1)$: quindi la funzione è positiva su questo intervallo, mentre è negativa sull'insieme $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
Quando si traccia il grafico di f queste osservazioni dicono che

- nell'intervallo $(-3, 1)$ il grafico sta sopra l'asse x
- nell'insieme $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ il grafico sta sotto l'asse x
- il grafico interseca l'asse x solo nel punto di ascissa 1.

Quando avremo anche tutti gli altri strumenti che servono per fare uno studio di funzione, queste informazioni ci permetteranno di vedere che il grafico della funzione data è di questo tipo:



Osservazione 1.42 Notiamo che, viceversa, se si conosce il grafico di una funzione è possibile stabilire se quella funzione è positiva (o negativa) su un certo insieme e se ha degli zeri.
Ad esempio, il grafico rappresentato qui sotto



interseca l'asse x, nel punto (denotato in figura con un pallino rosso) di coordinate $(x_0, 0)$, ove x_0 è un numero compreso tra -1 e 0. Quindi la corrispondente funzione f ha uno zero in $x = x_0$.

Inoltre, visto che il grafico sta

- sopra l'asse x quando l'ascissa dei suoi punti è $> x_0$
- sotto l'asse x quando l'ascissa dei suoi punti è $< x_0$

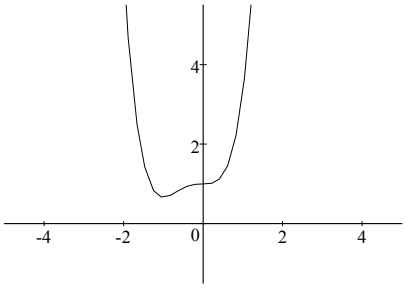
la funzione f è positiva per $x > x_0$ e negativa per $x < x_0$.

Abbiamo così evidenziato uno strumento per lo studio di disequazioni della forma $f(x) \geq 0$ (oppure $f(x) \leq 0$) che può essere utilizzato ogniqualvolta si sappia tracciare, in modo sia pure sommario, il grafico della funzione f.
Come visto nell'esempio, se non siamo in grado di determinare gli zeri in maniera esatta, i risultati saranno puramente indicativi: ciononostante è proprio in questi casi che il metodo si rivela più utile. In realtà spesso non si è in grado di individuare in modo esatto il segno di una funzione e i suoi eventuali zeri, neppure quando la legge è abbastanza semplice, ad esempio un polinomio (vedi MiniMat, Lezione 3): ma in questo caso si sa studiare la funzione (e in particolare tracciarne il grafico) e quindi si può capire se la funzione ha sempre segno costante sul suo insieme di definizione oppure no ed eventualmente se ha degli zeri.
Premesso che per portare avanti questo programma sarà necessario introdurre altre proprietà delle funzioni (continuità, derivabilità ecc.) illustriamo qui l'idea su un altro esempio.

Esempio 1.43 Supponiamo di voler stabilire quali valori di x verificano la disequazione

$$x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1 > 0.$$

Dopo aver imparato come si studia una funzione, vedremo che la funzione $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1$ ha un grafico di questo tipo



sul quale si legge immediatamente che la funzione è sempre positiva e quindi la disuguaglianza è sempre verificata.

Argomento 1 - Esercizi

Avvertenza: alcuni esercizi, denotati con *, possono presentare qualche difficoltà per i principianti.

ESERCIZIO 1.1 Eseguire il seguente prodotto di numeri reali: $\left(\sqrt{7}-3\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.2 Confrontare i numeri reali $a=\dfrac{1+\sqrt{26}}{2}$ e $b=\dfrac{2+\sqrt{17}}{2}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.3 Mettere in ordine crescente i seguenti numeri reali:

$$1.001,\ 1.414\overline{1},\ -\pi,\ 0.9541,\ -3.34\overline{6},\ 0.998,\ \sqrt{2},\ 0.954,\ -3.1416,\ -3.347.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.4 Descrivere i seguenti insiemi come intervalli o unione di intervalli:

$A=\{x\in\mathbb{R}\text{ tali che }-2<x\leq 5\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\text{ tali che }-2\leq x<0\text{ oppure }2<x<4\}$;
$C=\left\{x\in\mathbb{R}\text{ tali che }-\frac{7}{4}\leq x<1\text{ oppure }x>3\right\}$; $D=\left\{x\in\mathbb{R}\text{ tali che }x\leq -1\text{ oppure }2\leq x<\frac{8}{3}\right\}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.5 Dire quali degli insiemi A, B, C, D dell'esercizio 1.4 sono

a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
c) limitati
d) dotati di massimo
e) dotati di minimo.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.6 Descrivere con la simbologia degli insiemi (come nell'esercizio 1.4) i seguenti insiemi:

$$A=\left(-\tfrac{4}{3},1\right]\cup(2,+\infty);\qquad B=\left[-\tfrac{1}{2},0\right)\cup(1,5];\qquad C=\{0\}\cup(4,5].$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.7 Dire quali degli insiemi A, B, C dell'esercizio 1.6 sono

a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
c) limitati
d) dotati di massimo
e) dotati di minimo.

Argomento *Soluzione*

***ESERCIZIO 1.8** Per ognuno dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{n} \,:\, n = 1, 2, 3, ... \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{n} - n \,:\, n = 1, 2, 3, ... \right\}, \quad C = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n} \,:\, n = 1, 2, 3, ... \right\}$$

elencare gli elementi che si ottengono ponendo $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Dire poi quali dei tre insiemi sono

a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
c) limitati
d) dotati di massimo
e) dotati di minimo.

Argomento *Soluzione*

***ESERCIZIO 1.9** Per ognuno dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{n} \,:\, = 1, 2, 3, ... \right\}, \quad B = \left\{ \frac{-2-n}{n+1} \,:\, = 1, 2, 3, ... \right\}, \quad C = \left\{ n + \frac{3}{n} \,:\, = 1, 2, 3, ... \right\}$$

dire se sono

a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
c) dotati di massimo
d) dotati di minimo.

Argomento *Soluzione*

***ESERCIZIO 1.10** Si consideri l'insieme $A = \{2^{2-n} \,:\, n = 1, 2, 3, ...\}$. Tra

$$-\infty, \qquad 0, \qquad \frac{1}{4}, \qquad 2, \qquad 4, \qquad +\infty$$

qual è $\sup A$ e quale $\inf A$?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.11 Calcolare i valori della funzione

$$f(x) = x^4 - 4x + 1$$

in

a) $x = 0$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 2$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.12 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

Quali dei seguenti punti appartengono al grafico di f?

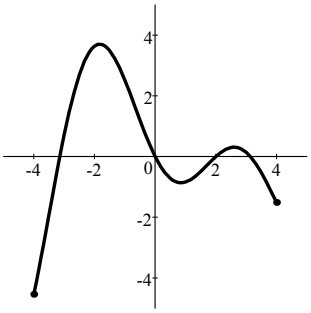
a) $(-1, 3)$ **b)** $(-2, -11)$ **c)** $(0, -1)$ **d)** $(1, 3)$.

Argomento *Soluzione*

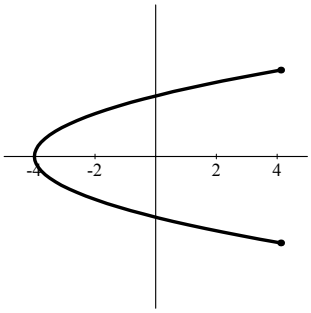
ESERCIZIO 1.13 Quali dei seguenti disegni possono rappresentare il grafico di una funzione

$$f : [-4, 4] \to \mathbb{R}?$$

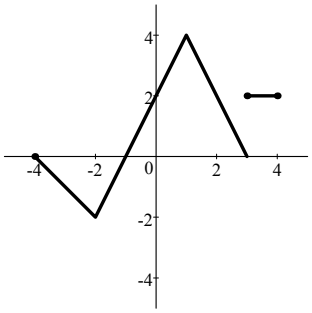
(Nota bene: il punto in evidenza che delimita alcune curve indica, qui e negli esercizi successivi, che si deve pensare quel punto appartenente al disegno; invece il punto non appartiene al disegno se non è in evidenza).



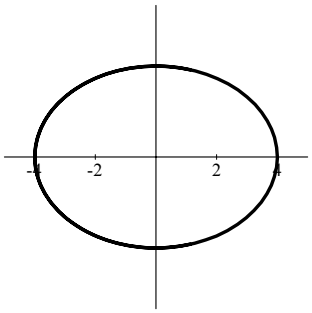
(A)



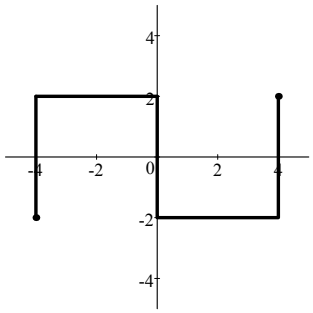
(B)



(C)



(D)



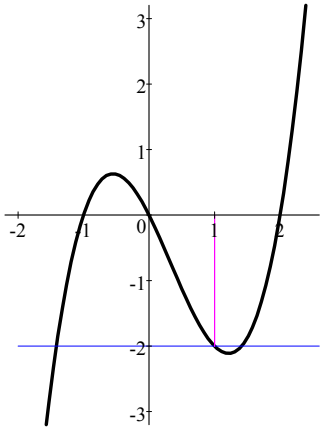
(E)

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.14 In figura è tracciato in grassetto il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dire:

a) quanto vale $f(1)$
b) in quanti altri punti dell'intervallo $[-2, 2]$ dell'asse x la funzione assume il valore $f(1)$.



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.15 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = 3x^2 - 4x.$$

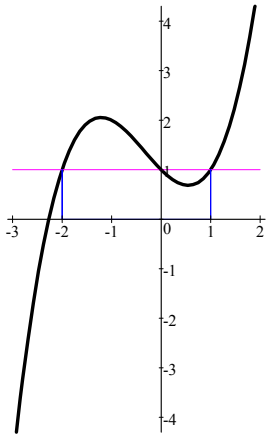
Dire se esistono - e in caso affermativo quali sono - gli elementi del dominio $\mathbb{R}$ di f tali che

a) $f(x) = -1$ **b)** $f(x) = -\frac{4}{3}$ **c)** $f(x) = -2$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.16 Sia $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è disegnato in grassetto in figura.

a) Quali sono gli elementi del dominio in corrispondenza ai quali $f(x) = 1$?
b) Ci sono elementi positivi del dominio in corrispondenza ai quali $f(x) = 0$?



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.17 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2x + 3}.$$

Per ciascuno dei seguenti numeri reali dire se è un valore di f e, in caso affermativo, quante volte viene assunto:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** 1 **c)** $-\frac{8}{9}$ **d)** 0 **e)** $\frac{5}{3}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.18 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Per ciascuno dei seguenti numeri reali dire se è un valore di f e, in caso affermativo, quante volte viene assunto:

a) -2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** $\frac{9}{4}$ **e)** 3

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 1.19 Controllare se la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{3x + 10}{4 - x}}$ è definita in

a) $x = -4$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = -\frac{10}{3}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.20 L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \frac{1}{|1 - x| + 1}$ è

A) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	**B)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$	**C)** $\mathbb{R}$	**D)** $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

Argomento *Soluzione*

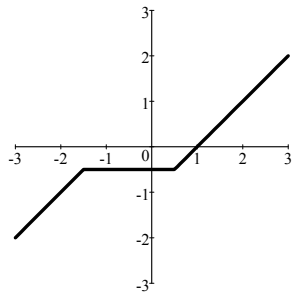
ESERCIZIO 1.21 Calcolare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

a) $\dfrac{1}{|x|+1}$ **b)** $\dfrac{1}{|x|-1}$ **c)** $\sqrt{|x-1|}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$

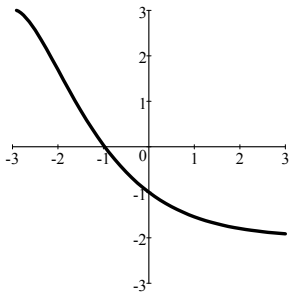
e) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ **f)** $\dfrac{2x-1}{x^2+x+2}$ **g)** $\dfrac{x-1}{8-x^3}$ **h)** $\dfrac{1-2x}{|x|-1}+\dfrac{3}{x^2-4}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

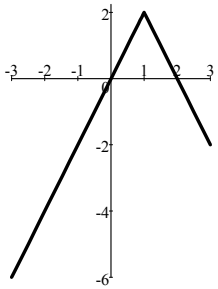
ESERCIZIO 1.22 Si considerino le funzioni $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ i cui grafici sono disegnati in figura. Quali di esse sono iniettive?



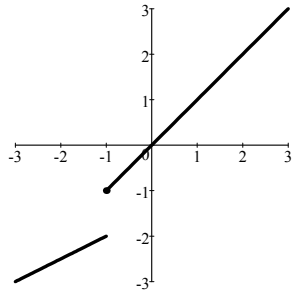
(a)



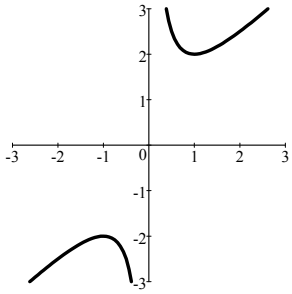
(b)



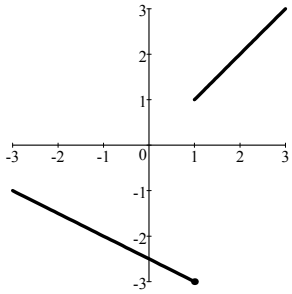
(c)



(d)



(e)



(f)

Argomento *Soluzione*

*__ESERCIZIO 1.23__ Quali delle seguenti funzioni sono iniettive?

a) $2-3x$ **b)** $2-|3x|$ **c)** $\dfrac{1}{2-3x}$

d) $2x+|x|$ **e)** $x+|2x|$ **f)** $\sqrt{x}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 1.24 Siano $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=\sqrt{x}$. Allora $(g\circ f)$ è la funzione

A) $x-1$	**B)** $\sqrt{x^2-1}$	**C)** $\lvert x\rvert-1$	**D)** $\sqrt{x}-1$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.25 Siano $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. Allora $g \circ f$ è la funzione

A) $\pm\sqrt{x^2+x+1}$	**B)** $\sqrt{x^2+x+1}$	**C)** $\sqrt{x^2+\lvert x\rvert+1}$	**D)** $\sqrt{x^2\pm x+1}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.26 Siano $f(x) = \dfrac{x-2}{2-x^3}$ e $g(x) = (x+1)^2$. Calcolare la funzione composta $g \circ f$ e il suo insieme di definizione.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.27 Siano $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^3}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ e i relativi insiemi di definizione.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.28 Siano $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ e i relativi insiemi di definizione.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.29 Sia $f(x) = 5$ e $g(x) = \dfrac{2}{|x|+1}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Più in generale, se $f(x)$ è una funzione costante e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una qualunque altra funzione, come sono le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$?

Argomento *Soluzione*

***ESERCIZIO 1.30** Si considerino le funzioni $g(x) = 1-x^2$ e $f(x) = \begin{cases} x^5 - 2x^3 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

a) Quanto vale $(g \circ f)(2)$?
b) Quanto vale $(f \circ g)(2)$?
c) Calcolare $(g \circ f)(x)$.
d) Calcolare $(f \circ g)(x)$.

Argomento *Soluzione*

*__ESERCIZIO 1.31__ Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - x - 1$. L'equazione $f(x) = f(3 - 2x)$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento *Soluzione*

*__ESERCIZIO 1.32__ Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - x - 1$. L'equazione $f(x) = f(1 - x) + 2$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento *Soluzione*

*__ESERCIZIO 1.33__ Si consideri la funzione $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$. L'equazione $f(1 - x) = f(1 + x)$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento *Soluzione*

__ESERCIZIO 1.34__ Scrivere le seguenti funzioni come composizione di funzioni

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 2}$

e) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x} - 1}$ **g)** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - x} + 2}$ **h)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x^2 - x + 1}}$

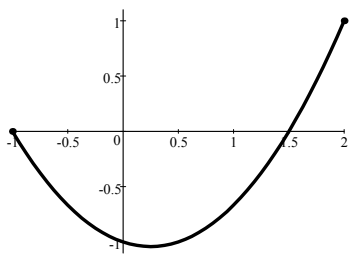
Argomento *Soluzione*

__ESERCIZIO 1.35__ Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 1 + |x|$ **b)** $f(x) = |1 + x|$ **c)** $f(x) = |x - 1|$ **d)** $f(x) = |x| - 1$

Argomento *Soluzione*

__ESERCIZIO 1.36__ In figura è disegnato il grafico di una funzione f definita in $[-1, 2]$.



Trovare gli insiemi di definizione e tracciare i grafici delle funzioni

a) $f(x + 2)$ **b)** $f(x) + 2$

c) $f(x - 2)$ **d)** $f(x) - 2$

e) $f(-x)$ **f)** $-f(x)$ **g)** $-f(-x)$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.37 Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x) = x^2 - 2x$, tracciare il grafico delle funzioni $f(-x)$, $-f(x)$, $-f(-x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.38 L'inversa di $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ è

A) $\dfrac{2x}{3x-1}$	**B)** $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2x}$	**C)** $\dfrac{1}{3-2x}$	**D)** $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{x}$

Argomento *Soluzione*

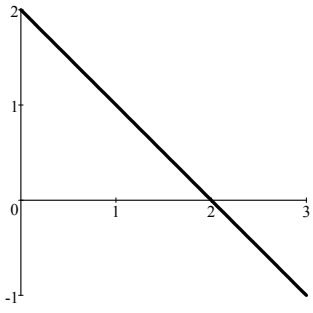
ESERCIZIO 1.39 Determinare l'inversa della funzione $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2x}$. Qual è il suo insieme di definizione?

Argomento *Soluzione*

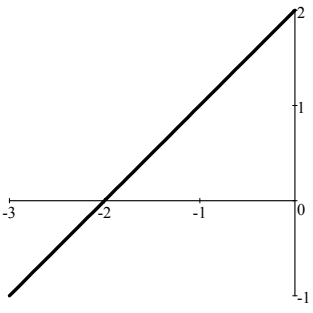
ESERCIZIO 1.40 Determinare l'inversa della funzione $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x}$. Qual è il suo insieme di definizione?

Argomento *Soluzione*

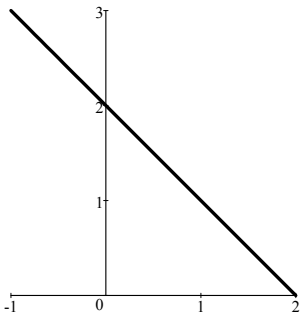
ESERCIZIO 1.41 In figura, accanto al grafico di una funzione invertibile $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, sono disegnati 5 altri grafici. Quale è il grafico della funzione inversa di f?



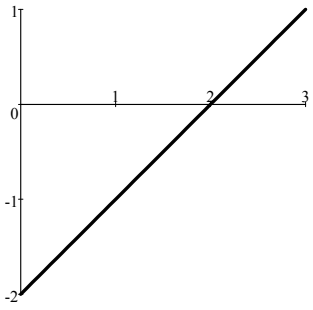
f



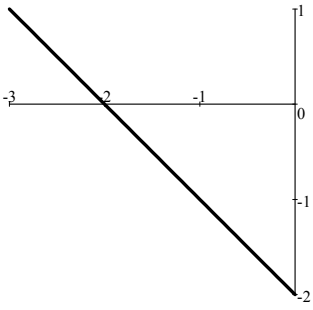
(A)



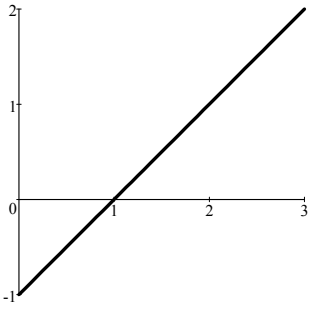
(B)



(C)



(D)

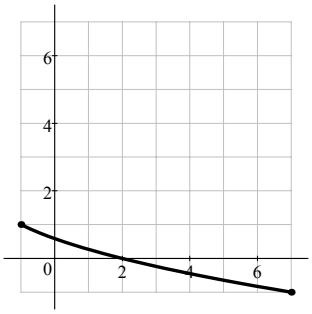


(E)

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.42 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f.

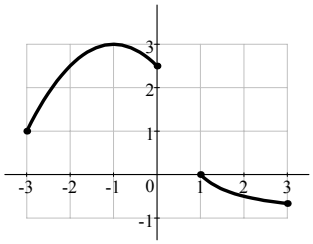
- f ha inversa sul suo insieme di definizione?
- Perché?
- tracciare il grafico di f^{-1}



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.43 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f. Leggere sul grafico

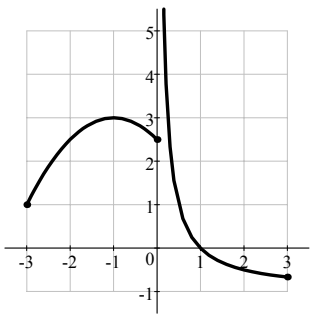
a) l'insieme di definizione di f
b) in quali intervalli f è crescente
c) in quali intervalli f è decrescente
d) in quali intervalli f è concava
e) in quali intervalli f è convessa
f) se f ha massimo nel suo insieme di definizione; se sì: quanto vale e qual è il corrispondente punto di massimo?
g) se f ha minimo nel suo insieme di definizione; se sì: quanto vale e qual è il corrispondente punto di minimo?



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.44 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f. Là dove il grafico esce dalla carta quadrettata si suppone che la funzione continui ad seguire l'andamento disegnato sulla carta quadrettata. Leggere sul grafico

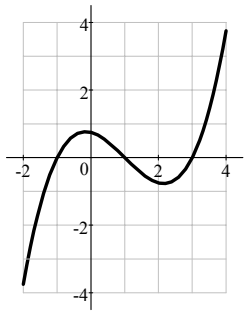
a) l'insieme di definizione di f
b) in quali intervalli f è crescente
c) in quali intervalli f è decrescente
d) in quali intervalli f è concava
e) in quali intervalli f è convessa
f) se f è superiormente limitata nel suo insieme di definizione;
g) se f è inferiormente limitata nel suo insieme di definizione;
h) se f ha massimo nel suo insieme di definizione;
k) se f ha minimo nel suo insieme di definizione.



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.45 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

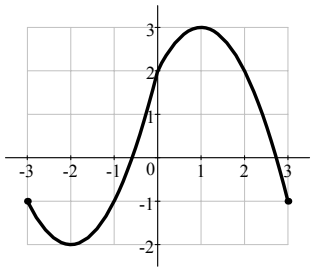
A) f è convessa in $(2, 3)$
B) f è convessa in $(0, 4)$
C) f è concava in $(-1, 2)$
D) f è concava in $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.46 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

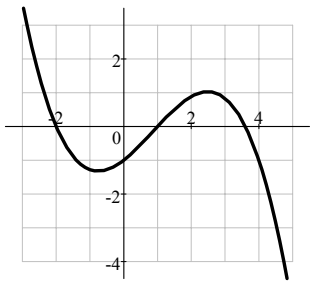
A) f è strettamente crescente in $(-2, 1)$
B) f è strettamente decrescente in $(-3, -2) \cup (1, 3)$
C) f è strettamente decrescente in $(1, 2)$
D) f è invertibile
E) f è invertibile su $(-2, 1)$
F) f è limitata e ha valore massimo 1
G) f è limitata e ha punto di massimo in $x = 1$



Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 1.47 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f. Aiutandosi con la quadrettatura, trovare i valori di x

a) che sono soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$
b) che sono soluzioni della disequazione $f(x) > 0$
c) che sono soluzioni della disequazione $f(x) < 2$



Argomento *Soluzione*

Argomento 1

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 1.18 L'esercizio si risolve più facilmente tracciando il grafico della funzione, che coincide nell'intervallo $(-\infty, 0]$ con un arco di parabola, nell'intervallo $(0, 1]$ con un segmento di retta, nell'intervallo $(1, +\infty)$ con un arco di iperbole equilatera.

ESERCIZIO 1.21 I denominatori devono essere $\neq 0$; le espressioni sotto radice quadrata devono essere ≥ 0; se nella funzione ci sono due frazioni, entrambe devono essere definite e quindi i due denominatori devono essere contemporaneamente $\neq 0$.

ESERCIZIO 1.23 Tracciare i grafici. Per provare che $f(x)$ non è iniettiva si può anche cercare un numero reale k tale che l'equazione $f(x) = k$ abbia più di una soluzione. Ad esempio si ha $x + |2x| = 3$ per $x = 1$ e per $x = -3$: quindi...

SOLUZIONI

Sol. Ex. 1.1

$$\left(\sqrt{7} - 3\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{7}\right) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} - 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{7} =$$

$$= \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - 3\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{7}\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = -5\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - 15 + 14 = -5\sqrt{35} - 1.$$

Sol. Ex. 1.2

Posto $a = \dfrac{1 + \sqrt{26}}{2}$ e $b = \dfrac{2 + \sqrt{17}}{2}$, risulta $a < b$ poiché

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{26} < 2 + \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{26} < 1 + \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad 26 < 18 + 2\sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad 4 < \sqrt{17}.$$

Sol. Ex. 1.3

Confrontando via via le cifre delle rappresentazioni decimali, a partire da quelle più a sinistra

$$-3.347 < -3.34\overline{6} < -3.1416 < -\pi = -3.14159\ldots <$$
$$< 0.954 < 0.9541 < \ 0.998 < 1.001 < 1.414\overline{1} < \sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Sol. Ex. 1.4

$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < x \leq 5\} = (-2, 5]$

$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 \leq x < 0 \text{ oppure } 2 < x < 4\} = [-2, 0) \cup (2, 4)$

$C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{7}{4} \leq x < 1 \text{ oppure } x > 3\right\} = \left[-\frac{7}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \leq -1 \text{ oppure } 2 \leq x < \frac{8}{3}\right\} = (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{8}{3}\right).$

Sol. Ex. 1.5

- $A = (-2, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf A = -2$, $\sup A = \max A = 5$; invece A non ha minimo, poiché $\inf A = -2$ non sta in A.
- $B = [-2, 0) \cup (2, 4)$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf B = \min B = -2$, $\sup B = 4$; invece B non ha massimo, poiché $\sup B = 4$ non sta in B.
- $C = \left[-\frac{7}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$ è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato (e quindi non è limitato); $\inf C = \min C = -\frac{7}{4}$; C non può avere massimo, essendo superiormente illimitato ($\sup C = +\infty$).
- $D = (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{8}{3}\right)$ è superiormente limitato, ma non inferiormente limitato (e quindi non è limitato); $\sup D = \frac{8}{3}$; D non ha massimo, poiché $\sup D = \frac{8}{3}$ non sta in D e non può avere minimo, essendo inferiormente illimitato ($\inf D = -\infty$).

Sol. Ex. 1.6

$A = \left(-\frac{4}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{4}{3} < x \leq 1 \text{ oppure } x > 2\right\}$

$B = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 5] = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ oppure } 1 < x \leq 5\right\}$

$C = \{0\} \cup (4, 5] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } 4 < x \leq 5 \text{ oppure } x = 0\}.$

Sol. Ex. 1.7

- $A = \left(-\frac{4}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato (e quindi non è limitato); $\inf A = -\frac{4}{3}$; A non ha minimo, poiché $\inf A = -\frac{4}{3}$ non sta in A non può avere massimo, essendo superiormente illimitato ($\sup A = +\infty$).
- $B = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf B = \min B = -\frac{1}{2}$, $\sup B = \max B = 5$.
- $C = \{0\} \cup (4, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf C = \min C = 0$, $\sup C = \max C = 5$.

Sol. Ex. 1.8

- I "primi" cinque elementi di $A = \left\{\frac{2n-3}{n} : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $2 - \frac{3}{1} = -1$, $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{3}{3} = 1$, $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, $2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$. In generale un elemento di A si può riscrivere come $2 - \frac{3}{n}$ e quindi, al crescere di n, diventa sempre "più grande" pur restando < 2. Dunque: A è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato) e $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = 2$ poiché nessun numero più piccolo di 2 è maggiore di tutti gli elementi di A, ma 2 non appartiene ad A e quindi A non ha massimo.
- I "primi" cinque elementi di $B = \left\{\frac{1}{n} - n : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $1 - 1 = 0$, $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$, $\frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$, $\frac{1}{5} - 5 = -\frac{24}{5}$. Al crescere di n l'elemento $\frac{1}{n} - n$ è sempre più vicino a $-n$ e quindi B non è inferiormente limitato ($\inf B = -\infty$); invece B è superiormente limitato e $\sup B = \max B = 0$.
- I "primi" cinque elementi di $C = \left\{(-1)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $(-1)^1 \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right) = -3$, $(-1)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{2}\right) = 2$, $(-1)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$, $(-1)^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{2}$, $(-1)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{5}$.

  In generale un elemento di C si può riscrivere come $(-1)^n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$ e quindi: per valori dispari di n si hanno numeri negativi ma sempre ≥ -3 che si avvicinano sempre più a -1; per valori pari di n si hanno numeri positivi ma sempre ≤ 2 che si avvicinano sempre più a 1. Dunque C è superiormente e inferiormente limitat o (e quindi limitato) e $\inf C = \min C = -3$; $\sup C = \max C = 2$.

Sol. Ex. 1.9

- Il generico elemento $\frac{1}{4}+\frac{3}{n}$ di A, al crescere di n, diventa sempre "più piccolo" pur restando $>\frac{1}{4}$. Dunque: A è superiormente e inferiormente limitato e $\sup A=\max A=\frac{13}{4}$; $\inf A=\frac{1}{4}$ poiché nessun numero più grande di $\frac{1}{4}$ è minore di tutti gli elementi di A, ma $\frac{1}{4}$ non appartiene ad A e quindi A non ha minimo.
- Il generico elemento $\frac{-2-n}{n+1}=-1-\frac{1}{n+1}$ di B, al crescere di n, diventa sempre "più grande" pur restando <-1. Dunque: B è superiormente e inferiormente limitato e $\inf B=\min B=-\frac{3}{2}$; $\sup B=-1$ poiché nessun numero più piccolo di -1 è maggiore di tutti gli elementi di B, ma -1 non appartiene a B e quindi B non ha massimo.
- I "primi" elementi di $C=\left\{n+\frac{3}{n}:\ n=1,2,3,...\right\}$ sono: $c_1=1+3=4$, $c_2=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$, $c_3=3+\frac{3}{3}=4>c_2$, $c_4=4+\frac{3}{4}>c_3$, $c_5=5+\frac{3}{5}>c_4$ ecc. e quindi non c'è nessun elemento di C minore di c_2. Al crescere di n il generico elemento $n+\frac{3}{n}$ è sempre più vicino a n e quindi C non è superiormente limitato ($\sup C=+\infty$); invece C è inferiormente limitato e $\inf C=\min C=\frac{7}{2}$.

Sol. Ex. 1.10 $\sup A=2^{2-1}=2$; $\inf A=0$. Infatti il generico elemento $2^{2-n}=\frac{4}{2^n}$ di A, al crescere di n, diventa sempre "più piccolo" ma resta >0.

Sol. Ex. 1.11

a) $f(0)=0^4-4\cdot 0+1=1$.
b) -2.
c) 9.

Sol. Ex. 1.12

a) $f(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)-1=-3$: quindi $(-1,3)$ non appartiene al grafico.

Anche il punto in **b)** non appartiene al grafico, mentre quelli in **c), d)** appartengono al grafico.

Sol. Ex. 1.13

I disegni (A) e (C) possono rappresentare il grafico di una funzione poiché comunque si prenda a in $[-4, 4]$ c'è (uno e) un solo punto del grafico che ha ascissa a. Invece:

- nel disegno (B) ogni retta di equazione $x = a$ con $a \in (-4, 4]$ interseca il grafico in due punti distinti;
- nel disegno (D) ogni retta di equazione $x = a$ con $a \in (-4, 4)$ interseca il grafico in due punti distinti;
- nel disegno (E) le rette di equazione $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$ hanno in comune con il grafico infiniti punti.

Quindi (B), (D) ed (E) non rappresentano grafici di funzioni.

Sol. Ex. 1.14

a) $f(1) = -2$.
b) Contando le intersezioni del grafico con $y = -2$, si vede che i punti in cui $f(x) = f(1)$ sono 3.

Sol. Ex. 1.15

a) Sì: risolvendo l'equazione di 2° grado $3x^2 - 4x = -1$ si trovano i numeri reali $x = 1$ e $x = \frac{1}{3}$.
b) Sì: $x = \frac{2}{3}$.
c) No: l'equazione di 2° grado $3x^2 - 4x = -2$ non ha soluzioni reali.

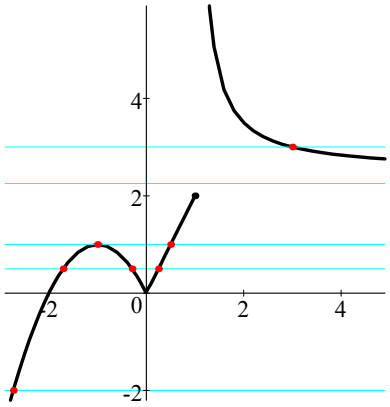
Sol. Ex. 1.16

a) $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$.
b) No.

Sol. Ex. 1.17 Notare che la funzione è definita per $x \neq -\frac{3}{2}$.

a) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = \frac{1}{3}$ si trovano i due numeri reali $x = 0$ e $x = -\frac{2}{3}$, cioè il valore viene assunto due volte.
b) No: dove la funzione è definita, l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = 1$ equivale a $x^2 + 2x + 2 = 0$ che non ha soluzioni reali.
c) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = -\frac{8}{9}$, si trovano i due numeri reali $x = 3$ e $x = -\frac{11}{9}$, cioè il valore viene assunto due volte.
d) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = 0$, si trovano i due numeri reali $x = 1$ e $x = -1$, cioè il valore viene assunto due volte.
e) No: dove la funzione è definita, l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = \frac{5}{3}$ equivale a $3x^2 + 10x + 12 = 0$ che non ha soluzioni reali.

Sol. Ex. 1.18 La funzione ha il seguente grafico:



Visto che le rette $y = -2$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = \frac{9}{4}$, $y = 3$ hanno con il grafico rispettivamente 1, 3, 2, nessuna e 1 intersezione,

il valore:	-2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{4}$	3
viene assunto:	1 volta	3 volte	2 volte	mai	1 volta

Si sconsiglia di risolvere l'esercizio attraverso le equazioni (come fatto nell'esercizio precedente), poiché si va incontro a una casistica delicata e noiosa, che riportiamo in nota, solo per permettere a chi avesse seguito questa via di verificare la correttezza dei passaggi fatti [(1)].

[1)] Innanzitutto osservare che

- nell'intervallo $(-\infty, 0]$ si ha $f(x) \leq 1$
- nell'intervallo $(0, 1]$ si ha $0 < f(x) \leq 2$
- nell'intervallo $(1, +\infty)$ si ha $f(x) > \frac{5}{2}$.

Quindi

a) il valore negativo -2 può essere assunto solo nell'intervallo $(-\infty, 0]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = -2$ si trova una sola soluzione appartenente all'intervallo: $x = -1 - \sqrt{3}$; quindi il valore viene assunto una volta;

b) il valore $\frac{1}{2}$ può essere assunto nell'intervallo $(-\infty, 0]$, ma anche nell'intervallo $(0, 1]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = \frac{1}{2}$ si trovano due soluzioni appartenenti all'intervallo $(-\infty, 0]$: $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; risolvendo l'equazione $2x = \frac{1}{2}$ si trova una soluzione appartenente all'intervallo $(0, 1]$: $x = \frac{1}{4}$; quindi il valore viene assunto 3 volte;

c) il valore 1 può essere assunto nell'intervallo $(-\infty, 0]$, ma anche nell'intervallo $(0, 1]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = 1$ si trovano una soluzione appartenenti all'intervallo $(-\infty, 0]$: $x = -1$; risolvendo l'equazione $2x = 1$ si trova una soluzione appartenente all'intervallo $(0, 1]$: $x = \frac{1}{2}$; quindi il valore viene assunto 2 volte;

d) il valore $\frac{9}{4}$ non è assunto in alcun intervallo;

e) il valore 3 può essere assunto solo nell'intervallo $(1, +\infty)$. Risolvendo l'equazione $\frac{5}{2} + \frac{1}{x-1} = 3$, si trova una sola soluzione appartenente all'intervallo: $x = 3$; quindi il valore viene assunto una volta.

Sol. Ex. 1.19

a) Sostituendo si trova $\sqrt{\dfrac{3(-4)+10}{4-(-4)}}$: radicando negativo, quindi $f(x)$ non è definita in $x=-4$.

b) $f(x)$ è definita in $x=2$ e vale $\sqrt{8}$.

c) Sostituendo si trova $\sqrt{\dfrac{3\cdot(4)+10}{4-(4)}}$: denominatore nullo, quindi $f(x)$ non è definita in $x=4$.

d) $f(x)$ è definita in $x=-\dfrac{10}{3}$ e vale 0.

Sol. Ex. 1.20

C): il denominatore è ≥ 1 e quindi è sempre $\neq 0$.

Sol. Ex. 1.21

a) $\mathbb{R}$ **b)** $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ **c)** $\mathbb{R}$
d) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ **e)** $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$ **f)** $\mathbb{R}$
g) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ **h)** $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Sol. Ex. 1.22

b, d, f sono grafici di funzioni iniettive.
a, c, e sono grafici di funzioni non iniettive.

Sol. Ex. 1.23

a, c, d, f sono funzioni iniettive.

Sol. Ex. 1.24

B)

Sol. Ex. 1.25

C)

Sol. Ex. 1.26

$(g\circ f)(x)=\left(\dfrac{x-2}{2-x^3}+1\right)^2=x^2\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^3-2)^2}$. Definita in: $\left(-\infty,\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Sol. Ex. 1.27

$(g\circ f)(x)=\sqrt{(-\sqrt{x})^3}=\sqrt{-\sqrt{x^3}}$. Insieme di definizione: $\{0\}$.

$(f\circ g)(x)=-\sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)}=-\sqrt[4]{x^3}$ Insieme di definizione: $[0,+\infty)$.

$(f\circ f)(x)=-\sqrt{(-\sqrt{x})}$. Insieme di definizione: $\{0\}$.

$(g\circ g)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)^3}=\sqrt[4]{x^9}$. Insieme di definizione: $[0,+\infty)$.

Sol. Ex. 1.28

$(g \circ f)(x) = \dfrac{2}{(x^3-1)+1} = \dfrac{2}{x^3}$. Insieme di definizione: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$(f \circ g)(x) = \left(\dfrac{2}{x+1}\right)^3 - 1 = -\dfrac{x^3+3x^2+3x-7}{(x+1)^3}$. Definita in: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$(f \circ f)(x) = (x^3-1)^3 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 2$. Definita in: $\mathbb{R}$.

$(g \circ g)(x) = \dfrac{2}{\left(\frac{2}{x+1}\right)+1}$: questa funzione è definita in $(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$, poiché il suo denominatore deve essere definito, oltre ad essere $\neq 0$. La funzione, $2 \cdot \dfrac{x+1}{x+3}$, che si ottiene semplificando è invece definita in $x = -1$: quindi non coincide con $(g \circ g)(x)$.

Sol. Ex. 1.29

$(g \circ f)(x) = \dfrac{2}{5+1} = \dfrac{1}{3}$ e $(f \circ g)(x) = 5$. Più in generale, se $f(x)$ è una funzione costante e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una qualunque altra funzione, le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono costanti.

Sol. Ex. 1.30

a) $(g \circ f)(2) = g(2^5 - 2 \cdot 2^3 + 2^2) = g(20) = 1 - 20^2 = -399$.

b) $(f \circ g)(2) = f(1 - 2^2) = f(-3) = \frac{1}{(-3)-2} = -\frac{1}{5}$.

c) $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 - (x^5 - 2x^3 + x^2)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 - x^{10} + 4x^8 - 2x^7 - 4x^6 + 4x^5 - x^4 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (1-x^2)^5 - 2(1-x^2)^3 + (1-x^2)^2 & \text{se } 1 - x^2 \geq 0 \\ \dfrac{1}{(1-x^2)-2} & \text{se } 1 - x^2 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} -x^2(1-x^2)^2(1-3x^2+x^4) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$.

Sol. Ex. 1.31

$f(x) = f(3-2x)$ se e solo se $x^2 - x - 1 = (3-2x)^2 - (3-2x) - 1$, cioè $\left[(3-2x)^2 - x^2\right] - [(3-2x) - x] = 0$, cioè per $x = 1$ e per $x = 2$.

Sol. Ex. 1.32

$f(x) = f(1-x) + 2$ se e solo se $x^2 - x - 1 = (1-x)^2 - (1-x) - 1 + 2$ cioè $x^2 - x - 1 = 1 - x + x^2$, cioè per nessun valore di x.

Sol. Ex. 1.33

$f(1-x) = f(1+x)$ se e solo se $3(1-x)^2 - 6(1-x) - 1 = 3(1+x)^2 - 6(1+x) - 1$, cioè per ogni x reale.

Sol. Ex. 1.34

a) $f(x) = x^2 - 1$ si scompone così: $x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{(\,)-1} x^2 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ si scompone così: $x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{(\,)-1} x^2 - 1 \xrightarrow{1/(\,)} \dfrac{1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ si scompone così: $x \xrightarrow{(\,)-1} x-1 \xrightarrow{(\,)^2} (x-1)^2 \xrightarrow{1/(\,)} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x-2}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2+3(\,)} x^2+3x \xrightarrow{(\,)-2} x^2+3x-2 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{x^2+3x-2}$$

e) $f(x) = \sqrt{2-x}$ si scompone così: $x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{2+(\,)} 2-x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{2-x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}-1}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{2+(\,)} 2-x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{2-x} \xrightarrow{(\,)-1} \sqrt{2-x}-1 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{\sqrt{2-x}-1}$$

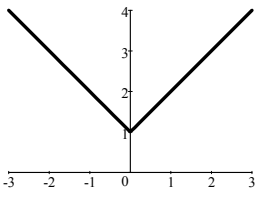
g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2-x}+2}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2-(\,)} x^2-x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{x^2-x} \xrightarrow{(\,)+2} \sqrt{x^2-x}+2 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}+2} \xrightarrow{3\cdot(\,)} \frac{3}{\sqrt{x^2-x}+2}$$

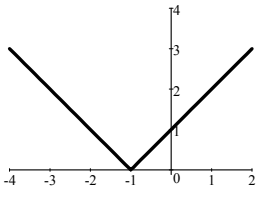
h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x^2-x+1}}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2-(\,)} x^2-x \xrightarrow{(\,)+1} x^2-x+1 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{x^2-x+1} \xrightarrow{2\cdot(\,)} \frac{2}{x^2-x+1} \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{\frac{2}{x^2-x+1}}$$

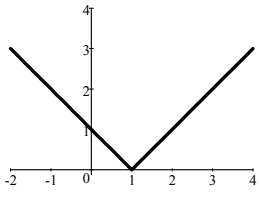
Sol. Ex. 1.35



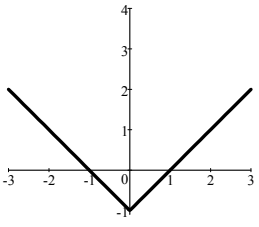
(a)



(b)



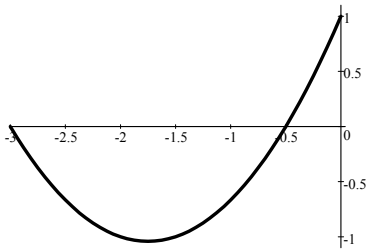
(c)



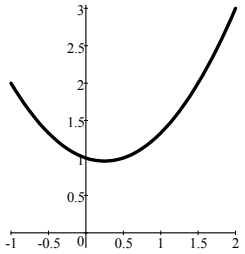
(d)

Sol. Ex. 1.36

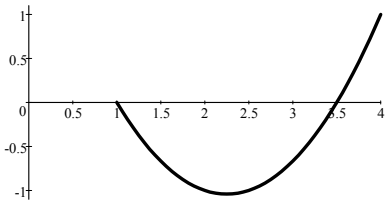
Gli insiemi di definizione richiesti si leggono sui grafici.



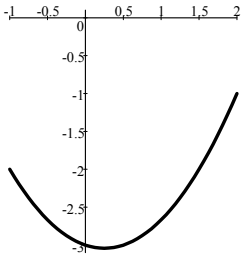
(a)



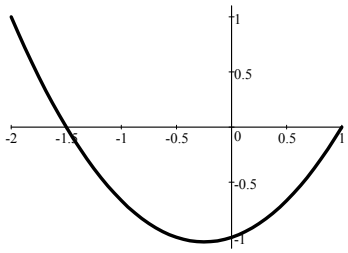
(b)



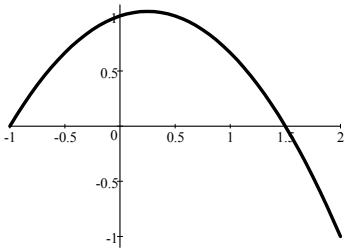
(c)



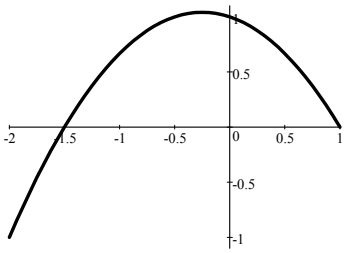
(d)



(e)

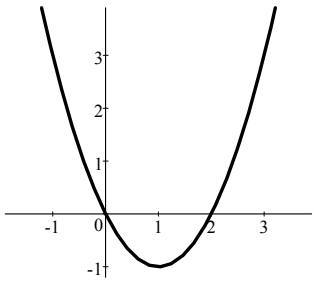


(f)

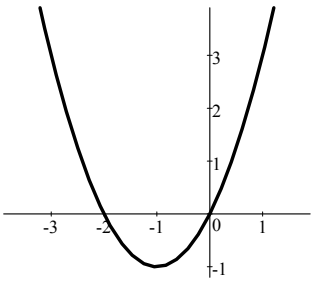


(g)

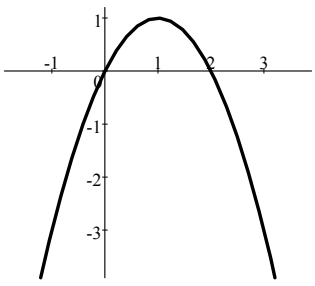
Sol. Ex. 1.37



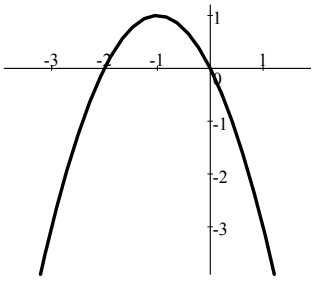
$f(x) = x^2 - 2x$



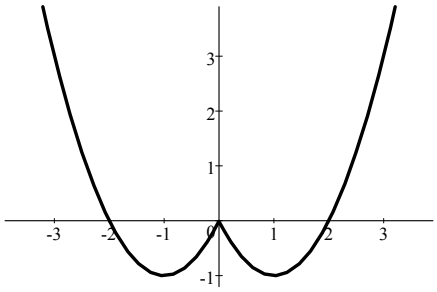
$f(-x) = x^2 + 2x$



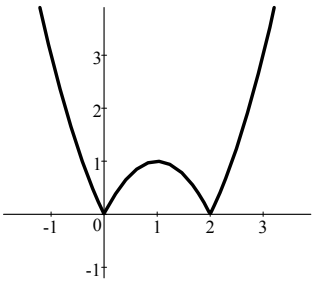
$-f(x) = 2x - x^2$



$-f(-x) = -x^2 - 2x$



$f(|x|) = x^2 - 2|x|$



$|f(x)| = |x^2 - 2x|$

Sol. Ex. 1.38

C): infatti risolvendo $y = \dfrac{3x-1}{2x}$ come equazione in x si trova $(2y-3)\,x = -1$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{3-2y}$; ora basta cambiare in x il nome della variabile indipendente.

Sol. Ex. 1.39

Risolvendo $y = 1 + \dfrac{1}{2x}$ come equazione in x si trova $2x(y-1) = 1$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{2(y-1)}$; cambiando in x il nome della variabile indipendente: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Sol. Ex. 1.40

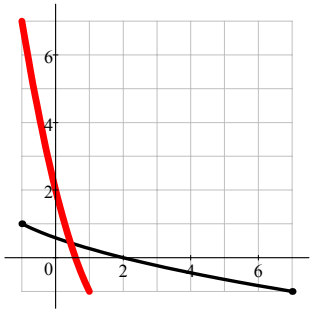
Risolvendo $y = 2 - \dfrac{3}{x}$ come equazione in x si trova $x(y-2) = -3$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{3}{2-y}$; cambiando in x il nome della variabile indipendente: $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2-x}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Sol. Ex. 1.41

B)

Sol. Ex. 1.42

La funzione data, f, definita in $[-1, 7]$, ha inversa, poiché è monotona strettamente decrescente.
Il grafico di f^{-1} è rappresentato con il tratto più spesso.



Sol. Ex. 1.43

a) f è definita in $[-3,0] \cup [1,3]$;
b) f è crescente in $[-3,-1]$;
c) f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $[-1,0]$ e $[1,3]$;
d) f è concava in $(-3,0)$;
e) f è convessa in $(1,3)$;
f) f ha massimo M nel suo insieme di definizione: $M = 3$. Il punto di massimo è $x = -1$;
g) f ha minimo m nel suo insieme di definizione: $m = -2/3$. Il punto di minimo è $x = 3$.

Sol. Ex. 1.44

a) f è definita in $[-3,0] \cup (0,3] = [-3,3]$;
b) f è crescente in $[-3,-1]$;
c) f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $[-1,0]$ e $(0,3]$. Notare che non è decrescente su $[-1,3]$.
d) f è concava in $(-3,0)$;
e) f è convessa in $(0,3)$;
f) f non ha massimo M nel suo insieme di definizione, poiché $\sup f = +\infty$;
g) f ha minimo m nel suo insieme di definizione: $m = -2/3$. Il punto di minimo è $x = 3$.

Sol. Ex. 1.45

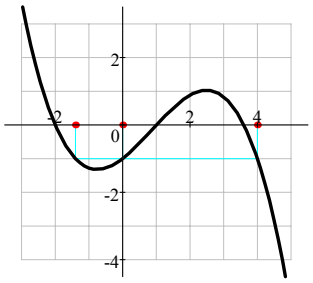
Corrette: **(A)** e **(D)**.
False: **(B)** e **(C)**: entrambi gli intervalli contengono l'intervallo $(0,2)$ in cui si verifica un cambio di concavità.

Sol. Ex. 1.46

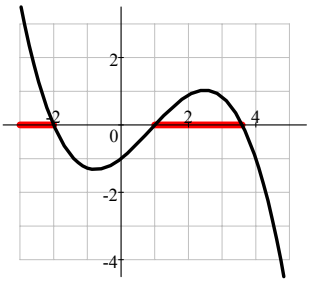
A) vera;
B) falsa: f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $(-3,-2)$ e $(1,3)$ ma non sulla loro unione (ad esempio: $f(-5/2) < 0 < f(2)$);
C) vera: $(1,2)$ è contenuto in $(1,3)$, insieme su cui abbiamo già detto che la funzione è crescente;
D) falsa: f assume lo stesso valore in corrispondenza a valori diversi della variabile indipendente (ad esempio: $f(-3) = f(-1)$) e quindi non è iniettiva;
E) vera: in $(-2,1)$ la funzione è monotona strettamente crescente;
F) falsa: f è limitata, ma il suo valore massimo è 3;
G) vera.

Sol. Ex. 1.47

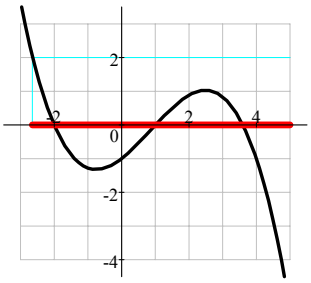
Le soluzioni sono riportate, sulle tre figure, con il tratto (o il punto) più spesso.



x tali che $f(x) = -1$



x tali che $f(x) > 0$



x tali che $f(x) < 2$

Argomento 2 – Funzioni elementari e disequazioni

Parte A - Funzioni elementari

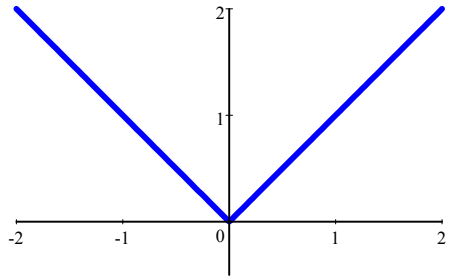
In questa lezione richiameremo alcune fra le più comuni funzioni di variabile reale, mettendone in evidenza le principali proprietà. Esamineremo in particolare le funzioni: modulo, potenza, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche.
Suggeriamo di disegnare più volte i grafici delle funzioni riportate in questa sezione in modo da essere in grado di riprodurle senza esitazioni: questo favorirà l'apprendimento dei concetti successivi.

Modulo

La funzione modulo di x è così definita:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È ovviamente sempre non negativa e il suo grafico è il seguente:

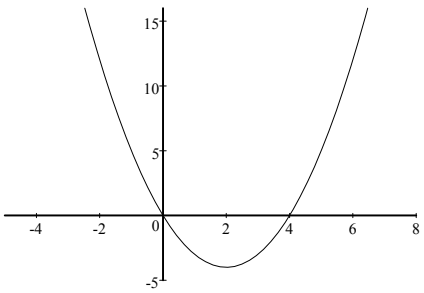


Data una funzione f definita in E, la funzione composta $|f|$ (**modulo** di f), è così definita:

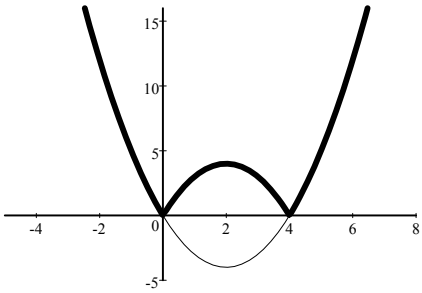
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Il grafico di $|f|$ è facilmente ottenibile da quello di f: infatti, $\forall x \in E$ con $f(x) \geq 0$, (cioè quando il grafico di f sta sopra l'asse x), coincide con il grafico di f stesso, mentre $\forall x \in E$ in cui $f(x) < 0$ (cioè quando il grafico di f sta sotto l'asse x) coincide con il grafico di $-f$, cioè quello simmetrico rispetto all'asse x.

Esempio 2.1 Sia $f(x) = x^2 - 4x$. Tracciamo il grafico di $f(x)$ e di $g(x) = |x^2 - 4x|$:



$f(x) = x^2 - 4x$



$g(x) = |x^2 - 4x|$

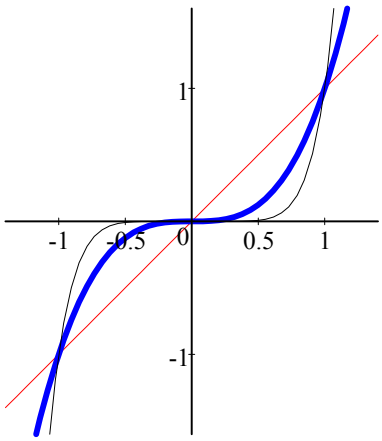
Funzione potenza

Potenze ad esponente intero positivo

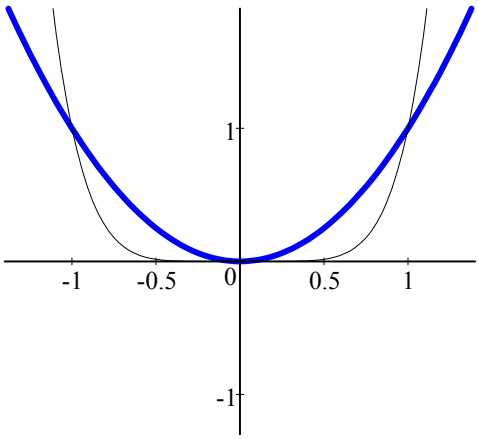
Utilizzando la nozione di potenza di un numero reale ad esponente naturale, data in Minimat, Lezione 2, si possono definire su tutto l'asse reale le funzioni potenze ad esponente naturale:

$$f(x) = x^n \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Alcuni esempi di grafici di funzioni potenza sono tracciati in figura, distinguendo i casi n dispari ed n pari.



$f(x) = x$, x^3 (medio), x^7 (sottile)



$f(x) = x^2$ (medio), x^6 (sottile)

Si osservi che:

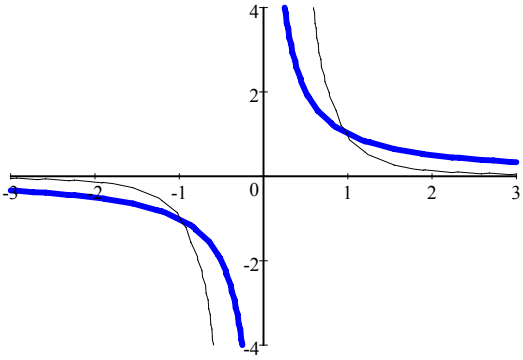
- se n è un numero dispari ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$), la funzione è strettamente crescente e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$; è una funzione dispari: $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre la funzione è concava su $(-\infty, 0)$, mentre è convessa su $(0, +\infty)$.
- Se n è un numero pari ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$), la funzione è strettamente decrescente su $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente su $(0, +\infty)$; è una funzione pari: $(-x)^{2k} = x^{2k}$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
- Se $n = 0$, ha senso scrivere x^0 solo per $x \neq 0$ ed in tal caso $x^0 = 1$.

Potenze ad esponente intero negativo

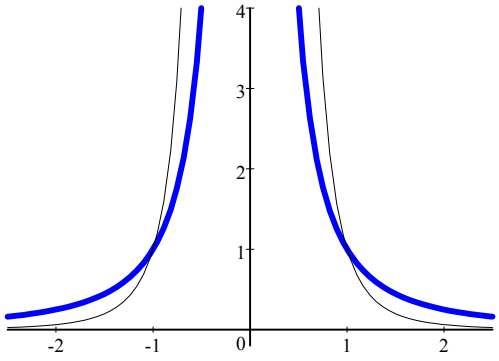
Ricordando (Minimat, Lezione 2) che una potenza ad esponente intero negativo di un numero reale x è definita solo per $x \neq 0$, valendo l'identità $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, possiamo definire funzioni potenza con esponente intero negativo solo per $x \neq 0$

$$f(x) = x^{-n} \quad \text{con} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Alcuni grafici di funzioni di questo tipo sono tracciati in figura:



$f(x) = \frac{1}{x}$ (media), $\frac{1}{x^3}$ (sottile)



$f(x) = \frac{1}{x^2}$ (media), $\frac{1}{x^4}$ (sottile)

Anche per queste funzioni si osservi che:

- se n è un numero dispari, la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$; è invertibile dove è definita; è una funzione dispari: $(-x)^{-(2k+1)} = -x^{-(2k+1)}$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre la funzione è concava su $(-\infty, 0)$, mentre è convessa su $(0, +\infty)$.
- Se n è un numero pari la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$; è una funzione pari: $(-x)^{-(2k)} = x^{-(2k)}$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre la funzione è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Funzioni Radice

Dalle considerazioni precedentemente fatte sull'invertibilità delle funzioni potenza con esponente intero, per introdurre le **funzioni radice n-esima,** funzioni inverse di x^n, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- se $n > 0$ è dispari, si può definire su tutto $\mathbb{R}$ la funzione inversa di x^n:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

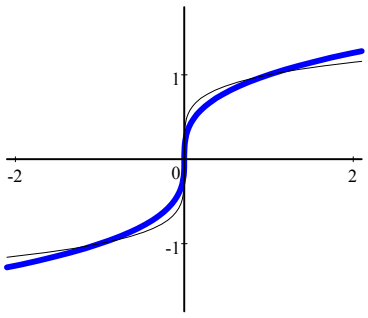
  Essa è tale che $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $n > 0$ è pari, la funzione x^n non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, ma (vedi Arg. 1) lo è in $[0, +\infty)$, dove quindi si può definire la funzione inversa di x^n:

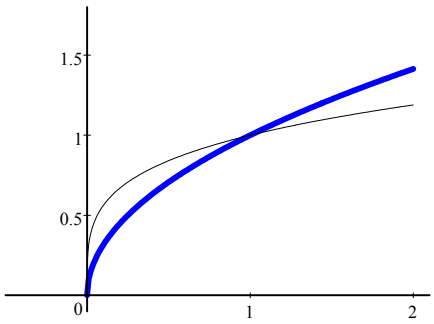
$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \geq 0 \quad \text{e} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \neq 0.$$

  Essa è tale che $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall x \geq 0$.

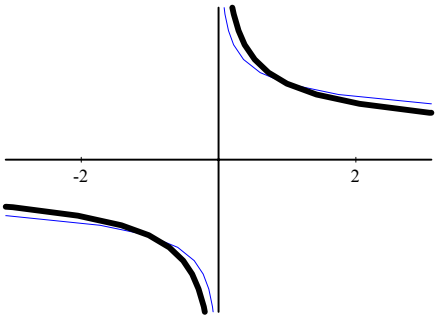
- Nel caso di esponente negativo, cioé per x^{-n}, si possono riprendere i casi precedenti, con la condizione aggiuntiva sull'insieme di definizione delle funzioni radice $\sqrt[n]{\frac{1}{x}}$ data da $x \neq 0$.



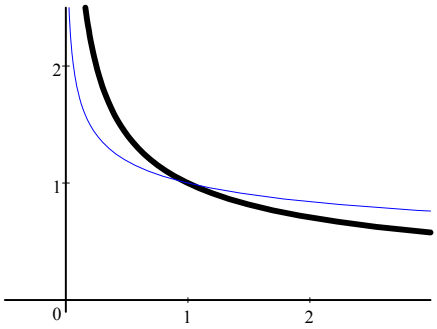
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ (medio), $\sqrt[5]{x}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt{x}$ (medio), $\sqrt[4]{x}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ (medio), $\sqrt[5]{\frac{1}{x}}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ (medio), $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ (sottile)

Potenze ad esponente razionale e reale

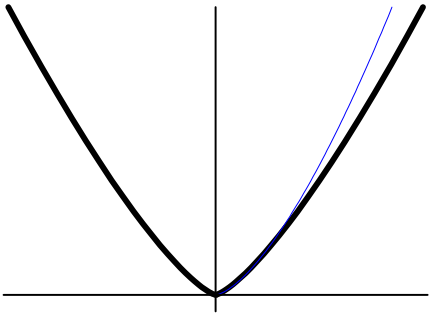
Le funzioni radice dove definite possono essere espresse come funzioni potenza utilizzando come esponente una frazione:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0,$$

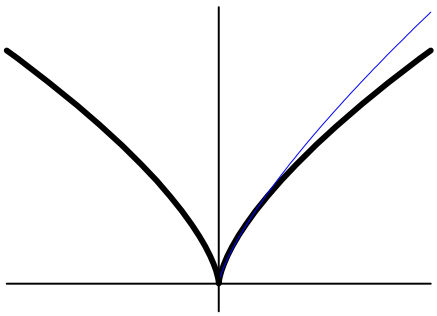
Utilizzando questa identificazione si possono definire, ma solo per $x \geq 0$, le funzioni **potenza ad esponente razionale**:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad \text{e, per } \ x > 0, \ \ x^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^m}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m \quad m, n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0$$

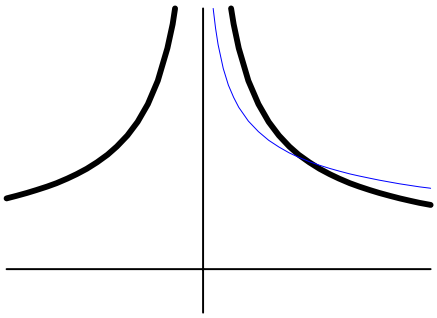
Osservazione 2.2 Abbiamo richiesto x non negativo, in quanto un numero razionale α è rappresentato da infinite frazioni equivalenti, quindi, a rigore, se $\alpha = \dfrac{m}{n}$ è anche $\alpha = \dfrac{2m}{2n}$, da cui $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{2m}{2n}} = \sqrt[2n]{x^{2m}} = \left(\sqrt[2n]{x}\right)^{2m}$, e formalmente $x^{\frac{m}{n}}$ è definito solo quando l'argomento è non negativo. A livello operativo, assumeremo però che, quando l'esponente è del tipo $\dfrac{p}{q}$ con p ed q primi tra loro, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ e sia quindi definita dove è definita la radice. Per esempio, per noi $x^{\frac{2}{3}}$ sarà un altro modo di scrivere $\sqrt[3]{x^2}$ e quindi la pensiamo definita su tutto l'asse reale.



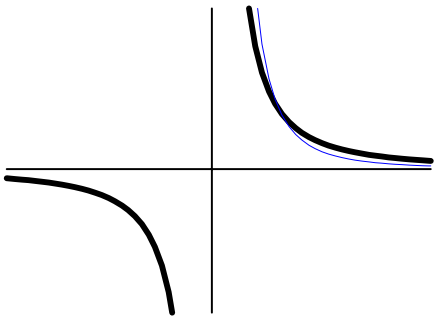
$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ (medio), $x^{\frac{3}{2}}$ (sottile)



$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (medio), $x^{\frac{3}{4}}$ (sottile)



$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ (medio), $x^{-\frac{3}{4}}$ (sottile)

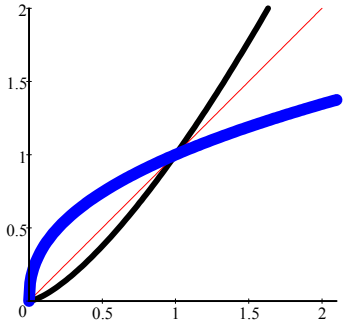


$f(x) = x^{-\frac{5}{3}}$ (medio), $x^{-\frac{5}{2}}$ (sottile)

A questo punto, per $x > 0$, possiamo estendere la definizione di funzione potenza al caso esponente α reale:

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{con } x > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha > 0$ la funzione è definita anche in $x = 0$, dove vale 0. Da notare che i grafici delle funzioni x^{α} passano tutti per il punto $(1, 1)$:



$f(x) = x^{\sqrt{2}}$ (medio), x (sottile), $x^{\frac{3}{7}}$ (grassetto)

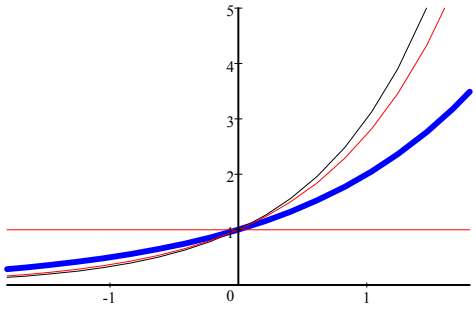
Esponenziali e logaritmi

Funzione esponenziale

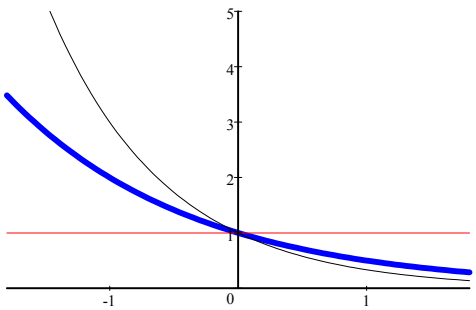
Sfruttando ancora la nozione di potenza con esponente reale, si può definire la funzione, detta **esponenziale**

$$f(x) = a^x,$$

ove a è un numero reale > 0 fissato, chiamato **base**, mentre x è un numero reale qualsiasi (quindi come funzione è profondamente diversa dalla funzione potenza, dove varia la base ed è fisso l'esponente). Il dominio della funzione esponenziale è tutto $\mathbb{R}$ e ogni valore assunto a^x è strettamente positivo.
Al variare della base a, il grafico di a^x varia, in particolare se $a = 1$, vale $f(x) = 1^x = 1$, mentre le due figure che seguono riportano l'andamento nei casi $a > 1$ [1] oppure $0 < a < 1$:[2]



$f(x) = 2^x$ (medio), e^x, 3^x (sottili)



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ (medio), 3^{-x} (sottile)

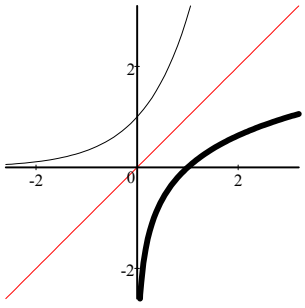
(si noti che i grafici passano tutti per il punto $(0, 1)$, essendo $a^0 = 1$, comunque sia la base a).
La funzione esponenziale è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ se $a > 1$, mentre è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$ se $0 < a < 1$. In entrambi i casi l'immagine è costituita da $(0, +\infty)$.
Osserviamo che per $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione esponenziale a^x è invertibile, mentre per $a = 1$ non lo è (perchè non è iniettiva!).

Funzione logaritmo

Dalle considerazioni sopra riportate sulle proprietà della funzione esponenziale, si ha che per $a > 0$, $a \neq 1$, possiamo definire su $(0, +\infty)$ la sua funzione inversa, che prende il nome di **logaritmo in base** a di x :[3]

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0, \ a > 0, \quad a \neq 1$$

ed ha grafico ottenibile da quello di a^x per simmetria rispetto a $y = x$:



$f(x) = \log_3 x$ (medio), 3^x (sottile),

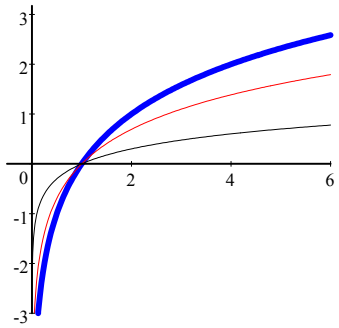
[1] Tra questi, riveste particolare importanza la funzione esponenziale e^x con base data dal numero di Nepero e.
[2] Da notare che, essendo $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, i grafici di a^x e $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sono simmetrici rispetto all'asse y.

[3] In partcolare, quando la base è il numero di Nepero e (vedi Arg.1), il logaritmo prende il nome di logaritmo **naturale** e viene indicato con log (o con ln).

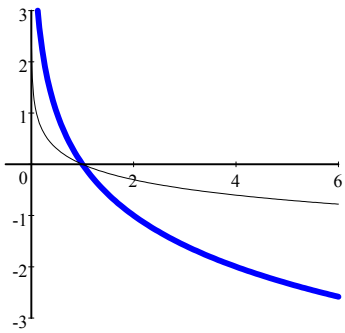
Per definizione di funzione inversa, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \qquad \text{per ogni } x > 0 \ (a > 0,\ a \neq 1) \\ \log_a(a^x) &= x \qquad \text{per ogni numero reale } x \ (a > 0,\ a \neq 1) \end{aligned}$$

(si ricordi che $a^x > 0$ per ogni $a > 0$, x reale).
L'insieme di definizione della funzione logaritmo è $(0, +\infty)$, la sua immagine è $(-\infty, +\infty)$. Essa è strettamente crescente e concava su $(0, +\infty)$ se la base a è maggiore di 1, mentre è strettamente decrescente e convessa su $(0, +\infty)$ se $0 < a < 1$.
Diamo qui di seguito i grafici di alcune funzioni logaritmo, tra cui quello naturale, notando che tutti passano per il punto $(1, 0)$, visto che $\log_a 1 = 0$, $\forall a > 0,\ a \neq 1$:



$f(x) = \log_2 x$ (medio), $\log x$, $\log_{10} x$ (sottili)



$f(x) = \log_{1/2} x$ (medio), $\log_{1/10} x$ (sottile)

Osservazione 2.3 *Utilizzando la formula del cambiamento di base:*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad a, b, x > 0, \quad a, b \neq 1,$$

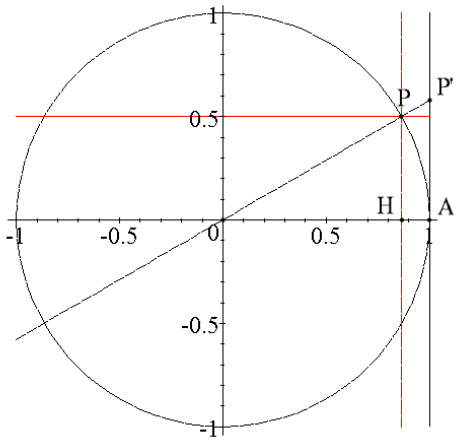
per $b = \frac{1}{a}$ si ottiene $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x, \quad a, x > 0,\ a \neq 1$

(notare come questa relazione si riflette sui grafici).

Funzioni trigonometriche

Richiami di trigonometria

Nel piano cartesiano consideriamo la circonferenza, centrata nell'origine, **di raggio 1**. Siano $A = (1, 0)$ e P un punto sulla circonferenza. Sia O l'origine degli assi.



Al variare di P sulla circonferenza, il segmento OP forma con il segmento OA un angolo $\widehat{AOP}$.

- Se P si muove in senso antiorario**,** l'angolo si dice orientato **positivamente,**
- se P si muove in senso orario**,** l'angolo si dice orientato **negativamente**.

Possiamo notare che il punto P può percorrere più giri sulla circonferenza, sia in un senso che nell'altro. Anche se P si ritrova nella stessa posizione sulla circonferenza dopo aver compiuto un certo numero di giri, vogliamo misurare l'angolo così descritto tenendo conto dei giri effettuati e anche del senso in cui sono stati effettuati.

Per "**misura in radianti**" di un angolo orientato $\widehat{AOP}$ si intende il numero che esprime la misura della lunghezza del percorso effettuato dal punto P sulla circonferenza a partire da A nel descrivere l'angolo, preso con il segno positivo, se è orientato positivamente, oppure negativo, se l'angolo è orientato negativamente.
Osserviamo che se per descrivere l'angolo $\widehat{AOP}$, P compie meno di un giro, la misura in radianti di $\widehat{AOP}$ coincide, a meno del segno, con la misura dell'arco di circonferenza AP ed è quindi compresa tra 0 e 2π (o tra -2π e 0). La misura dell'angolo "giro", percorso in senso antiorario, equivale a 2π, ovvero al valore della lunghezza della circonferenza di raggio 1. Se P compie più di un giro, nella misura in radianti di $\widehat{AOP}$ si tiene conto del numero k di giri compiuti sulla circonferenza aggiungendo $2k\pi$ (o $-2k\pi$) alla misura dell'arco AP. Quindi un qualunque numero reale x può rappresentare la misura in radianti di un angolo orientato.

Se x rappresenta la misura, espressa in radianti, dell'angolo orientato $\widehat{AOP}$, allora:[4]

- $\sin x$ (seno di x) rappresenta l'ordinata del punto P e quindi $-1 \leq \sin x \leq 1$,
- $\cos x$ (coseno di x) rappresenta l'ascissa del punto P e quindi $-1 \leq \cos x \leq 1$,
- $\operatorname{tg} x$ (tangente di x) rappresenta l'ordinata del punto P' intersezione della retta passante per P e per l'origine con la retta tangente alla circonferenza in A e quindi $\operatorname{tg}\, x \in (-\infty, +\infty)$. Notiamo che per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, queste due rette sono parallele e quindi per tali angoli la tangente non è definita.

Per similitudine di triangoli rettangoli, si ha che

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dal teorema di Pitagora si ha l'identità fondamentale:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Con semplici considerazioni di geometria elementare si possono ricavare i valori qui riportati per angoli particolari:

[4]Le definizione qui date di seno, coseno e misura in radianti di un angolo orientato dipendono fortemente dal fatto che si sta considerando una circoferenza di raggio 1. In realtà si possono usare definizioni indipendenti dal raggio della circonferenza scelta, in cui si rapportano le misure dei segmenti o archi coinvolti con il raggio della circonferenza.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg } x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non è definita

$(*)$

Funzioni trigonometriche

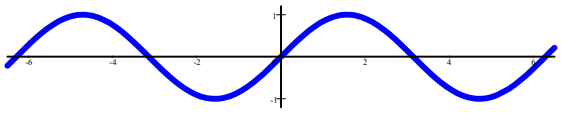
Grazie alle definizioni di seno e coseno di un angolo misurato in radianti, possiamo introdurre le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ che, per quanto scritto sopra, sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$ e hanno come immagine $[-1, 1]$. Sono entrambe periodiche [5] di periodo 2π:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

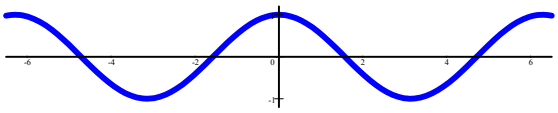
Dalle definizioni di seno e coseno, risulta che la funzione $\sin x$ è dispari, mentre $\cos x$ è pari:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

I loro grafici sono qui sotto riportati:

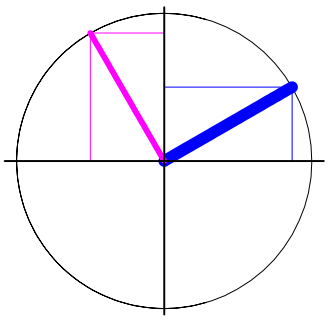


$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$

Guardando la figura sotto riportata, ci si può convincere che, se x è l'angolo compreso tra il semiasse delle ascisse positive e la semiretta disegnata con il tratto più spesso,

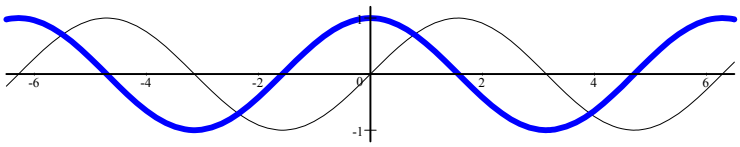


[5] Ricordiamo che una funzione si dice periodica di periodo T se $\forall x \in E(f)$ si ha che $f(x + T) = f(x)$.

valgono le relazioni

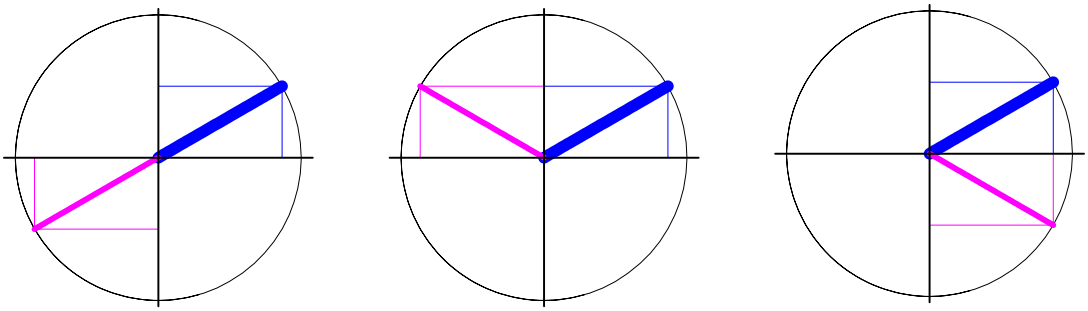
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

da cui si deduce che il grafico di $\cos x$ si ottiene da quello di $\sin x$ traslandolo verso sinistra di $\pi/2$, come si vede nella figura successiva:



$f(x)=\sin x$ (sottile), $\cos x$ (medio)

Sempre considerazioni di geometria elementare analoghe alle precedenti



(a) (b) (c)

portano alle seguenti relazioni, che possono servire per calcolare valori di seno e coseno per angoli ottenibili da quelli riportati nella tabella precedente:

$$(a) \quad \sin(\pi+x)=-\sin x, \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(b) \quad \sin(\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(c) \quad \sin(2\pi-x)=-\sin x, \qquad \cos(2\pi-x)=\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Esempio 2.4 Vogliamo calcolare i valori del seno e del coseno per gli angoli $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{10}{3}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Considerando che $\frac{5}{6}\pi=\pi-\frac{\pi}{6}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Da $\frac{10}{3}\pi = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi$, si ha:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{10}{3}\pi\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\left(\frac{10}{3}\pi\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Poiché $\frac{7}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Possono inoltre essere utili le cosiddette *formule di addizione*:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

per tutti gli x, y reali. Come caso particolare, per $x = y$ si hanno le seguenti

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

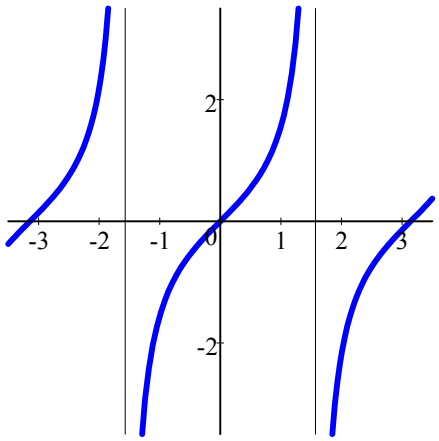
Per studiare la funzione trigonometrica tangente, possiamo utilizzare, come visto, il rapporto tra le funzioni appena studiate, cioè $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Ritroviamo quindi che $\operatorname{tg} x$ è definita per ogni x tale che $\cos x \neq 0$, ovvero per:

$$x \neq \pi/2 + k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

È periodica di periodo π. Infatti si ha:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

È dispari, in quanto $\operatorname{tg}(-x) = \sin(-x)/\cos(-x) = -\sin x/\cos x = -\operatorname{tg} x$ ed ha grafico dato da:



$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

Si ha inoltre che

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Funzioni trigonometriche inverse

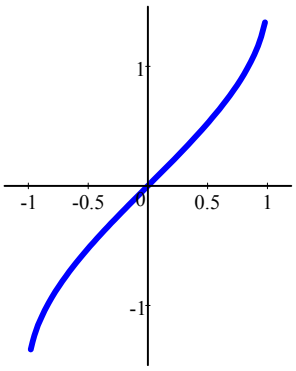
Le funzioni trigonometriche non sono invertibili sul loro campo di esistenza; infatti, essendo periodiche, non sono iniettive. Per esempio, l'equazione $\boxed{\sin x=0}$ ha infinite soluzioni: $\boxed{x=k\pi}$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$.
È però possibile introdurre le funzioni inverse di $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a patto di restringere il loro dominio in modo opportuno.

- La funzione $\sin x$, se considerata sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, è iniettiva (è strettamente crescente!), e la sua immagine è data da $[-1,1]$. È possibile pertanto definire su $[-1,1]$ la funzione $\arcsin x$ (**arcoseno** di x) come funzione inversa di $\sin x$ ristretta a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\arcsin x$. Valgono quindi:

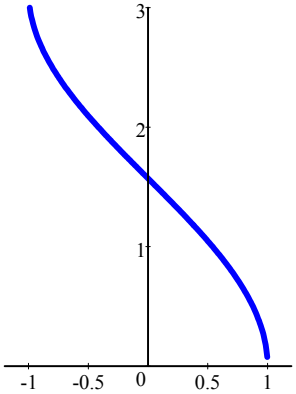
$$\arcsin(\sin x)=x,\ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\qquad \sin(\arcsin x)=x,\ \forall x\in[-1,1].$$

- La funzione $\cos x$, se considerata sull'intervallo $[0,\pi]$, è iniettiva (è strettamente decrescente!), e la sua immagine è data da $[-1,1]$. È possibile pertanto definire su $[-1,1]$ la funzione $\arccos x$ (**arcocoseno** di x) come funzione inversa di $\cos x$ ristretta a $[0,\pi]$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\arccos x$. Valgono quindi:

$$\arccos(\cos x)=x,\ \forall x\in[0,\pi],\qquad \cos(\arccos x)=x,\ \forall x\in[-1,1].$$



$f(x)=\arcsin x$

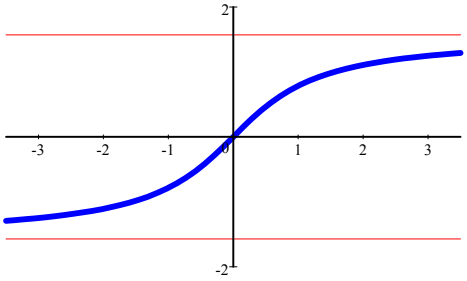


$f(x)=\arccos x$

- La funzione $\operatorname{tg} x$, se considerata sull'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, è iniettiva, e la sua immagine è data da $(-\infty,+\infty)$. È possibile pertanto definire su $\mathbb{R}$ la funzione $\operatorname{arctg} x$ (**arcotangente** di x) come inversa di $\operatorname{tg} x$ ristretta a $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\operatorname{arctg} x$. Valgono quindi:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Il grafico di tale funzione inversa è:



$$f(x) = \arctan x$$

La funzione $\operatorname{arctg} x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ risulta essere una funzione dispari, strettamente crescente su $\mathbb{R}$, convessa su $(-\infty, 0)$ e concava su $(0, \infty)$. È inoltre superiormente limitata con estremo superiore $\sup(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{\pi}{2}$ e inferiormente limitata con estremo inferiore $\inf(\operatorname{arctg} x) = -\dfrac{\pi}{2}$, mentre non ammette valore massimo nè valore minimo.

Esempio 2.5 Vogliamo calcolare i valori di $\operatorname{arctg} x$ per $x = 1, -\sqrt{3}, 104$.

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, in quanto $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1$, vedi tabellla (*);

$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, in quanto $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{arctg}(104)$: in questo caso non possiamo sfruttare i valori riportati sulla tabella, in quanto $\operatorname{arctg}(104)$ non è riconducibile all'arcotangente di tali valori. È comunque un numero reale ben definito, positivo e minore di $\pi/2$. Mediante una calcolatrice scientifica, possiamo darne un valore approssimato: $\operatorname{arctg}(104) \cong 1.56$.

Esempio 2.6 Vogliamo trovare una soluzione (se esiste) delle seguenti equazioni:

$$a) \quad \sin x = 3, \qquad b) \quad \cos x = \tfrac{1}{5}, \qquad c) \quad \operatorname{tg} x = 4.$$

Nel caso a), l'equazione non ha soluzione, in quanto $\sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (e quindi non può coincidere con 3).

Per b), notiamo dapprima che $\frac{1}{5} \in [-1, 1]$, insieme dei valori assunti dalla funzione coseno ed insieme di definizione dell'arccoseno. Possiamo quindi utilizzare tale funzione inversa ed ottenere una soluzione (appartenente all'intervallo $[0, \pi]$) data da $x = \arccos \frac{1}{5} \cong 1.37$. [6]

Nel caso di c), possiamo applicare direttamente la funzione inversa (definita su tutto $\mathbb{R}$) ad entrambi i membri ed ottenere come soluzione nell'intervallo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $x = \operatorname{arctg} 4 \cong 1.33$ [7].

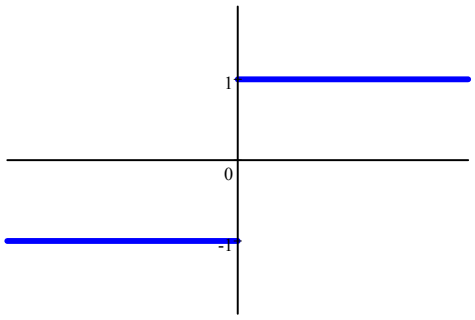
[6] Per determinare tutte le (infinite) soluzioni di tale equazione, si deve sfruttare dapprima l'identità $\cos(2\pi - x) = \cos x$ per trovare un'altra soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi)$, data da $\left(2\pi - \arccos \frac{1}{5}\right)$. Per periodicità della funzione coseno, si ottengono tutte le soluzioni: $\arccos \frac{1}{5} + 2k\pi$, $\left(2\pi - \arccos \frac{1}{5}\right) + 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

[7] Per periodicità della funzione tangente, si ha che tutte le (infinite) soluzioni dell'equazione sono date da $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

Altre funzioni elementari

Ci sono altre funzioni molto semplici che fanno parte della famiglia delle funzioni elementari e che possono risultare molto utili. Iniziamo dalla funzione che esprime il segno di un numero reale, e per questo detta **funzione segno** (o **signum**) di x :

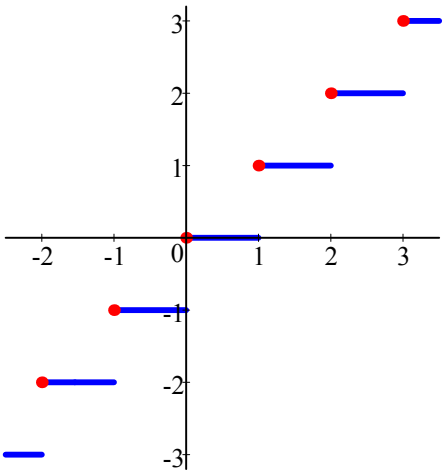
$$\operatorname{signum} x = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Osserviamo che tale funzione è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e che in tale insieme vale $\operatorname{signum} x = \dfrac{|x|}{x}$.
Il suo grafico presenta "un salto" nell'origine e si usa dire che tale grafico forma "un gradino".
Un'altra funzione con il grafico a gradini (questa volta infiniti) è la funzione **parte intera**, che, dato un qualunque numero reale x, gli assegna **il numero intero più grande tra gli interi a lui minori od eguali**, indicato con $[x]$. Il nome deriva dal fatto che, se $x \geq 0$, $[x]$ rappresenta la parte intera che compare nella rappresentazione decimale di x $\left([4,\overline{6}] = 4\right)$, mentre, se $x < 0$, $[x]$ si ottiene come la parte intera diminuita di 1.$([-2,72] = -3)$. Riassumendo, abbiamo che

$$[x] = \text{"il più grande intero minore od uguale ad } x\text{"}$$

ed il suo grafico ha la forma di una "scala infinita":



Argomento 2 –Funzioni elementari e disequazioni

Parte B - Applicazioni alla risoluzione di disequazioni

Disequazioni algebriche di II grado

Vogliamo risolvere una disequazione di II grado, cioè una disequazione che, semplificata, si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (oppure } \geq 0, \ < 0, \ \leq 0),$$

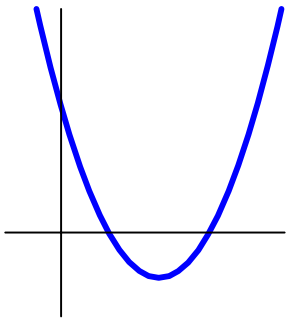
con $a \neq 0$. Ci si può sempre ricondurre al caso di $a > 0$, cambiando, se $a < 0$, il segno a tutti i termini della disequazione e cambiando verso alla disuguaglianza. Tratteremo quindi solo tale caso; il caso $a < 0$ si può comunque trattare in modo del tutto analogo, con gli opportuni cambiamenti. Per risolvere una disequazione di questo tipo, dovremo studiare il segno (vedi Arg.1) della funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0.$$

Ricordiamo (vedi Minimat, Lezione 6) che il grafico di tale funzione è una parabola rivolta verso l'alto: quindi la funzione è positiva negli intervalli in cui la parabola si trova al di sopra dell'asse delle ascisse e negativa negli intervalli in cui la parabola si trova al di sotto. Per determinare tali intervalli, si deve dapprima trovare l'intersezione (eventualmente vuota) della parabola con l'asse x, cioè risolvere l'equazione $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, le cui eventuali soluzioni danno gli zeri della funzione [1].

Si presentano tre casi:

(1) $\Delta > 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2 , con $x_1 < x_2$.
La parabola interseca l'asse x in due punti ed un possibile grafico è il seguente:

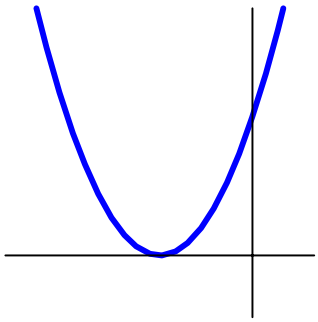


da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per $x < x_1$, $x > x_2$
$f(x) = 0$	per $x = x_1$, $x = x_2$
$f(x) < 0$	per $x_1 < x < x_2$

(2) $\Delta = 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$.
La parabola è tangente all'asse x ed un possibile grafico è il seguente:

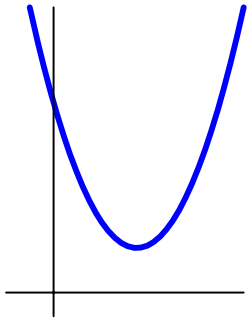
[1] Ovviamente si possono ripetere analoghe considerazioni nel caso $a < 0$, quando il grafico da considerare è una parabola rivolta verso il basso.



da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per $x \neq x_1$
$f(x) = 0$	per $x = x_1$
$f(x) < 0$	per nessun x reale.

(3) $\Delta < 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha radici reali.
La parabola giace completamente nel semipiano positivo ed un possibile grafico è il seguente:



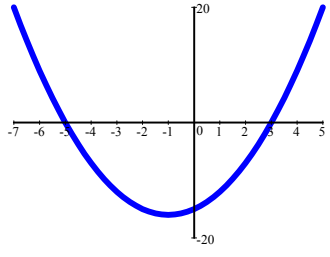
da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per ogni x reale
$f(x) = 0$	per nessun x reale
$f(x) < 0$	per nessun x reale.

Queste considerazioni sul segno permettono di risolvere le disequazioni del tipo $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 2.7 Risolvere la disequazione $x^2 + 2x - 15 > 0$.

Poichè il coefficiente di x^2 è positivo, la parabola è rivolta verso l'alto. Le soluzioni dell'equazione $x^2 + 2x - 15 = 0$ sono $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, e queste sono le ascisse delle intersezioni della parabola con l'asse delle x. Il grafico è il seguente:



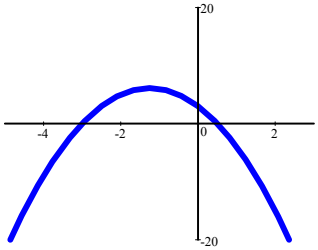
$y = x^2 + 2x - 15$

e permette di concludere che la disequazione è verificata in $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

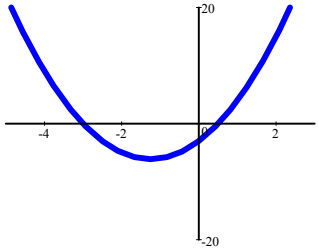
Osservazione 2.8 Se la disequazione da risolvere fosse: $x^2 + 2x - 15 < 0$, allora le soluzioni sarebbero date da $x \in (-5, 3)$.

Esempio 2.9 Risolvere la disequazione $-2x^2 - 5x + 3 > 0$.

Si può considerare la disequazione equivalente[2] $2x^2 + 5x - 3 < 0$ e procedere come fatto prima, oppure si può tracciare la parabola rivolta verso il basso e risolvere direttamente la disequazione data. Ovviamente le intersezioni delle due parabole con l'asse x sono le stesse, di ascisse $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Diamo il grafico di entrambe le parabole:



$y = -2x^2 - 5x + 3$

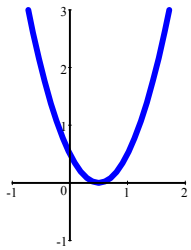


$y = 2x^2 + 5x - 3$

da cui si deduce che la disequazione è verificata per $x \in (-3, 1/2)$.

Esempio 2.10 Risolvere la disequazione $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ (caso $\Delta = 0$) e quindi si annulla solo per $x = \frac{1}{2}$. Come si vede dal grafico,



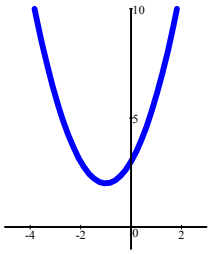
$y = 4x^2 - 4x + 1$

la parabola è tangente all'asse x e l'unica soluzione della disequazione è $x = \frac{1}{2}$.

Attenzione : $4x^2 - 4x + 1 < 0$ non ha soluzioni!

Esempio 2.11 Risolvere la disequazione $x^2 + 3x + 3 \geq 0$.

$x^2 + 3x + 3$ non si annulla mai, in quanto $\Delta < 0$. Abbiamo il grafico:



$y = x^2 + 3x + 3$

e quindi la disequazione è verificata $\forall\ x\ \in \mathbb{R}$.

Attenzione: $x^2 + 3x + 3 > 0$ ha le stesse soluzioni!

[2]Due equazioni, due disequazioni o anche due sistemi si dicono **equivalenti** se le soluzioni del primo sono tutte e sole le soluzioni del secondo.

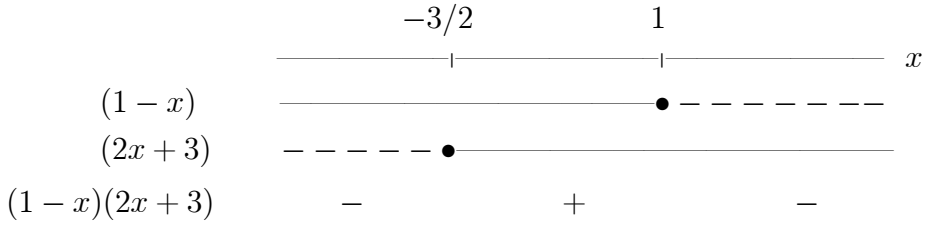
Osservazione 2.12 Nel caso in cui nella disequazione compaia non un trinomio ma un prodotto di fattori lineari del tipo

$$(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) \gtreqless 0$$

non conviene operare come descritto sopra. In tal caso il segno è determinato dal segno dei fattori.

Esempio 2.13 Risolvere la disequazione $(1 - x)(2x + 3) \geq 0$.

Dobbiamo determinare i valori di x per cui i fattori sono concordi, quindi entrambi positivi o entrambi negativi.
Si può ottenere il risultato usando lo schema introdotto in Minimat, Lezione 4 e precisamente



La disequazione è quindi soddisfatta per $x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$.

Osservazione 2.14 Il metodo sopra descritto è ovviamente utilizzabile anche nel caso si abbia un prodotto di più di due fattori. Come regola generale, ogni qualvolta dobbiamo determinare il segno di una funzione, conviene, se è possibile, fattorizzare la funzione in fattori più semplici e studiare i segni dei singoli fattori, in quanto questi determinano il segno della funzione. In altri termini, se $f = f_1 \times f_2 \times \cdots\cdots \times f_n$, allora signum f = signum $f_1 \times$ signum $f_2 \times \cdots\cdots \times$ signum f_n.

Disequazioni razionali

Siano dati due polinomi $N(x)$ e $D(x)$. Una disequazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)} \gtreqless 0$ si dice **razionale fratta** se l'incognita compare al denominatore.

La disequazione $\frac{3x^2+4}{28} < \frac{3-5x}{6}$ <u>non</u> è una disequazione razionale fratta, mentre lo è $\frac{3x^2+4}{28+x} < \frac{3-5x}{6}$.

Per quanto riguarda la teoria e i metodi di soluzione si veda Minimat, Lezione 4, in cui sono trattate le disequazioni e i sistemi di disequazioni.
Qui affronteremo il caso in cui il numeratore e/o il denominatore hanno grado maggiore di 1. Ricordiamo comunque che per risolvere questo tipo di disequazioni bisogna studiare i segni del numeratore e del denominatore e poi confrontarli per sapere quando sono concordi o discordi.

Esempio 2.15 Risolvere la disequazione $\frac{10x - 3x^2 + 25}{(x-4)(x^2+1)} \geq 0$.

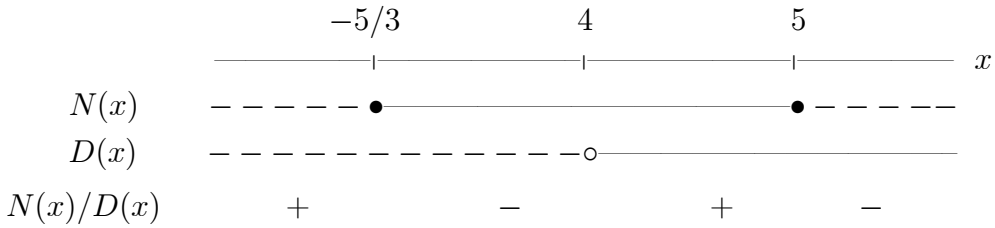
Studio del segno di N : al numeratore compare un trinomio di II grado, studiarne il segno significa quindi studiare il segno di $f(x) = -3x^2 + 10x + 25$.

$$N \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x - 25 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq 5,$$

visto che $3x^2 - 10x - 25 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 5$.
Studio del segno di D : il denominatore è il prodotto di due fattori, ma quello di II grado è sempre positivo e quindi il segno di D è determinato dal segno di $(x - 4)$. Avremo allora che

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 4$$

(comprende anche la condizione di esistenza $x \neq 4$).
Si possono ottenere le soluzioni usando lo schema introdotto in Minimat, Lezione 4 e precisamente



Analizzando lo schema, possiamo dedurre che la disequazione è verificata in $(-\infty, -5/3] \cup (4, 5]$.

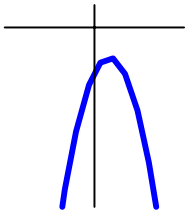
Esempio 2.16 Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)(2x - 3x^2 - 1)} \leq 0$.

Studio del segno di N : anche qui compare al numeratore un trinomio di II grado, quindi[3]:

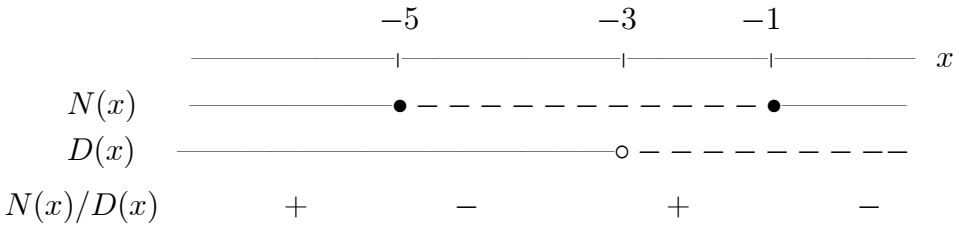
$$N \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -5, \; x \geq -1$$

visto che $x^2 + 6x + 5 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = -5$, $x_2 = -1$.

Studio del segno di D : al denominatore compaiono due fattori, dei quali $(2x - 3x^2 - 1)$ ha $\Delta < 0$. Essendo il suo grafico una parabola rivolta verso il basso, sarà sempre negativo:



Allora il segno di D viene dato dall'opposto del segno di $(x + 3)$, cioè :
$D > 0 \quad \Leftrightarrow (x + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3$



Le soluzioni saranno quindi date da $[-5, -3) \cup [-1, +\infty)$.

[3]Notare che, anche se nella disequazione compare un segno di $\leq$, per studiare il segno di N si pone $N(x) \geq 0$. Il segno $\leq$ che compare nella disequazione significa che dovremo cercare i valori di x per cui N e D sono discordi.

Disequazioni irrazionali

Si dice **irrazionale** una disequazione in cui l'incognita x compare, almeno una volta, sotto il segno di radice.

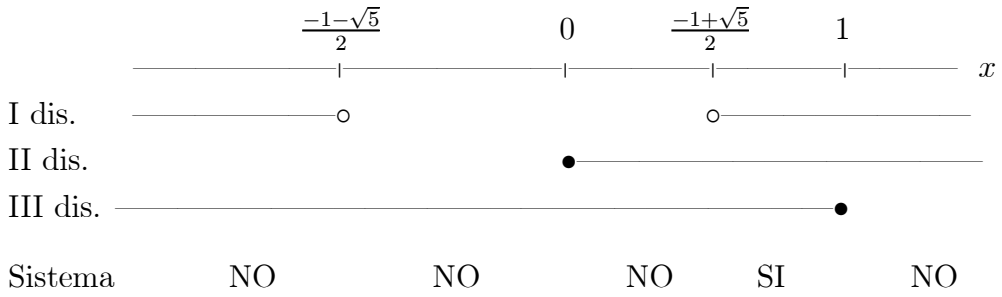
Esempio 2.17 Risolvere la seguente disequazione irrazionale $\sqrt{1-x} < x$.

Per prima cosa osserviamo che $\sqrt{1-x}$ è definita solo per l'argomento $1-x \geq 0$ (trattandosi di radice di indice pari) e quindi per $x \leq 1$. Inoltre, sempre perchè si tratta di radice di indice pari, la quantità $\sqrt{1-x}$ è sempre ≥ 0. Quindi quando il secondo membro è negativo, cioè per $x < 0$, la risposta è immediata: non ci sono soluzioni. Quando invece il secondo membro è anch'esso non negativo, si possono elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza ed ottenere una disequazione equivalente alla data. In conclusione

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} < x \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x < x^2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-1 > 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

e quindi (essendo $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, le soluzioni dell'equazione $x^2+x-1=0$), le soluzioni saranno i valori di x che soddisfano contemporaneamente le tre condizioni

$$\begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} .$$



Concludiamo che la disequazione data è soddisfatta per ogni $x \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1]$. In generale si ha:

Metodo di risoluzione di disequazioni irrazionali con radicale di indice pari.

Caso A) $\sqrt[2n]{a(x)} < b(x)$.

$$\sqrt[2n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) \geq 0 \text{ (condizione necessaria)} \\ a(x) < [b(x)]^{2n} \end{cases}$$

Le eventuali soluzioni saranno i valori di x che soddisfano contemporaneamente le tre disequazioni, cioè le soluzioni del sistema indicato. Ribadiamo che, come nell'esempio precedente, la condizione $b(x) \geq 0$ è necessaria per l'esistenza di soluzioni, in quanto $\sqrt[2n]{a(x)} \geq 0$ e non potrà mai essere minore di una quantità negativa. Inoltre solo sotto questa condizione possiamo elevare a potenza con esponente pari entrambi i membri della disequazione.

Caso B) $\sqrt[2n]{a(x)} > b(x)$.

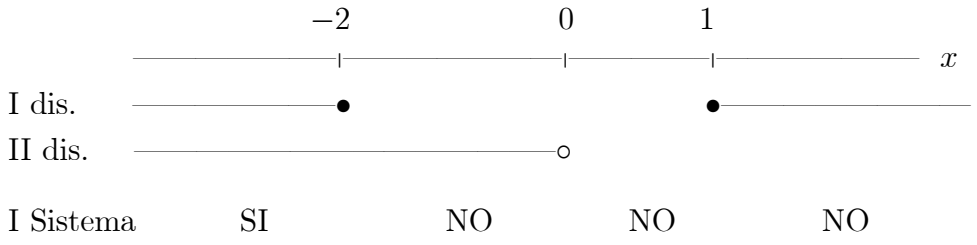
In questo caso la condizione $b(x) < 0$, se associata alla condizione di realtà, comporta una situazione in cui la disequazione viene verificata, in quanto si richiede che $\sqrt[2n]{a(x)}$ (numero positivo o nullo, quando esiste, cioè quando $a(x) \geq 0$), sia maggiore di un numero negativo. In tale caso quindi per ottenere le soluzioni della disequazione irrazionale dovremo unire le soluzioni di due sistemi:

$$\sqrt[2n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) \geq 0 \text{ (condizione necessaria)} \\ a(x) > [b(x)]^{2n} \end{cases} \cup \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) < 0 \text{ (condizione sufficiente)} \end{cases}$$

Esempio 2.18 Risolvere la disequazione $\sqrt{(x-1)(x+2)} > x$.

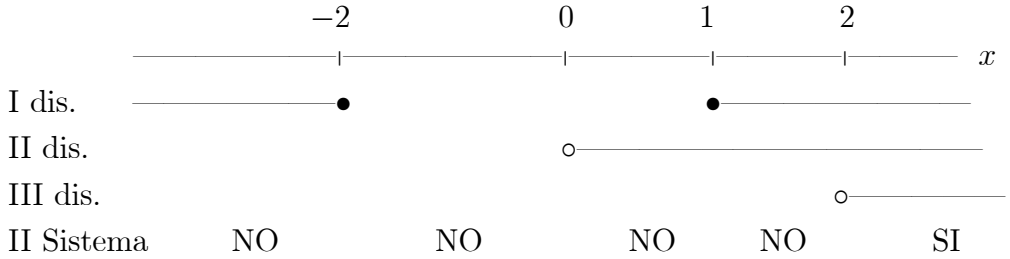
Innanzitutto consideriamo la condizione di realtà che sarà data da: $\boxed{x \leq -2,\ x \geq 1}$.
Sotto queste condizioni, analizziamo i due casi possibili per il II membro:

I Sistema: $\begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2$, in quanto utilizzando lo schema dei sistemi, si ha:



II Sistema: $\begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ (x-1)(x+2) > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2,$

come si deduce dallo schema seguente:



In conclusione le soluzioni della disequazione saranno date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi, cioè da $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

Osservazione 2.19 Se i radicali sono più d'uno, le disequazioni si trattano in modo analogo, anche se i calcoli possono diventare molto complicati.

Metodo di risoluzione di disequazioni irrazionali con radicale di indice dispari.

Il caso in cui compaiono soltanto radicali di indice dispari è più semplice in quanto non ci sono limitazioni al dominio (dovute alla presenza della radice), né dobbiamo distinguere casi dovuti al segno, in quanto l'elevamento a potenza con esponente dispari mantiene il segno della base:

$$\sqrt[2k+1]{a(x)} > b(x) \Longleftrightarrow a(x) > [b(x)]^{2k+1}$$

Esempio 2.20 Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x^3 - x + 1} > x - 1$.

Essa è equivalente alla disequazione: $x^3 - x + 1 > (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, da cui si ottiene $3x^2 - 4x + 2 > 0$, con $\Delta < 0$, che è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Risolviamo ora alcune disequazioni che coinvolgono le funzioni esponenziali e logaritmiche, illustrando i vari metodi di soluzione direttamente negli esempi proposti.

Esempio 2.21 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \ 2^x \geq 16, \qquad (b)\ \ e^x > 5, \qquad (c)\ \ 4^x \leq 8, \qquad (d)\ \ 5^x < -2.$$

Poiché le funzioni esponenziali a^x con base $a > 1$ sono strettamente crescenti ed hanno inverse $\log_a x$ strettamente crescenti, ricaviamo che:

(a) $2^x \geq 16 = 2^4 \ \Leftrightarrow\ x > 4$;

(b) $e^x > 5 \ \Leftrightarrow\ x > \log 5$;

(c) $4^x = 2^{2x} \ \leq\ 8 = 2^3 \ \Leftrightarrow\ 2x \leq 3 \ \Leftrightarrow\ x \leq \dfrac{2}{3}$;

(d) $5^x < -2$ mai, in quanto $a^x > 0$, $\forall x \in R$.

Criterio 2.22 Per risolvere una disequazione del tipo $a^x \gtreqless k$, con $a > 1$, $k > 0$, possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_a$ mantenendo lo stesso verso della diseguaglianza. Se $k < 0$, la soluzione è immediata: o tutto $\mathbb{R}$ per $a^x \geq k$ o $\emptyset$ per $a^x \leq 0$.

Esempio 2.23 Risolvere la disequazione $3^{5x+8} > 9^{x+1}$.

$3^{5x+8} > (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2} \ \Leftrightarrow\ 5x + 8 > 2x + 2 \ \Leftrightarrow\ x > -2.$

Esempio 2.24 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \ \left(\frac{3}{5}\right)^x < 1, \qquad (b)\ \ \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \geq 9, \qquad (c)\ \ \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} < 2, \qquad (d)\ \ \left(\frac{\pi}{4}\right)^x > 0.$$

Poiché le funzioni esponenziali a^x con base $0 < a < 1$ sono strettamente decrescenti ed hanno inverse $\log_a x$ strettamente decrescenti, ricaviamo che:

(a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x < 1 \ \Leftrightarrow\ x > 0$;

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-3x} \geq 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{2}{3}$;

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x > \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 5$;

(d) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x} > 0$ sempre, in quanto $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a > 0$.

Criterio 2.25 Per risolvere una disequazione del tipo $\left(\frac{1}{a}\right)^{x} \gtreqless k$ con $a > 1$, k> 0, si può operare la trasformazione $\left(\frac{1}{a}\right)^{x} = a^{-x}$ e ricondursi al caso precedente, come fatto, ad esempio in (b). Alternativamente, come in (c), possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_{\frac{1}{a}}$ cambiando il verso della diseguaglianza. Se $k < 0$, la soluzione è immediata (o tutto $\mathbb{R}$ o $\emptyset$).

Esempio 2.26 Risolvere la disequazione $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-2x} \leq 7$.

Applicando ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_{\frac{2}{3}}$, otteniamo: $1 - 2x \geq \log_{\frac{2}{3}} 7$, da cui $x \leq \frac{1}{2}(1 - \log_{\frac{2}{3}} 7)$.

Esempio 2.27 Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$.

Essa è equivalente a: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3(2x+1)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$ da cui si ottiene $6x + 3 < x^2 - 1$, equivalente a $x^2 - 6x - 4 < 0$, che è verificata per $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{13}) \cup (3 + \sqrt{13}, +\infty)$.

Esempio 2.28 Risolvere la disequazione $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$.

Poniamo $3^x = t$, che ovviamente deve essere una quantità positiva. La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 > 0 \\ t > 0 \end{cases} .$$

Le soluzioni dell'equazione $t^2 - 5t + 6 = 0$ associata sono $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Quindi il sistema è soddisfatto per $0 < t < 2$ e per $t > 3$. Sostituendo si ottengono le due disequazioni:

$$3^x < 2, \quad 3^x > 3$$

che, una volta risolte, danno come soluzioni della disequazione di partenza $(-\infty, \log_3 2) \cup (1, +\infty)$.

Esempio 2.29 Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $\log x < -2$, (b) $\log_{10} x \geq 3$, (c) $\log_2(x - 4) < 2$, (d) $\log_8 x > 0$.

Poiché le funzioni logaritmiche con base $a > 1$ sono definite per argomenti positivi, sono strettamente crescenti e hanno inverse a^x strettamente crescenti, ricaviamo che:

(a) $\log x < -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < e^{-2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{e^2};$

(b) $\log_{10} x \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10^3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10^3 = 1000;$

(c) $\log_2(x-4) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 < 2^2 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 8;$

(d) $\log_8 x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Criterio 2.30 Per risolvere una disequazione del tipo $\log_a x \gtreqless k$, con $a > 1$, dopo aver posto la condizione di esistenza del logaritmo, possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione data la funzione esponenziale di base a, mantenendo lo stesso verso della diseguaglianza. Avremo quindi così determinato un sistema di disequazioni equivalente alla disequazione di partenza.

Esempio 2.31 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 5, \qquad (b)\ \log_{\frac{2}{3}}(x+1) < 2, \qquad (c)\ \log_{\frac{3}{5}}(2x-1) \leq 0.$$

Poiché le funzioni logaritmiche con base $a < 1$ sono definite per argomenti positivi, sono strettamente decrescenti e hanno inverse a^x strettamente decrescenti , ricaviamo che:

(a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 10$

(b) $\log_{\frac{2}{3}}(x+1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\dfrac{5}{9}$

(c) $\log_{\frac{3}{5}}(2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1) \geq \frac{3}{5}^0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Criterio 2.32 Per risolvere una disequazione del tipo $\log_{\frac{1}{a}} \gtreqless k$, con $a > 1$, si può operare la trasformazione $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a x$ e ricondursi al caso precedente. Alternativamente, sempre dopo aver posto la condizione di esistenza del logaritmo, si può applicare ad entrambi i membri della disequazione data la funzione esponenziale di base $\frac{1}{a}$, cambiando il verso della diseguaglianza.

Esempio 2.33 Risolvere la disequazione

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 > 0.$$

Deve essere $x > 0$, condizione di esistenza del logaritmo. Poniamo $\log_2 x = t$ e otteniamo la disequazione

$$t^2 - t - 2 > 0$$

che è verificata da $t < -1,\ t > 2$. Sostituendo $\log_2 x$ a t, si ottengono le due disequazioni logaritmiche: $\log_2 x < -1$ e $\log_2 x > 2$, che, risolte nel loro insieme di definizione, danno le soluzioni della disequazione di partenza, cioè $\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (4, +\infty)$.

Disequazioni trigonometriche

Risolviamo ora alcune disequazioni che coinvolgono le funzioni trigonometriche, illustrando i vari metodi di soluzione direttamente negli esempi proposti.

Osservazione 2.34 Osserviamo che, quando dobbiamo risolvere disequazioni in cui compaiono solo funzioni periodiche di periodo T, possiamo dapprima limitarci a risolverle in un intervallo di ampiezza T e poi estendere a tutto R traslando gli intervalli soluzione di kT, $k \in Z$.

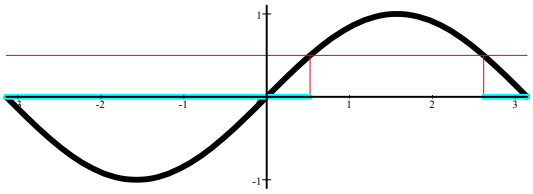
Esempio 2.35 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \sin x \leq 2\,, \qquad (b)\ \cos x > \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,, \qquad (c)\ \sin x < \tfrac{1}{2}, \qquad (d)\ \cos x \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

(a) Poiché vale $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni x reale, la disequazione è sempre verificata.

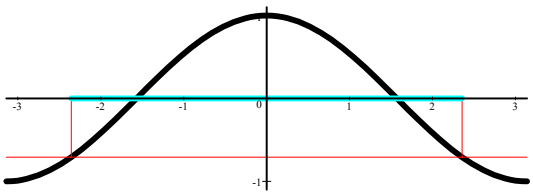
(b) Poiché anche $\cos x$ è limitata superiormente da 1 e $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, non può essere verificata per nessun x reale.

(c) Limitandoci al grafico di $\sin x$ su $(-\pi, \pi]$ [4], innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = \frac{1}{2}$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ in $(-\pi, \pi]$, cioè $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$. Dunque, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, la disequazione è verificata per $-\pi < x < \frac{\pi}{6}$ e per $\frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$:



La soluzione generale sarà data quindi dall'unione di tutti gli intervalli del tipo
$\left(-\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$, per $k \in Z$.

(d) Limitandoci al grafico di $\cos x$ su $(-\pi, \pi]$, innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $(-\pi, \pi]$, cioè $x = \pm\frac{3}{4}\pi$. Dunque, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, la disequazione è verificata per $-\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$:



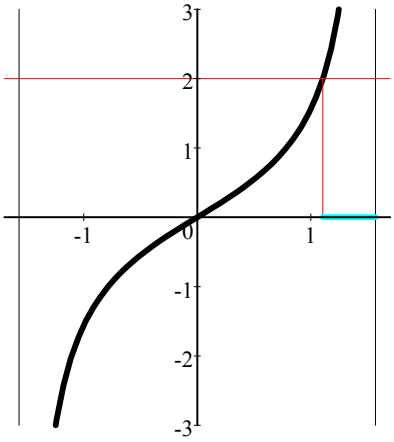
La soluzione generale sarà data quindi dall'unione di tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$, per $k \in Z$.

[4] Gli intervalli di ampiezza 2π solitamente usati nella risoluzione di disequazioni trigonometriche che coinvolgono le funzioni seno e coseno sono $(-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi)$.

Esempio 2.36 Risolvere la disequazione

$$2 - \operatorname{tg} x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x \geq 2.$$

Limitandoci al grafico di $tg\, x$ su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = 2$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\operatorname{tg} x = 2$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cioè $x =$arctg 2 (ricordiamo che la funzione tangente in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha come inversa l'arcotangente). Dunque, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la disequazione è verificata per arctg $2 \leq x < \frac{\pi}{2}$:



La soluzione generale sarà data quindi dall'<u>unione</u> di tutti gli intervalli del tipo $\left[\text{arctg } 2 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, per $k \in Z$.

In certi casi, come i seguenti, possono essere richieste solo le soluzioni all'interno di un intervallo:

Esempio 2.37 Trovare i valori di $x \in [0, 2\pi)$ che verificano la disequazione: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$.

Ponendo $t = \sin x$, si ottiene una disequazione di II grado: $2t^2 - 3t + 1 < 0$, che ha come soluzioni $1/2 < t < 1$. Pertanto la soluzione è data da

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < t = \sin x < 1 \\ x \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 2.38 Trovare i valori di $x \in [0, 2\pi)$ che verificano la disequazione:

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 > 0$$

Conviene, quando è possibile, riportarsi al caso in cui l'espressione dipende soltanto da $\sin x$ oppure $\cos x$. Qui ad esempio, usando l'identità fondamentale, si può sostituire $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ed ottenere $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 > 0$ che è equivalente alla disequazione dell'esempio precedente.

Argomento 2

Esercizi

Esercizio 2.1 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $2x^2 + x - 1 > 0$ **2)** $2 - x - x^2 \geq 0$ **3)** $x^2 + x + 5 \geq 0$

4) $(x + 4)(2x + 5) > 0$ **5)** $(x + 1)^2 - \frac{x+1}{2} < x^2 + \frac{3}{2}$ **6)** $3x^2 + 2x \leq 0$

7) $(1 - 3x)^2 + 4x > 2(2x + 1)^2 - 11x - 20$ **8)** $(3x + 5)^2 > 3(4 + 9x) + 1$ **9)** $3x^2 - 18x + 27 \leq 0$

10) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{1}{3}\right)(x + 1) \leq 6x + \frac{7}{12}$ **11)** $2x(5 - 3x) + 2 \geq \frac{2}{3}(9 - 6x)$ **12)** $x^2 + x + \sqrt{2} < 0$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.2 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ **2)** $|x^3 - x| \leq 0$ **3)** $|x^2 - 1| + |x^2 - 5| \geq 0$ **4)** $|x - 5| \leq -1$

5) $|2x - 6| > 4$ **6)** $\frac{|x - 1|}{|5 - x|} \leq 1$ **7)** $x + 4 - 2|x| < 3$ **8)** $|x - 1| < |x + 1|$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.3 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $\frac{7x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ **2)** $\frac{7x^2 - 2x - 1}{3x - 4} \leq 0$ **3)** $(x - 3)(x^2 - 2x + 1) \geq 0$

4) $\frac{-x^2 + 5x - 6}{25 - x^2} \leq 0$ **5)** $\frac{x^2 - 7x}{1 - x^2} \geq 0$ **6)** $\frac{x^2 + 4x + 3}{x - x^2} < 0$

7) $\frac{3 + x}{1 - x} > x - 3$ **8)** $\frac{8}{6x - x^2 - 8} > -1$ **9)** $\frac{x}{x + 2} \leq 3 - x$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.4 *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:*

1) $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \leq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 9} < 0 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 4x - 1 > \frac{1}{3}(x - 2) + 2x \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \frac{x - 2}{2x + 1} > 0 \\ \frac{3x - 2}{x} > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{x - 7} \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 10x + 21} \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x^2 + 11x + 24 \leq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.5 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $\sqrt{|x|} > x - 1$ **2)** $\sqrt{4 - x^2} < x + 1$ **3)** $x\sqrt{3 - 2x} \leq 1$

4) $\sqrt{x} > 3x + 1$ **5)** $\sqrt[3]{x} \leq -x$ **6)** $\sqrt{x - 1} > x + 1$

7) $\sqrt{2x - 3} < \sqrt{4x - 5}$ **8)** $\sqrt{3x^2 - 1} > \sqrt{x^2 - 3}$ **9)** $\sqrt{\frac{x-7}{x-2}} < 4$

10) $x - 3 < \sqrt[3]{x^3 - x}$ **11)** $\sqrt[5]{x - 4} > 2$ **12)** $\sqrt{x} + 3 \geq \sqrt{x - 2}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 2.6 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $2^x > 5$ **2)** $e^x \leq 8$ **3)** $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{4}{9}$ **4)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > 6$

5) $(2)^{2x} - \frac{1}{4} < 0$ **6)** $4^{2x+1} < 7$ **7)** $3^{x^2-1} > 27$ **8)** $6^{x+1} \geq 3$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.7 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$ **2)** $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$ **3)** $25^x - 5^x > 0$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.8 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $\log_2 x < 8$ **2)** $\log_3 x > 5$ **3)** $\log x \leq -\frac{1}{2}$

4) $\log_2(x^2 - 4) < 2$ **5)** $\log_{1/3}(x^2 - 2x) > -1$ **6)** $\log_3(x + 8 - \sqrt{x - 3}) > 2$

7) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x + 3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x - 3)} \leq 1$ **8)** $\log_3 \sqrt{3x + 1} - \log_3 \sqrt{9x^2 - 1} \geq 0$ **9)** $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) \leq 2$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.9 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $3 \log_3^2 x + 2 \log_3 x \geq 5$ **2)** $\log_{1/2} x > \log_{1/2}(x + 1) + 1$ **3)** $\log_4^2 x - 2 \log_4 x \leq -1$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.10 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $2\sin x < 1$ **2)** $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3)** $\operatorname{tg} x > 1$

4) $\sin^2 x - 2\sin x \leq 0$ **5)** $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$ **6)** $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 2) < 2\operatorname{tg} x + 3$

7) $\sin x(\sin x - \frac{1}{3}) > 0$ **8)** $\operatorname{tg}^2 x \geq 4$ **9)** $\sin^2 x + 2\cos^2 x < \frac{1}{3}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.11 *Risolvere le seguenti disequazioni:*

1) $\dfrac{1+\log_2(x+1)}{3-x^2} \geq 0,$ **2)** $\dfrac{2^{3x}-4}{\sqrt{x}-5} > 0,$ **3)** $\dfrac{3^{-x}-1}{2+\log_3(x+2)} \geq 0.$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 2.12 *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:*

1) $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \dfrac{1-2x}{\log x - 1} < 0 \end{cases}$, **2)** $\begin{cases} 2^{\left(x+\frac{2}{3}\right)} - 4 > 0 \\ \sqrt{x+1} \leq 3 \end{cases}$, **3)** $\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x-4} \leq 0 \\ \sqrt{x^2-2x-3} + 2 > 0 \end{cases}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 2.13 *Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = \log \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+2}$ **2)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log(x+5)}{x+2}}$ **3)** $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\right)$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log(x+3)}{e^{4x}-1}}$ **5)** $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt[4]{3^x - \frac{1}{9}}}$ **6)** $f(x) = \log\left(\dfrac{x+3}{|x|-2}\right)$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.14 *Determinare il segno delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:*

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-3x-2}}{(x+2)(3x-10)}$ **2)** $f(x) = \dfrac{4-3x}{\log(x-1)}$ **3)** $f(x) = \dfrac{\log(2x+2)}{3x+1}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.15 *Date le seguenti funzioni, indicarne l'insieme di definizione e tracciarne un grafico qualitativo:*

1) $f(x) = -x^3$ **2)** $f(x) = x^6$ **3)** $f(x) = x^{-5}$ **4)** $f(x) = -\sqrt{x}$ **5)** $f(x) = \sqrt[7]{x}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.16 *Tracciare un grafico qualitativo e precisare l'insieme di definizione delle funzioni:*

1) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **2)** $f(x) = \sqrt{x-1}$ **3)** $f(x) = |\log_2 x|$ **4)** $f(x) = \log_2 |x|$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.17 *Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni e dal grafico stabilire per ogni funzione f :*

a) in quali intervalli f è crescente

b) in quali intervalli f è decrescente

c) in quali intervalli f è concava

d) in quali intervalli f è convessa

e) se f è superiormente limitata nel suo insieme di definizione;

f) se f è inferiormente limitata nel suo insieme di definizione;

g) se f ha massimo nel suo insieme di definizione;

h) se f ha minimo nel suo insieme di definizione;

k) se f è iniettiva nel suo insieme di definizione.

1) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{per} \quad x \leq 1 \\ -\sqrt{3x-3} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$ **2)** $f(x) = \begin{cases} -x^3 + \frac{1}{2} & \text{per} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}} & \text{per} \quad \frac{1}{2} < x \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \log(-x) - \frac{1}{2} & \text{per} \quad x < -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+1)} & \text{per} \quad x \geq -1 \end{cases}$

Argomento *Soluzione*

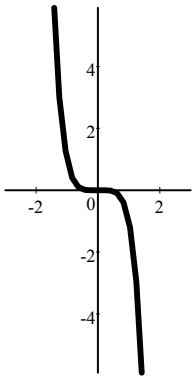
Esercizio 2.18 *Quale tra le seguenti funzioni ha approssimativamente il grafico disegnato di seguito?*

[A] $f(x) = x^2$

[B] $f(x) = -x^2$

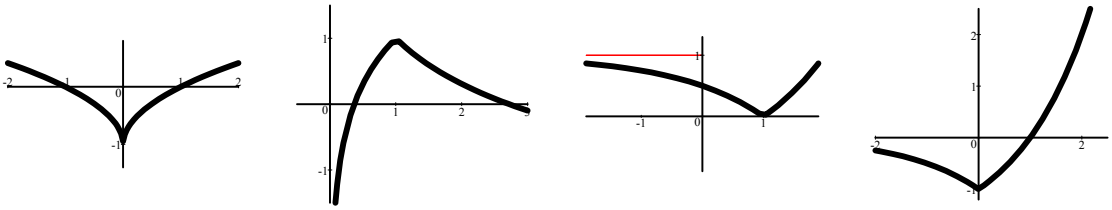
[C] $f(x) = -x^5$

[D] $f(x) = x^5$



Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.19 *Dati i grafici:*



A B C D

e le funzioni:

1) $f(x) = -|\log x| + 1$, **2)** $f(x) = \left|2^{x-1} - 1\right|$, **3)** $f(x) = |2^x - 1| - 1$, **4)** $f(x) = \sqrt[2]{|x|} - 1$,

associare ad ogni funzione il suo grafico e trovare le soluzioni delle disequazioni:

$$a) \quad \sqrt[2]{|x|} < 1, \qquad b) \quad |2^x - 1| \geq 1$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.20 *Utilizzando il grafico delle funzioni elementari coinvolte, risolvere per via grafica le seguenti disequazioni:*

1) $2^x + x \leq 0$ **2)** $\sin x > 4 - x^2$ **3)** $\arctan x - x^2 > 0$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 2.21 *Stabilire l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{12-4x}{x^2-1}}$ **2)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log(x-2)+1}{x^2-9}}$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2-3x+5}{\log_2(x+1)}}$ **4)** $f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+2x}+7x-1\right)$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.22 *Stabilire l'insieme di definizione ed il segno delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+5x-3}}{\log(3x-2)}$ **2)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{e^{(x^2-2x)}-1}}$ **4)** $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.23 *Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x + 2$ **2)** $f(x) = |\log(x+1)|$ **3)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{per} \quad x \le 0 \\ \cos x & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$

e stabilire quali tra di esse sono iniettive nel loro campo di esistenza e quali decrescenti in $(-1, 0)$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.24 *Tracciare un grafico qualitativo della seguente funzione* $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1)+2 & \text{per} \quad -1 < x \le 0 \\ 2^{-x}+1 & \text{per} \quad 0 < x \le 2 \\ -\sqrt{x-2}+\frac{5}{4} & \text{per} \quad x > 2 \end{cases}$$

e dal grafico stabilire:

a) se f è limitata in $(-1, +\infty)$;
b) se f ha massimo nel suo insieme di definizione e nel caso quale;
c) se f ha minimo nel suo insieme di definizione e nel caso quale;
d) gli intervalli di monotonia di f;
e) se f è concava in $(-1, 0)$;
f) se f è concava in $(-1, +\infty)$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.25 *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & \text{per} \quad x < 0 \\ |1 - x| & \text{per} \quad 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 & \text{per} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

e dedurne:

a) intervalli di monotonia;

b) intervalli di convessità;

c) eventuali punti di massimo o minimo assoluti per f.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 2.26 *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e dal grafico stabilire

a) se f è limitata nel suo insieme di definizione

b) l'estremo superiore in $(-\infty, 0)$

c) l'estremo inferiore in $(0, +\infty)$.

Argomento *Soluzione*

Argomento 2

Soluzioni degli esercizi

Suggerimenti

Esercizio 2.5

1. La disequazione $\sqrt{|x|} > x - 1$ è sempre verificata se $x - 1 < 0$, cioè per $x < 1$; nell'altro caso, si ottiene il sistema:

$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ |x| > (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > x^2 - 2x + 1 \end{cases}$, che ha soluzioni date da $x \in [1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, le quali, unite alle precedenti, danno le soluzioni della disequazione di partenza, cioè $x \in \left(-\infty, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. La disequazione $\sqrt{4 - x^2} < x + 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x + 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 < x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ 2x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x < \frac{-\sqrt{7}-1}{2},\ x > \frac{\sqrt{7}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, 2\right].$$

3. La disequazione $x\sqrt{3 - 2x} \leq 1$ è equivalente ai due sistemi:

$$(1) \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x < 0 \\ x\sqrt{3-2x} \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x \geq 0 \\ x^2(3-2x) \leq 1 \end{cases}.$$

Il primo è verificato per $x < 0$. Il secondo è equivalente al sistema $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3/2 \\ (x-1)^2(2x+1) \geq 0 \end{cases}$.

4. Dominio di $\sqrt{x}$: $[0, +\infty)$. Per tali valori anche il secondo membro della disequazione è positivo. Si possono elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione ottenendo la disequazione equivalente $9x^2 + 5x + 1 < 0$, che non ha soluzioni reali.

5. Dominio: $\mathbb{R}$; radice dispari: eleviamo entrambi i membri alla terza potenza. Si ottiene la disequazione equivalente $x \leq -x^3 \Leftrightarrow x^3 + x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

6. Dominio: $x \geq 1$. In tale intervallo il secondo membro è sempre positivo, quindi la disequazione data è equivalente a: $x - 1 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 < 0$. Non ci sono soluzioni reali.

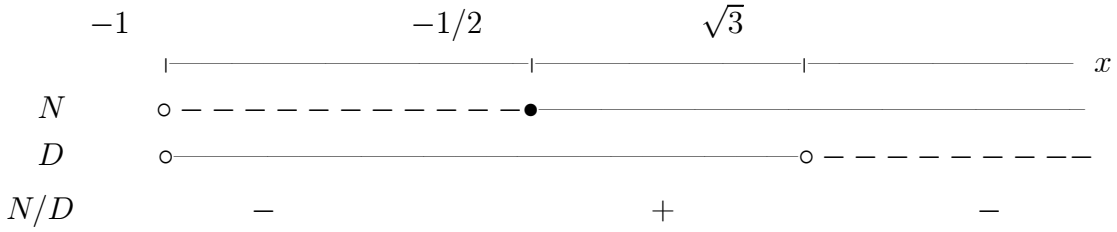
Esercizio 2.11

Sono tutte disequazioni fratte, in cui compaiono al numeratore e/o al denominatore disequazioni logaritmiche o esponenziali o irrazionali, che risolte danno il segno del numeratore e del denominatore. Si utilizza poi il solito schema per le disequazioni fratte. Per esempio, risolviamo la disequazione **1:**

La disequazione è definita per $x > -1$ e $x \neq \sqrt{3}$. Lo studio del segno di N comporta la risoluzione di un sistema che tenga conto dell'insieme in cui è definito il numeratore, cioè

$$N \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 + \log_2(x+1) \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + 1 \geq 2^{-1} \\ x > -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \geq -\tfrac{1}{2}.$$

Studio del segno di $D : 3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Confrontiamo ora i segni nell'insieme dove la disequazione è definita, quindi solo per $x > -1$ e $x \neq \sqrt{3}$:



La disequazione è quindi soddisfatta per $x \in \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

Esercizio 2.12

Ricordarsi degli insiemi di definizione!

1. La prima disequazione è verificata per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$. La seconda è a sua volta equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - 2x}{\log x - 1} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \;\; x > e.$$

In conclusione, il sistema è verificato solo da $x > e$.

3. La prima disequazione è verificata per $0 \leq x < 4$. La seconda è sempre verificata dove definita, essendo somma di due quantità positive, quindi l'unica condizione da porre (e da non dimenticarsi) è:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0, \quad \text{che è verificata per} \;\; x \leq -1, x \geq 3.$$

In conclusione, il sistema è verificato per $3 \leq x < 4$.

Esercizio 2.20

1. La disequazione è verificata quando $2^x \leq -x$; si traccino quindi i grafici delle due funzioni, cercando si stabilire dove il grafico di 2^x sta sotto quello della retta di equazione $y = -x$. Dal disegno si osserverà che i due grafici si incontrano in un punto, la cui ascissa non è determinabile in modo esatto, ma facilmente stimabile in un valore reale α compreso tra -1 e 0.

Per le altre due disequazioni, si applica lo stesso metodo.

Soluzioni

Sol. Ex. 2.1

1. Le radici sono $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. La disequazione è verificata per $x < -1$ e per $x > \frac{1}{2}$.

2. La disequazione è verificata per $-2 \leq x \leq 1$.

3. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. La disequazione è verificata per $x < -4$ e per $x > -\frac{5}{2}$.

5. La disequazione è verificata per $x < \frac{2}{3}$.

6. La disequazione è verificata per $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$.

7. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

8. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. $3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x-3)^2$, quantità che è sempre ≥ 0. La disequazione è verificata per $x = 3$.

10. La disequazione è verificata per $0 \leq x \leq \frac{29}{6}$.

11. La disequazione è verificata per $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$.

12. La disequazione non è mai verificata.

Sol. Ex. 2.2

1. La disequazione è verificata per $-3 \leq x \leq 3$.

2. La disequazione è verificata per $x = 0, \pm 1$.

3. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. La disequazione non è mai verificata.

5. La disequazione è verificata per $x < 1$ e per $x > 5$.

6. La disequazione è verificata per $x \leq 3$.

7. La disequazione è verificata per $x < -\frac{1}{3}$ e per $x > 1$..

8. La disequazione è verificata per $x > 0$.

Sol. Ex. 2.3

1. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{7} \leq x < 1$ e per $x > 2$.

2. La disequazione è verificata per $x \leq \frac{1}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{2}$ e per $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{2} \leq x < \frac{4}{3}$.

3. La disequazione è verificata per $x = 1$ e per $x \geq 3$.

4. La disequazione è verificata per $-5 < x \leq 2$ e per $3 \leq x < 5$.

5. La disequazione è verificata per $-1 < x \leq 0$ e per $1 < x \leq 7$.

6. La disequazione è verificata per $x < -3$, per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$.

7. La disequazione è verificata per $x < 1$.
8. La disequazione è verificata per $x < 0$, per $2 < x < 4$ e per $x > 6$.
9. La disequazione è verificata per $x \leq -\sqrt{6}$ e per $-2 < x \leq \sqrt{6}$.

Sol. Ex. 2.4

1. Il sistema è verificato per $-2 \leq x \leq -1$.
2. Il sistema è verificato per $\frac{1}{5} < x < 1$ e per $x > 2$.
3. Il sistema è verificato per $x < -\frac{1}{2}$ e per $x > 2$.
4. Il sistema è verificato per $-1 < x \leq 0$.
5. Il sistema è verificato per $x \leq -2$, $1 \leq x < 3$ e per $x > 7$.
6. Il sistema è verificato per $x = -3$.

Sol. Ex. 2.5

1. La disequazione è verificata per $x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.
2. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < x \leq 2$.
3. La disequazione è verificata per $x \leq \frac{3}{2}$.
4. La disequazione non è mai verificata.
5. La disequazione è verificata per $x \leq 0$.
6. La disequazione non è mai verificata.
7. La disequazione è verificata per $x \geq \frac{3}{2}$.
8. La disequazione è verificata per $x \leq -\sqrt{3}$ e per $x \geq \sqrt{3}$.
9. La disequazione è verificata per $x < \frac{5}{3}$ e per $x \geq 7$.
10. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
11. La disequazione è verificata per $x > 36$.
12. La disequazione è verificata per $x \geq 2$.

Sol. Ex. 2.6

1. La disequazione è verificata per $x > \log_2 5$.
2. La disequazione è verificata per $x \leq \log 8$.
3. La disequazione è verificata per $x > 2$.
4. La disequazione data è equivalente a $2^{-2x+3} > 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2^{-2x+2} > 3 \Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{2}\log_2 3$.
5. La disequazione data è equivalente a $2^{2x} < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -1$.
6. La disequazione data è equivalente a $2^{4x+2} < 7 \Leftrightarrow x < \frac{-2 + \log_2 7}{4}$.
7. La disequazione è verificata per $x < -2$ e per $x > 2$.
8. La disequazione è verificata per $x \geq -1 + \log_6 3$.

Sol. Ex. 2.7

1. Poniamo $2^x = t$, ovviamente $t > 0$, otteniamo $t < 2$ e $t > 4$, quindi la disequazione è verificata per $x < 1$ e per $x > 2$.
2. La disequazione è verificata per $-1 < x < 1$.
3. La disequazione è verificata per $x > 0$.

Sol. Ex. 2.8

1. La disequazione è verificata per $0 < x < 2^8$.
2. La disequazione è verificata per $x > 3^5$.
3. La disequazione è verificata per $0 < x \leq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
4. La disequazione data è equivalente a $0 < x^2 - 4 < 2^2 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < x < -2$ e per $2 < x < \sqrt{8}$.
5. La disequazione è verificata per $-1 < x < 0$ e per $2 < x < 3$.
6. La disequazione è verificata per $x \geq 3$.
7. La disequazione è verificata per $3 < x < 4$.
8. La disequazione è verificata per $\dfrac{1}{3} < x \leq \dfrac{2}{3}$.
9. La disequazione è verificata per $1 < x \leq \sqrt{5}$.

Sol. Ex. 2.9

1. Poniamo, per $x > 0$, $\log_3 x = t$, otteniamo $t \leq -\dfrac{5}{3}$ e $t \geq 1$, quindi la disequazione è verificata per $0 < x \leq 3^{-\frac{5}{3}}$ e per $x \geq 3$.
2. La disequazione è verificata per $0 < x < 1$.
3. La disequazione è verificata per $\log_4 x = 1$, cioè per $x = 4$.

Sol. Ex. 2.10

1. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $0 \leq x < \dfrac{\pi}{6}$ e per $\dfrac{5\pi}{6} < x < 2\pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left[2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ e $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Su $[-\pi, \pi)$ la disequazione è verificata per $-\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{6}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Su $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $0 \leq x \leq \pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$.

5. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$.

6. Su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

7. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $\arcsin\frac{1}{3} < x < \pi - \arcsin\frac{1}{3}$ e $\pi < x < 2\pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$ e $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in Z$.

8. Su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\arctan 2$ e $\arctan 2 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\arctan 2 + k\pi\right]$ e $\left[\arctan 2 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

9. Poichè $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha $1 + \cos^2 x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x < -\frac{2}{3}$, quindi la disequazione non è mai verificata.

Sol. Ex. 2.11

1. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{2} \leq x < \sqrt{3}$.

2. La disequazione è verificata per $0 < x < \frac{2}{3}$ e per $x > 25$.

3. La disequazione è verificata per $-\frac{17}{9} < x \leq 0$.

Sol. Ex. 2.12

1. Il sistema è verificato per $x > e$.
2. Il sistema è verificato per $\frac{4}{3} < x \leq 8$.
3. Il sistema è verificato per $3 \leq x < 4$.

Sol. Ex. 2.13

1. La funzione è definita in $[-5, -2) \cup (-1, +\infty)$.
2. La funzione è definita in $(-5, -4] \cup (-2, +\infty)$.
3. La funzione è definita in $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$.
4. La funzione è definita in $(-3, -2] \cup (0, +\infty)$.
5. La funzione è definita per $x > -2$, con $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
6. La funzione è definita in $(-3, -2) \cup (2, +\infty)$.

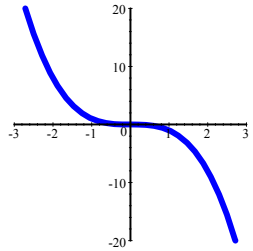
Sol. Ex. 2.14

1. La funzione è positiva in $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$ e negativa in $\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2, \frac{10}{3}\right)$.

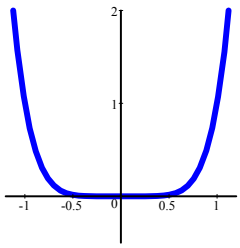
2. La funzione è positiva in $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ e negativa in $\left(1, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

3. La funzione è positiva in $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e negativa in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

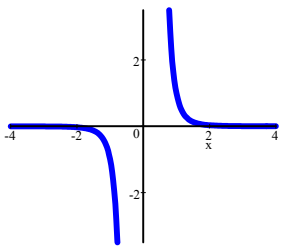
Sol. Ex. 2.15

1. 

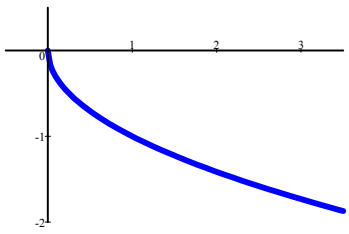
$y = -x^3,\ E = \mathbb{R}$

2. 

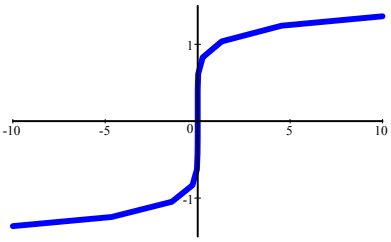
$y = x^6,\ E = \mathbb{R}$

3. 

$y = x^{-5},\ E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

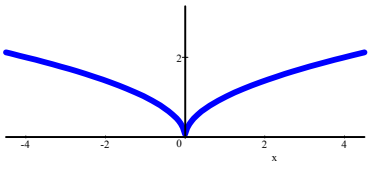
4. 

$y = -\sqrt{x},\ E = [0, +\infty)$

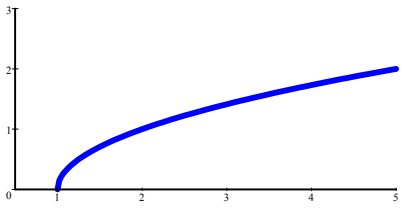
5. 

$y = \sqrt[7]{x},\ E = \mathbb{R}$

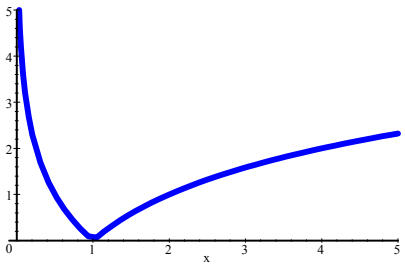
Sol. Ex. 2.16

1. 

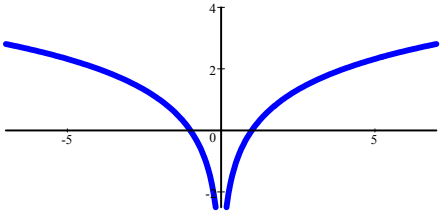
$y = \sqrt{|x|},\ E = \mathbb{R}$

2. 

$y = \sqrt{x-1},\ E = [1, +\infty)$

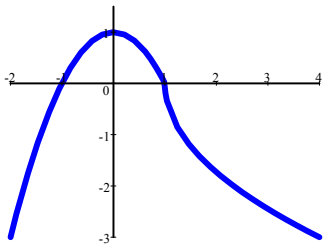
3. 

$y = |\log_2 x|\,,\ E = (0, +\infty)$

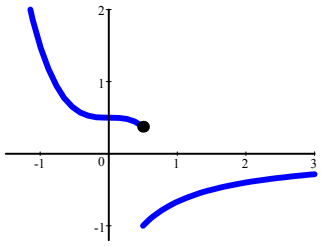
4. 

$y = \log_2 |x|\,,\ E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

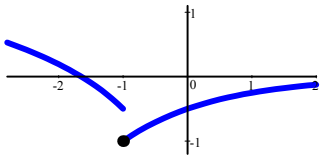
Sol. Ex. 2.17



1.



2.



3.

da cui si legge che:

	1.	2.	3.
a) f è crescente in	$(-\infty, 0)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	$(-1, +\infty)$
b) f è decrescente in	$(0, +\infty)$	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$(-\infty, -1)$
c) f è concava in	$(-\infty, 1)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ed in$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	$(-\infty, -1)$ ed in $(-1, +\infty)$
d) f è convessa in	$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	mai
e) f è superiormente limitata?	Sì	No	No
f) f è inferiormente limitata?	No	Sì	Sì
g) f ha massimo?	Sì e vale 1	No	No
h) f ha minimo?	No	No	Sì e vale -1
k) f è iniettiva?	No	Sì	No

Sol. Ex. 2.18

La funzione riportata in [C].

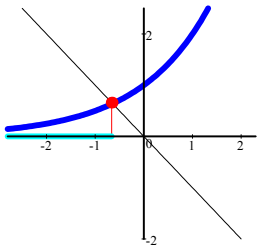
Sol. Ex. 2.19

Grafico	**Funzione**
A	4
B	1
C	2
D	3

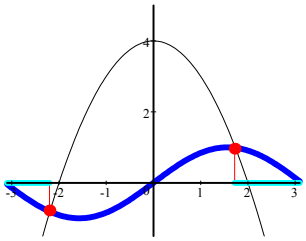
a) La disequazione $\sqrt[2]{|x|} < 1$ è verificata per $-1 < x < 1$.

b) La disequazione $|2^x - 1| \geq 1$ è verificata per $x \geq 1$.

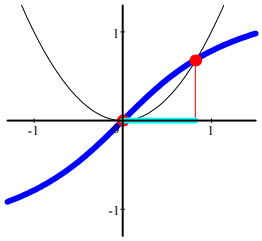
Sol. Ex. 2.20

1. 

2^x (medio), $-x$ (sottile)

2. 

$\sin x$ (medio), $4 - x^2$ (sottile)

3. 

$\arctan x$ (medio), x^2 (sottile)

1. La disequazione è verificata per $x \leq \alpha$ (con $-1 < \alpha < 0$).

2. La disequazione è verificata per $x < \alpha$ e per $x > \beta$ (con $-\pi < \alpha < 0 < \beta < 2$).

3. La disequazione è verificata per $0 < x < \alpha$ (con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$).

Sol. Ex. 2.21

1. La funzione è definita in $(-\infty, -1) \cup (1, 3]$.

2. La funzione è definita in $(2, 2 + e^{-1}] \cup (3, +\infty)$.

3. La funzione è definita in $(0, 1]$.

4. La funzione è definita in $\left(\dfrac{1}{12}, +\infty\right)$.

Sol. Ex. 2.22

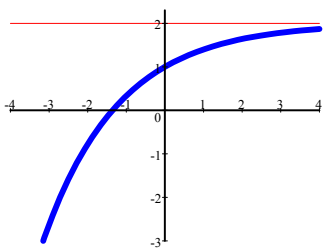
1. La funzione è definita in $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$.

2. La funzione è definita in $\left[-\dfrac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, positiva in $(2, 3)$ e negativa in $\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty)$.

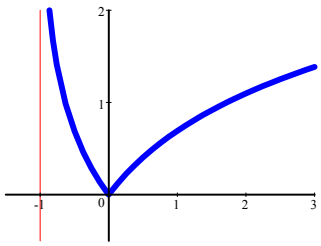
3. La funzione è definita in $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$, positiva in $(2, +\infty)$ e negativa in $(-1, 0)$.

4. La funzione è definita in $(-1, 2)$, positiva in $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e negativa in $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

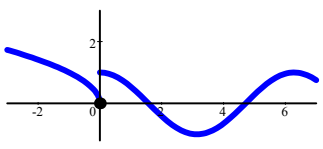
Sol. Ex. 2.23



1.



2.

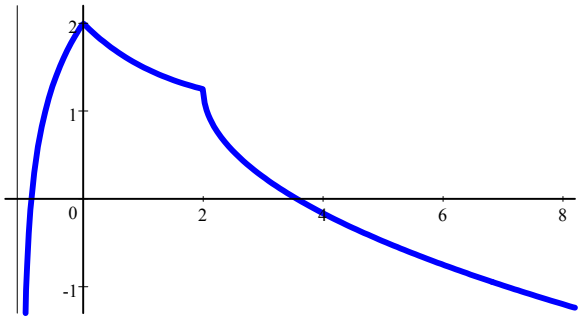


3.

da cui si legge che:

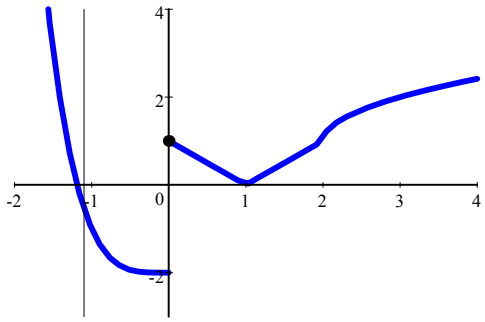
	1.	2.	3.
a) f è iniettiva nel suo campo di esistenza	SI	NO	NO
b) f è decrescente in $(-1, 0)$	NO	SI	SI

Sol. Ex. 2.24



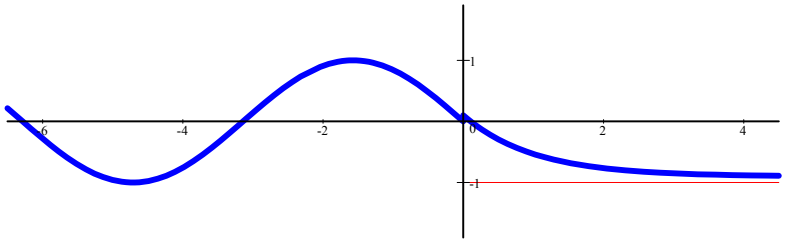
a) f non è limitata in $(-1, +\infty)$;
b) f ha massimo (2) nel suo insieme di definizione;
c) f non ha minimo nel suo insieme di definizione;
d) f è crescente in $(-1, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$;
e) f è concava in $(-1, 0)$;
f) f non è concava in $(-1, +\infty)$.

Sol. Ex. 2.25



a) f è crescente in $(1, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, 1)$;
b) f è convesssa in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, 2)$ e concava in $(2, +\infty)$;
c) f non ha nè massimo nè minimo assoluti nel suo insieme di definizione.

Sol. Ex. 2.26



a) f è limitata nel suo insieme di definizione;
b) l'estremo superiore in $(-\infty, 0)$ coincide con il massimo e vale 1;
c) l'estremo inferiore in $(0, +\infty)$ vale -1 (non è il minimo!).

Argomento 3
Limiti e calcolo dei limiti I

Distanza e intorni

In tutta la trattazione che segue si parlerà indistintamente di un *numero reale* o del corrispondente *punto* sulla retta euclidea (vedi Arg.1).

Definizione 3.1 Si definisce **distanza** tra due numeri reali o punti della retta euclidea a e b il modulo della loro differenza $|b-a| \ = |a-b|$.

Esempio 3.2 La distanza tra 1 e 4 è $|1-4| = |4-1| = 3$, la distanza tra -1 e 5 è $|-1-5| = |5-(-1)| = 6$.

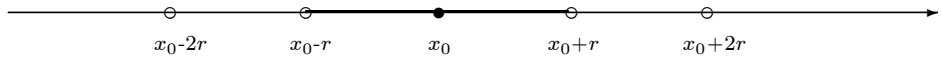
Utilizziamo ora la distanza per poter esprimere, attraverso la nozione di intorno, il concetto di "mettersi nelle vicinanze" di un numero reale:

Definizione 3.3 Si chiama **intorno** del numero reale x_0 di raggio $r > 0$ l'insieme dei numeri che distano da x_0 meno di r, cioè l'intervallo limitato aperto (vedi Arg.1):

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad -r < x - x_0 < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Esempio 3.4 L'intorno $U(2,1)$ di 2 di raggio 1 è l'intervallo aperto $(2-1, 2+1) = (1,3)$.

Esistono infiniti intorni di x_0, uno per ogni possibile raggio:

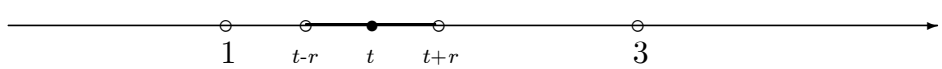


La scelta di un intorno è quindi data dalla scelta del suo raggio, cioè dalla scelta di un numero reale positivo. L'intersezione di due intorni di x_0 è data dall'intorno di raggio minore.
In generale si indicherà con $U(x_0)$ un qualunque intorno di x_0.

Definizione 3.5 Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, x_0 è detto **punto interno** di A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A.

Esempi 3.6

- Verifichiamo che ogni $t \in (1,3)$ è un punto interno di $(1,3)$: si prenda r minore del minimo tra le distanze $|t-1|$ e $|3-t|$. Allora $1 < t - r < t + r < 3$ e di conseguenza l'intorno $U(t,r) = (t-r, t+r)$ risulta contenuto in $(1,3)$:



Ciò vale in generale per qualunque intervallo aperto (a,b): ogni punto di (a,b) è interno.

- L'estremo a dell'intervallo $[a, b)$ non è un suo punto interno, in quanto ogni suo intorno contiene numeri minori di a che quindi non appartengono a $[a, b)$. Nello stesso modo si verifica in generale che gli estremi di un qualsiasi intervallo non sono punti interni.
- L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non contiene punti interni.

Dalla definizione di intorno segue che avvicinarsi a un numero reale x_0 significa "muoversi" in intorni di x_0 di raggio sempre più piccolo.
Per i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non ha senso parlare in modo analogo di distanza. Con l'espressione "avvicinarsi" a $+\infty$ si intende muoversi verso destra lungo semirette illimitate a destra, con "avvicinarsi" a $-\infty$ muoversi verso sinistra lungo semirette illimitate a sinistra. Si può allora generalizzare a $+\infty$ e $-\infty$ la definizione di intorno.

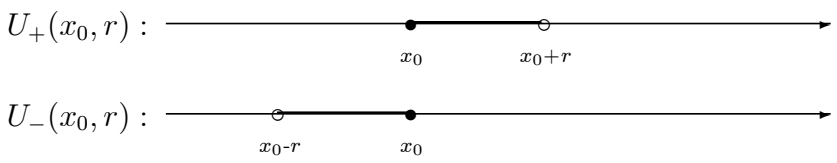
Definizioni 3.7

- Si chiama **intorno di** $+\infty$ di estremo sinistro a l'intervallo aperto illimitato a destra
$$U(+\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x > a\} = (a, +\infty) \ .$$
- Si chiama **intorno di** $-\infty$ di estremo destro a l'intervallo aperto illimitato a sinistra
$$U(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x < a\} = (-\infty, a) \ .$$

Se P rappresenta un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$, si indicherà in generale con $U(P)$ un intorno di P.
Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si possono anche dare le nozioni di intorno destro e di intorno sinistro, che tengono conto rispettivamente dei punti "vicini a x_0" maggiori di x_0 e dei punti "vicini a x_0" minori di x_0.

Definizioni 3.8

- Si chiama **intorno destro di** x_0 di raggio r l'intervallo
$$U_+(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq x_0, |x - x_0| < r\} = [x_0, x_0 + r)$$
- Si chiama **intorno sinistro di** x_0 di raggio r l'intervallo
$$U_-(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \leq x_0, |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0]$$



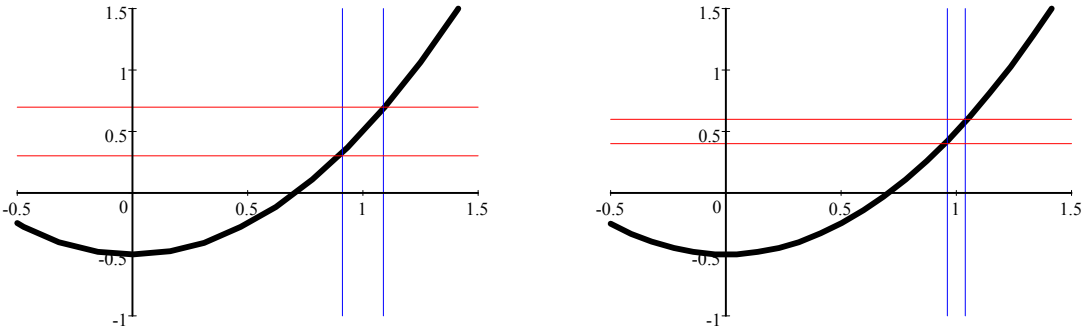
Esempio 3.9 L'intorno destro $U_+(3, 4)$ di 3 di raggio 4 è l'intervallo $[3, 7)$. L'intorno sinistro $U_-(1, 2)$ di 1 di raggio 2 è l'intervallo $(-1, 1]$.

In generale si indicherà con $U_+(x_0)$ un intorno destro qualsiasi del numero reale x_0 e con $U_-(x_0)$ un intorno sinistro.
Avvicinarsi al numero reale x_0 esclusivamente da destra (rispettivamente da sinistra) significa "muoversi" in intorni destri (rispettivamente sinistri) di x_0 sempre più piccoli.

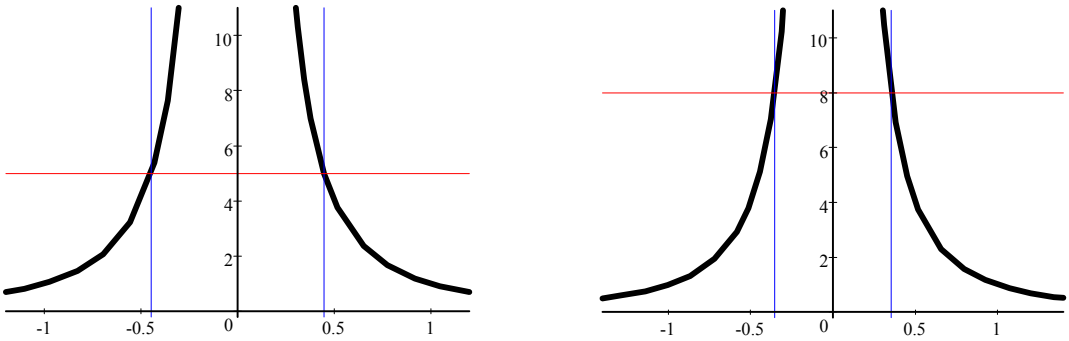
Definizione di limite

Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ e $-\infty$. I valori assunti da una funzione f mentre il suo argomento si avvicina a P, possono avvicinarsi a un numero reale L oppure essere in modulo sempre più grandi, come vediamo negli esempi seguenti:

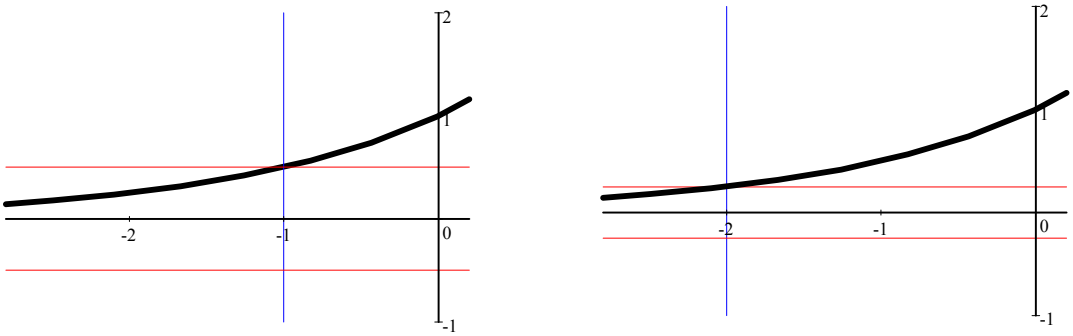
Esempio 3.10 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $x^2 - \frac{1}{2}$ si avvicinano (tendono) al numero $\frac{1}{2}$ per x che si avvicina (tende) a 1.



Esempio 3.11 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione $\dfrac{1}{x^2}$ si avvicinano a $+\infty$ per x che si avvicina a 0.



Esempio 3.12 Osservando il grafico si nota che i valori della funzione e^x si avvicinano a 0 per x che si avvicina a $-\infty$.



Nota Per conoscere il comportamento di f "vicino a P" non è importante il valore di f in P o addirittura che f sia definita in P, ma occorre che la funzione sia definita per numeri "arbitrariamente vicini" a P, quindi per numeri (diversi da P) in ogni suo intorno arbitrariamente piccolo: questo si esprime dicendo che P deve essere un punto di accumulazione per il dominio di f.

Definizione 3.13 P è **punto di accumulazione** per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno $U(P)$ di P ci sono elementi di A diversi da P, cioè

$$\boxed{\forall\, U(P) \qquad \exists\, x \in A \cap U(P), \quad x \neq P.}$$

Definizione 3.14 P è **punto di accumulazione destro (sinistro)** per il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno destro (sinistro) di x_0 esistono elementi di A diversi da P.

Esempi 3.15

- Se P è un punto interno di A, P è ovviamente un suo punto di accumulazione, perché, visto che esiste un intorno U di P tutto contenuto in A, ogni altro intorno U'di P contiene l'intorno $U' \cap U$ e quindi dei punti di A diversi da P.
- L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ha come unico punto di accumulazione $+\infty$: ogni intervallo illimitato a destra contiene numeri naturali.
- L'insieme dei punti di accumulazione e dei punti di accumulazione da sinistra di $[1,2) \cup \{3\}$ è $[1,2]$, mentre l'insieme dei suoi punti di accumulazione da destra è $[1,2)$. Si noti che 2 è punto di accumulazione di $[1,2) \cup \{3\}$ ma non vi appartiene.

È ora possibile formalizzare in modo rigoroso il concetto di limite, dando la seguente definizione:
Definizione 3.16 Data la funzione $f : A \to \mathbf{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per il suo dominio A, si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite** di f per x che tende a P e si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to P} f(x) = L}$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno di P i cui punti x del dominio A diversi da P hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$\boxed{\lim_{x \to P} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\, U(L) \qquad \exists U(P) \;\text{ tale che }\; \forall\, x \in A \cap U(P),\; x \neq P, \qquad f(x) \in U(L).}$$

La definizione di limite 3.16 ha il vantaggio di andare bene sia che il punto P e il limite L siano numeri reali, sia che P o L o entrambi siano $+\infty$ o $-\infty$. Bisogna però ricordare che gli intorni di un numero reale sono intervalli limitati centrati in quel numero, mentre gli intorni di $+\infty$ o $-\infty$ sono intervalli illimitati a destra o a sinistra (def. 3.3 e 3.7).[1]

[1]Per impratichirsi con la definizione di limite è utile riscriverla nei vari casi. Vediamone alcuni:

1) Siano $P = x_0$ e L numeri reali come nell'esempio 3.10. Gli intorni $U(L)$ e $U(x_0)$ sono intervalli limitati determinati dai raggi ϵ e δ e $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ se e solo se $|x-x_0| < \delta$ mentre $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ se e solo se $|f(x)-L| < \epsilon$. Quindi $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| < \delta, \text{ si ha che } |f(x) - L| < \epsilon.}$

2) Siano $P = x_0$ un numero reale e $L = +\infty$, come nell'esempio 3.11. Gli intorni di x_0 sono determinati dal raggio δ, gli intorni $(k, +\infty)$ di $+\infty$ sono determinati dall'estremo inferiore k e $f(x) \in (k, +\infty)$ se e solo se $f(x) > k$. Quindi $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k\ \exists\ \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| < \delta, \text{ si ha che } f(x) > k\ .}$

3) Siano $P = -\infty$ e L un numero reale, come nell'esempio 3.12. Ogni intorno di L è determinato dal raggio ϵ, ogni intorno $(-\infty, k)$ di $-\infty$ dall'estremo superiore k e $x \in (-\infty, k)$ se e solo se $x < k$. Quindi $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists k \text{ tale che } \forall x \in A, \quad \text{con } x < k, \text{ si ha che } |f(x) - L| < \epsilon.}$

Si può verificare direttamente dalla definizione che negli esempi visti, si trova il limite che ci si aspettava, cioè:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to -\infty}2^x=0$$

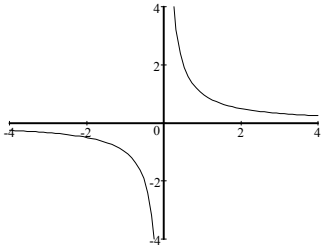
Definizione 3.17 Se il limite per $x\to P$ è finito, si dice che la funzione *converge*, se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ che *diverge* o che *è un infinito* per $x\to P$.

Esistenza del limite

Il limite può non esistere.

Esempi 3.18

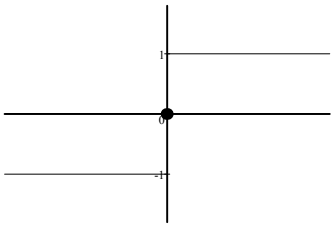
- NON esiste $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ perchè in qualunque intorno di 0 ci sono sia punti le cui immagini mediante $\frac{1}{x}$ stanno in intorni arbitrari di $+\infty$ sia punti le cui immagini stanno in intorni arbitrari di $-\infty$.



$f(x)=1/x$

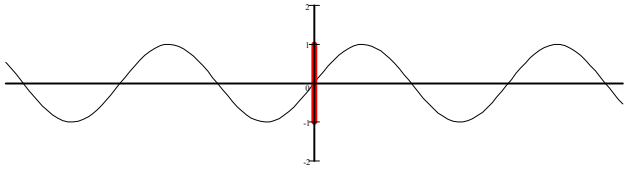
- Data la funzione "signum"

$$sgn(x)=\begin{cases}-1 \text{ se } x<0\\ 0 \text{ se } x=0\\ 1 \text{ se } x>0\end{cases}$$



si noti che NON esiste $\lim_{x\to 0} sgn(x)$

Esempio 3.19 NON esiste $\lim_{x\to+\infty}\sin x$, perchè qualunque intorno di $+\infty$ ha come immagine mediante $\sin x$ l'intero intervallo $[-1,1]$.



$f(x)=\sin x$

Limite destro e sinistro

Sulla falsariga delle definizioni precedenti si danno le definizioni di: limite destro e sinistro.

Definizioni 3.20 Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro (sinistro) per A,

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite destro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da destra) e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno destro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\, U(L)\ \exists\, U_+(x_0) \text{ tale che } \forall\, x \in A \cap U_+(x_0),\ x \neq x_0, \qquad f(x) \in U(L).$$

- si dice che $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è il **limite sinistro** di f per x che tende a x_0 (o il limite di f per x che tende a x_0 da sinistra) e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

se per ogni intorno di L esiste un intorno sinistro di x_0 i cui punti x diversi da x_0 hanno immagini $f(x)$ appartenenti all'intorno fissato di L, cioè

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\, U(L)\ \exists\, U_-(x_0) \text{ tale che } \forall\, x \in A \cap U_-(x_0),\ x \neq x_0, \qquad f(x) \in U(L).$$

Segue dalle definizioni che, se x_0 è punto di accumulazione sia destro che sinistro, allora ha senso parlare sia di limite destro che di limite sinistro, sia di limite completo e si ha che[2]

$$\text{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ se e solo esistono } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Esempio 3.21 $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$, quindi $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Esempi 3.22 (confronta con gli esempi 3.18)

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, quindi NON esiste $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.
- $\lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1$, quindi NON esiste $\lim_{x \to 0} sgn(x)$.

[2] Si può inoltre definire il limite per eccesso (resp. per difetto).

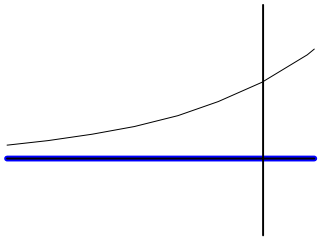
Def: Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ punto di accumulazione per A, si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il **limite per eccesso** (resp. **per difetto**) di f per x che tende a P e si scrive $\lim_{x \to P} f(x) = L^+$ (resp. L^-) se $\forall\ U_+(L)$ intorno destro di L (resp. $U_-(L)$ intorno sinistro) $\exists\, U(P)$ intorno di P tale che $\forall\, x \in A \cap U(P),\ x \neq P, \quad f(x) \in U_+(L)$ (resp. $U_-(L)$) .

Asintoti orizzontali e verticali

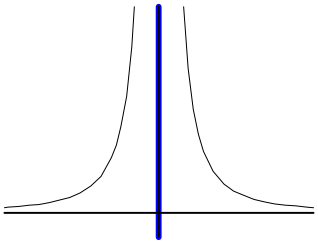
Definizione 3.23 Se la funzione converge al numero reale L per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$ si dice che la funzione ammette **asintoto orizzontale** $y = L$.

Definizione 3.24 Se la funzione diverge per x che tende al numero reale x_0 da destra o da sinistra si dice che la funzione ammette **asintoto verticale** $x = x_0$.

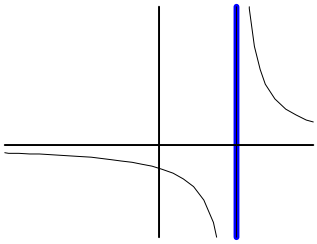
Ad esempio 2^x ha asintoto orizzontale $y = 0$ per x che tende a $-\infty$, mentre $\dfrac{1}{x^2}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e $\dfrac{1}{x-1}$ ha asintoto verticale $x = 1$.



asintoto $y = 0$



asintoto $x = 0$



asintoto $x = 1$

Limiti delle funzioni monotone

Nel caso di funzioni monotone (non necessariamente continue) definite su intervalli il limite agli estremi dell'intervallo è determinato dalla monotonia della funzione stessa.
Come in Arg.1

$$\inf_A f = \begin{cases} \text{estremo inferiore di } f(A), \text{ se } f \text{ è inferiormente limitata in } A \\ -\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\sup_A f = \begin{cases} \text{estremo superiore di } f(A), \text{ se } f \text{ è superiormente limitata in } A \\ +\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Vale il seguente teorema:
Teorema 3.25 (limiti di funzioni monotone su intervalli)

Sia f **crescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I.

$$\begin{aligned} \text{Se } I &= (a,b), \text{ allora } \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f. \\ \text{Se } I &= (a,+\infty), \text{ allora } \lim_{x\to +\infty} f(x) = \sup_{(a,+\infty)} f. \\ \text{Se } I &= (-\infty,b), \text{ allora } \lim_{x\to -\infty} f(x) = \inf_{(-\infty,b)} f. \end{aligned}$$

Sia f **decrescente** (strettamente o debolmente) nell'intervallo I.

$$\begin{aligned} \text{Se } I &= (a,b), \text{ allora } \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f. \\ \text{Se } I &= (a,+\infty), \text{ allora } \lim_{x\to +\infty} f(x) = \inf_{(a,+\infty)} f. \\ \text{Se } I &= (-\infty,b), \text{ allora } \lim_{x\to -\infty} f(x) = \sup_{(-\infty,b)} f. \end{aligned}$$

Limiti delle funzioni elementari

Prima di affrontare il calcolo esplicito dei limiti premettiamo la seguente definizione (vedi Arg.5):
Definizione 3.26 Una funzione si dice **continua in** x_0 punto del dominio A di f e di accumulazione per A, se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

In altre parole per le funzioni continue in un punto x_0 il limite per $x \to x_0$ coincide con il valore della funzione.

L'esempio 3.21 mostra che $|x|$ è continua in 0.

Vale la seguente importante proprietà:

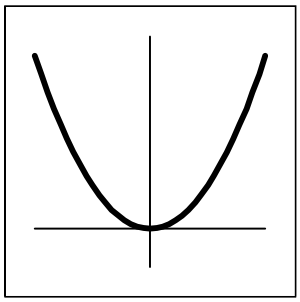
Ogni funzione elementare è continua nel suo campo d'esistenza

Esempi 3.27

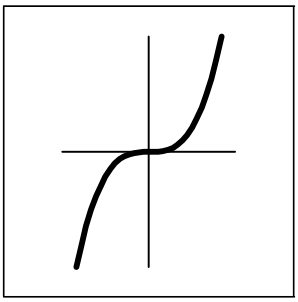
- $\lim_{x\to 3} 2^x = 2^3 = 8,$
- $\lim_{x\to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0,$
- $\lim_{x\to 1} \log x = 0$

Riportiamo i grafici delle funzioni elementari e i loro limiti agli estremi dei campi d'esistenza ricavabili dal precedente teorema sui limiti delle funzioni monotone.

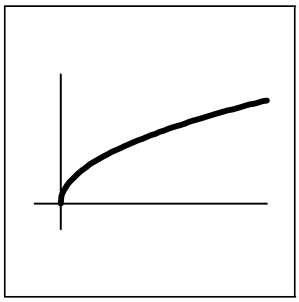
Funzione potenza:



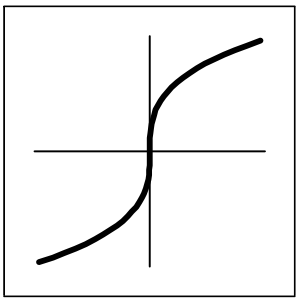
$f(x) = x^{2n}$



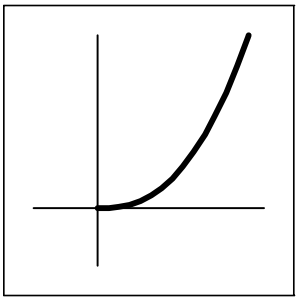
$f(x) = x^{2n+1}$



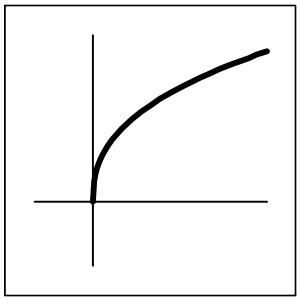
$f(x) = \sqrt[2n]{x}$



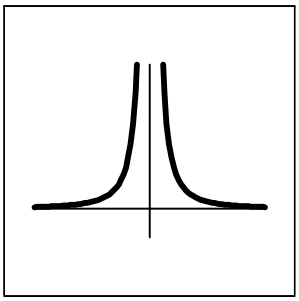
$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$



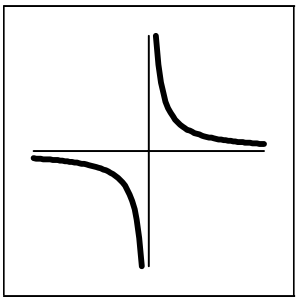
x^α, α reale > 1



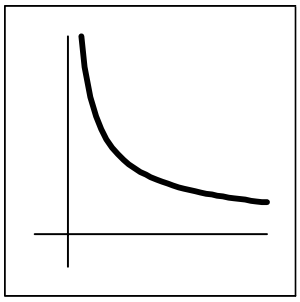
x^α, $0 < \alpha < 1$



$\frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$



$\frac{1}{x^{2n+1}} = x^{-2n-1}$



x^α, α reale < 0

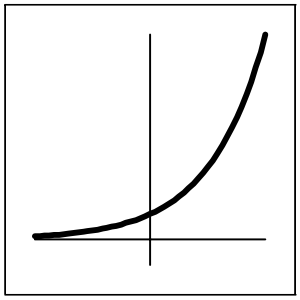
- per $\alpha > 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0^\alpha = 0$
- per $\alpha < 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$

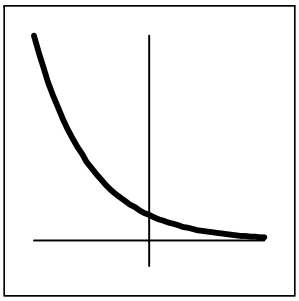
$\lim_{x\to-\infty} x^{-2n-1} = 0 \quad \lim_{x\to 0^-} x^{-2n-1} = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^{-2n} = 0 \quad \lim_{x\to 0^-} x^{-2n} = +\infty$

In particolare $\lim_{x\to 0} x^{-2n} = +\infty$, mentre **non** esiste $\lim_{x\to 0} x^{-2n-1}$.

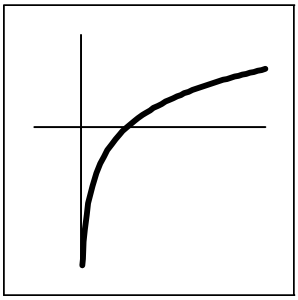
Funzioni esponenziali e logaritmiche:



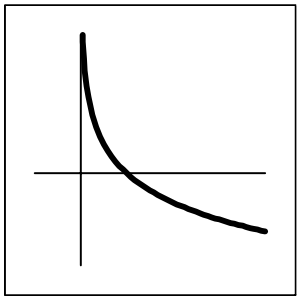
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



a^x, con $0 < a < 1$



$\log_a x$, $a > 1$

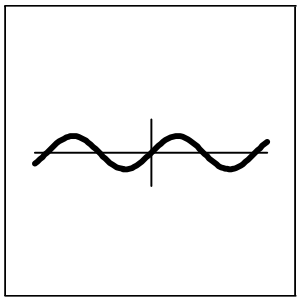


$\log_a x$, $0 < a < 1$

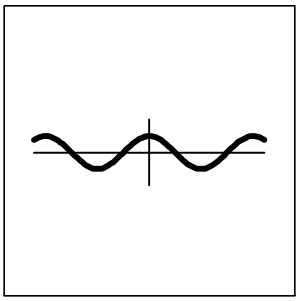
- per $a > 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

- per $a > 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- per $0 < a < 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

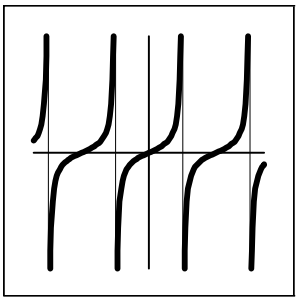
Funzioni trigonometriche:



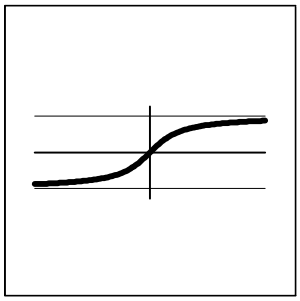
$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \tan x$



$f(x) = \arctan x$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan x = +\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Non esistono i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to-\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to+\infty} \cos x, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos x, \quad \lim_{x\to+\infty} \tan x, \quad \lim_{x\to-\infty} \tan x, \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} \tan x$$

Proprietà dei limiti

Somma: Si vuole ora calcolare il limite di una somma di funzioni di cui conosciamo singolarmente il limite. In molti casi non ci sono problemi, in quanto a partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite della somma è uguale alla somma dei limiti.*

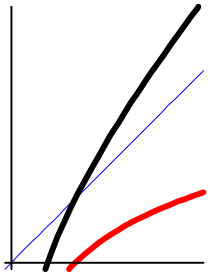
Esempio 3.28

$$\lim_{x\to 2} \underset{\downarrow}{x^2} + \underset{\downarrow}{\log_2 x} = \underset{}{5} \qquad \lim_{x\to\pi} \underset{\downarrow}{\sin x} + \underset{\downarrow}{\cos x} = \underset{}{-1}$$
$$\qquad\quad 4 \qquad\quad 1 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad -1$$

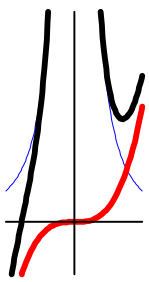
Nei casi in cui *una sola funzione o entrambe divergono a* $+\infty$, *oppure una sola o entrambe divergono a* $-\infty$, si dimostra che *i limiti delle somme sono rispettivamente* $+\infty$ *e* $-\infty$.

Esempi 3.29

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow}{(x} + \underset{\downarrow}{\log x)} = \underset{}{+\infty} \qquad \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow}{(\frac{1}{x^2}} + \underset{\downarrow}{x^3)} = \underset{}{+\infty}$$
$$\qquad\quad +\infty \qquad\quad +\infty \qquad\qquad\quad +\infty \qquad\quad 0$$



sottile x, rossa $\log x$, nera $x + \log x$



sottile $\frac{1}{x^2}$, rossa x^3, nera $\frac{1}{x^2} + x^3$

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. (**Forma indeterminata** $\infty - \infty$)

Esempio 3.30

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{(x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-2-x^2))} = \lim_{x\to+\infty} -2 = -2$$

mentre si che che (vedi esempi 3.32 e 3.33)

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{(x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-x))} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{(x^2} + \underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(-x^3))} = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = -\infty$$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di somma di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

S

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L} \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M} \in \mathbf{R}$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{L} + \mathbf{M}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Il punto interrogativo indica che non si può in generale concludere nulla sul limite.

Prodotto: Anche il calcolo del limite di un prodotto di funzioni di cui si conoscono i limiti risulta in molti casi immediato. A partire dalla definizione si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.*

Esempi 3.31

$$\lim_{x\to1} \underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{2^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \pi/4}}{\arctan x} = \pi/2, \qquad \lim_{x\to0} \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\cos x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 3}}{(x^3+3)} = 3$$

Inoltre si dimostra che, se *una delle funzioni diverge a* $+\infty$ *e l'altra converge a un numero positivo o diverge a* $+\infty$, oppure *una diverge a* $-\infty$ *e l'altra converge a un numero negativo o diverge a* $-\infty$, *il limite del prodotto è sempre* $+\infty$.

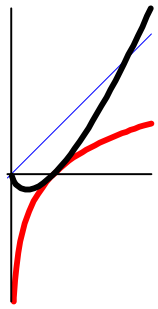
Esempi 3.32

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow}{(x} \cdot \underset{\downarrow}{\log x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \underset{\downarrow}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$
$$+\infty \quad +\infty \qquad\qquad +\infty \quad 1$$

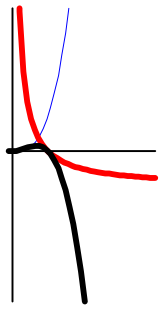
Infine si dimostra che, *se una delle funzioni diverge a $+\infty$ e l'altra converge a un numero negativo o diverge a $-\infty$*, oppure *una diverge a $-\infty$ e l'altra converge a un numero positivo, il limite del prodotto è sempre $-\infty$.*

Esempi 3.33

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\downarrow}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^x} \cdot \underset{\downarrow}{(4x^5+2)} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow}{x^3} \cdot \underset{\downarrow}{\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -\infty$$
$$+\infty \quad -\infty \qquad\qquad +\infty \quad -1$$



Es. 3.32: sottile x, rossa $\log x$, nera $x \log x$



Es. 3.33: sottile $\frac{1}{x} - 1$, rossa x^3, nera $\left(\frac{1}{x} - 1\right) x^3$

Le proprietà che legano l'operazione di limite all'operazione di prodotto di funzioni sono riassunte nella seguente tabella:

P

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L \in R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ o $-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M \in R}$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f(x) \cdot g(x)} \to$	$\mathbf{L \cdot M}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Se invece una funzione diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ e l'altra a 0, si possono avere comportamenti differenti per cui non si può concludere nulla a priori. **(Forma indeterminata $\infty \cdot 0$)**

Esempi 3.34

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\0}}{(e^{-x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{e^{x+2})} = \lim_{x\to+\infty} e^2 = e^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x^{-2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\-\infty}}{(x^3+2)} = \lim_{x\to-\infty} x + 2x^{-2} = -\infty$$

Quoziente: Anche il calcolo del limite di un quoziente di funzioni di cui si conoscono i limiti in molti casi è immediato. Si dimostra che, *quando i limiti sono numeri reali e il limite del denominatore è diverso da 0, il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti.*

Esempi 3.35

$$\lim_{x\to0} \frac{\overset{\uparrow}{\overset{3}{}}e^x - x + 2}{\underset{\downarrow}{\underset{4}{\cos x + 3}}} = \frac{3}{4} \qquad \lim_{x\to2} \frac{\overset{\uparrow}{\overset{3\cdot4-7}{}}3x^2 - 7}{\underset{\downarrow}{\underset{1+9}{\log_2 x + 3^x}}} = \frac{3\cdot4-7}{1+9} = \frac{1}{2}$$

Inoltre si dimostra che, *se il il numeratore converge e il denominatore diverge, il limite del quoziente è 0.* Se invece *il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo*, oppure *il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo, il limite del quoziente è sempre $+\infty$*. Infine, *se il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge a un numero negativo*, oppure *il numeratore diverge a $-\infty$ e il denominatore converge a un numero positivo, il limite del quoziente è sempre $-\infty$.*

Esempi 3.36

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\uparrow}{\overset{0}{}}(\frac{1}{2})^x}{\underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{x^3-1}}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\uparrow}{\overset{+\infty}{}}\log x}{\underset{\downarrow}{\underset{-\frac{\pi}{2}}{\arctan x - \pi}}} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\uparrow}{\overset{-\infty}{}}3x^5-2}{\underset{\downarrow}{\underset{-1}{3^x-1}}} = +\infty$$

Tali casi immediati sono raccolti nella prima tabella riassuntiva sui limiti dei quozienti.

$\mathbf{Q_1}$

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L \in R}$	$\mathbf{L \in R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{M \neq 0}$	$+\infty$ o $-\infty$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$	$\mathbf{M > 0}$	$\mathbf{M < 0}$
$\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} \to$	$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{M}}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Se il denominatore ha invece limite 0 bisogna stare molto attenti perchè il limite può anche non esistere.

Esempi 3.37

- Come abbiamo visto non esiste $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Il numeratore è sempre 1 e $\lim_{x\to 0} x = 0$, ma ovviamente per $x > 0$ il denominatore assume valori > 0, per $x < 0$ assume valori < 0, quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- Non esiste $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x-1}$: infatti $\lim_{x\to 1} e^x = e$ e $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$, ma per $x > 1$, il denominatore assume valori > 0, per $x < 1$ assume valori < 0, quindi $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$, mentre $\lim_{x\to 1-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty$.

In generale se $\lim_{x\to P} f(x) = 0$, ma f assume sia valori positivi che negativi in ogni intorno di P, non può esistere $\lim_{x\to P} \frac{1}{f(x)}$, perché in ogni intorno di P ci sono punti in cui $\frac{1}{f}$ assume valori sia positivi che negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto.

IMPORTANTE: Con

$$\lim_{x\to P} f(x) = 0^+$$

si indica che il limite è 0 e inoltre esiste un intorno di P i cui punti nel dominio di f soddisfano la condizione $f(x) > 0$. In tal caso $\lim_{x\to P} \frac{1}{f} = +\infty$. Analogamente con $\lim_{x\to P} f(x) = 0^-$ si indica che il limite è 0 e esiste un intorno di P i cui punti (nel dominio di f) soddisfano $f(x) < 0$ e in questo caso $\lim_{x\to P} \frac{1}{f} = -\infty$.

Nei casi il cui *il denominatore converge a* 0^+ *ed il numeratore tende a un numero positivo o a* $+\infty$, oppure *il denominatore converge a* 0^- *e il numeratore tende a un numero negativo o a* $-\infty$, si dimostra che *il limite del quoziente è* $+\infty$. Se invece *il denominatore converge a* 0^+ *e il numeratore tende a un numero negativo o a* $-\infty$, oppure *il denominatore converge a* 0^- *e il numeratore tende a un numero positivo o a* $+\infty$, si dimostra che *il limite del quoziente è* $-\infty$.

Esempi 3.38

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{+\infty}{\uparrow}\ -\log x\ }{\underset{0^+}{\downarrow}\ x^3} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\overset{-1}{\uparrow}\ x-3\ }{\underset{0^+}{\downarrow}\ (x-2)^2} = -\infty$$

Se invece sia il numeratore che il denominatore divergono oppure se entrambi convergono a 0 non si può conludere nulla a priori su tali limiti (**Forme inderminate** $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$).

Esempi 3.39

$$\text{per } x \to +\infty: \quad \frac{\overset{+\infty}{\uparrow}\ 2x^2-1\ \downarrow{+\infty}}{x^3+2x-1} = \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\overset{2}{\uparrow}\ 2-\frac{1}{x^2}\ \downarrow{+\infty}}{x\left(1+2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} \to 0$$

$$\text{per } x \to +\infty: \quad \frac{\overset{+\infty}{\uparrow}\ x^5-2\ \downarrow{+\infty}}{x^3+x-3} = \frac{x^5\left(1-\frac{2}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)} = \frac{\overset{+\infty}{\uparrow}\ x^2\left(1-\frac{2}{x^5}\right)\ \downarrow{1}}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)} \to +\infty$$

Gli ultimi casi sono riassunti nella seconda tabella sui limiti di quozienti:

$\mathbf{Q_2}$

$\mathbf{f(x)} \to$	$\mathbf{L>0}$ o $+\infty$	$\mathbf{L>0}$ o $+\infty$	$\mathbf{L<0}$ o $-\infty$	$\mathbf{L<0}$ o $-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ o $-\infty$
$\mathbf{g(x)} \to$	$\mathbf{0^+}$	$\mathbf{0^-}$	$\mathbf{0^+}$	$\mathbf{0^-}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ o $-\infty$
$\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} \to$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

In Arg.4 sono esposti alcuni metodi di calcolo per limiti che si presentano in una delle forme indeterminate $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Limiti di funzioni composte

Affrontiamo ora il problema di calcolare il limite di una funzione composta. Si dimostra che[3]:

Siano P, Q e L numeri reali o i simboli $+\infty$ o $-\infty$.

$$\text{Se } \begin{cases} \cdot \lim\limits_{x\to P} f(x) = Q \\ \cdot \lim\limits_{t\to Q} g(t) = L \end{cases} \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to P} g(f(x)) = L$$

[3]va aggiunta anche l'ipotesi (sempre soddisfatta se non in casi molto particolari di cui non ci occuperemo) che esista un intorno di P in cui (tranne eventualmente che in P) f non assume mai il valore Q.

Il risultato precedente si comprende meglio se si pensa a come le funzioni si compongono[4]:

$$\text{per } x \to P \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{f(\ )}{\to} & f(x) & \overset{g(\ )}{\to} & g(f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & & Q & & L \end{array}$$

In particolare se g è continua in $t_0 = \lim_{x\to P} f(x)$ allora:

$$\boxed{\lim_{x\to P} g(f(x)) = \lim_{t\to t_0} g(t) = g(t_0) = g(\lim_{x\to P} f(x))}$$

quindi se f è continua in $P = x_0$ (cioè $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ allora:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))}$$

Esempi 3.40

• Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 0^+} \log(\sin x)$. Si segue l'ordine di composizione:

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{\sin(\ )}{\to} & \sin x & \overset{\log(\ )}{\to} & \log(\sin x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0^+ & & 0^+ & & -\infty \end{array}$$

• $\lim_{x\to+\infty} \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) = -1$. Infatti

$$\text{per } x \to +\infty \qquad \begin{array}{ccccccccc} x & \overset{\frac{1}{(\ )}}{\to} & \frac{1}{x} & \overset{e^{(\ )}}{\to} & e^{\frac{1}{x}} & \overset{\cdot\pi}{\to} & \pi e^{\frac{1}{x}} & \overset{\cos(\ )}{\to} & \cos(\pi e^{\frac{1}{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & 0^+ & & 1 & & \pi & & -1 \end{array}$$

La regola precedente è utile per calcolare certi limiti mediante un "*cambio di variabile*": per calcolare $\lim_{x\to P} g(f(x))$ si può scrivere $t = f(x)$ con $t \to Q$ per $x \to P$ e calcolare $\lim_{t\to Q} g(t)$.

Limiti del tipo

$$\boxed{\lim_{x\to P} f(x)^{g(x)} \quad \text{con} \quad f(x) > 0 \text{ in un intorno di } P}$$

si possono ricondurre a limiti di prodotti, mediante la trasformazione

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}}$$

[4]Si faccia attenzione: le frecce orizzontali indicano l'applicazione delle funzioni, le frecce verticali il limite.

(nell'intorno di P) e per la continuità della funzione e^x:

$$\text{per } x \to P \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{g(\ )\cdot\log f(\ )}{\to} & g(x)\cdot\log(f(x)) & \overset{e^{(\ )}}{\to} & e^{g(x)\log(f(x))} = f(x)^{g(x)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & & \lim\limits_{x\to P} g(x)\cdot\log(f(x)) & & \lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} \end{array}$$

Nei casi in cui $g(x)\cdot\log(f(x))$ non dà una forma indeterminata, il calcolo è immediato. In particolare

Esempio 3.41 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = L$ reale diverso da 0, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to P} f(x)^L$,

come per $\lim\limits_{x\to 2} x^x = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$:

$$\text{per } x \to 2 \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{x\log x}{\to} & x\log x & \overset{e^{(\ )}}{\to} & e^{x\log x} = x^x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 2\log 2 & & e^{2\log 2} = 2^2 = 4 \end{array}$$

Esempio 3.42 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = +\infty$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = +\infty$,

come per $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = +\infty$:

$$\text{per } x \to +\infty \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{x\log x}{\to} & x\log x & \overset{e^{(\ )}}{\to} & x^x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & +\infty & & +\infty \end{array}$$

Esempio 3.43 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = 0$,

come per $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x} = 0$:

$$\text{per } x \to +\infty: \qquad \begin{array}{ccccc} x & \overset{2x\log\frac{1}{x^2}}{\to} & 2x\log\frac{1}{x^2} & \overset{e^{(\ )}}{\to} & \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & -\infty & & 0 \end{array} \qquad \left(\text{dove } \begin{array}{ccccc} \lim\limits_{x\to+\infty} & 2x & \cdot\log\frac{1}{x^2} & = & -\infty \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & +\infty & -\infty & & \end{array} \right)$$

Esempio 3.44 Se $\lim\limits_{x\to P} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to P} f(x) = 0$, allora $\lim\limits_{x\to P} f(x)^{g(x)} = +\infty$,

come per $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} = +\infty$:

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{\tan x\log(x-\frac{\pi}{2})}{\to} & \tan x\log(x-\frac{\pi}{2}) & \overset{e^{(\ )}}{\to} & \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\tan x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\pi}{2}^+ & & +\infty & & +\infty \end{array} \qquad \left(\text{dove } \begin{array}{ccccc} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} & (\tan x) & \log(x-\frac{\pi}{2}) & = & +\infty \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & -\infty & -\infty & & \end{array} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se } \lim_{x\to P} g(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to P} f(x) = \left\{\begin{array}{l} +\infty \\ 0^+ \end{array}\right. \text{ oppure } \lim_{x\to P} g(x) = \left\{\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right. \text{ e } \lim_{x\to P} f(x) = 1 \\ \\ \quad \text{per } x \to P \;\; g(x)\cdot \log(f(x)) \text{ è una forma indeterminata } 0\cdot\infty \end{array}}$$

quindi in questi casi il limite $\lim_{x\to P} f(x)^{g(x)}$ non si può determinare a priori.

Alcuni teoremi sui limiti

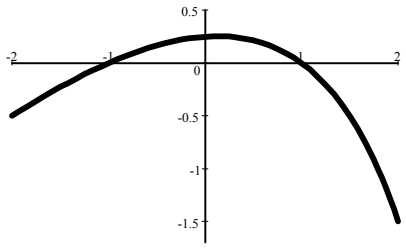
Indichiamo con P un numero reale x_0 o i simboli $+\infty$ o $-\infty$. Elenchiamo alcuni teoremi sui limiti.

Teorema 3.45 (unicità del limite) Se esiste $\lim_{x\to P} f(x)$ è unico (cioè se $\lim_{x\to P} f(x) = L$ e $\lim_{x\to P} f(x) = M$ allora $L = M$).
Segue dalla definizione di limite che:

Teorema 3.46 Dato $\lim_{x\to P} f(x) = L$, allora esiste un intorno di P dove f è

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ limitata, se } L \in \mathbb{R} \\ \\ \cdot \text{ inferiormente limitata, se } L = +\infty \\ \\ \cdot \text{ superiormente limitata, se } L = -\infty \end{array}\right.$$

Esempio 3.47 Data $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x}$, risulta $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(x^2-1)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x^2-1)}{(x-4)} = \dfrac{1}{4}$, quindi esiste un intorno di 0 (ad esempio $(-2, 2)$) in cui funzione è limitata, visto che $f(-2, 2) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$:



Teorema 3.48 (della permanenza del segno) Se $\lim_{x\to P} f(x) = L \neq 0$

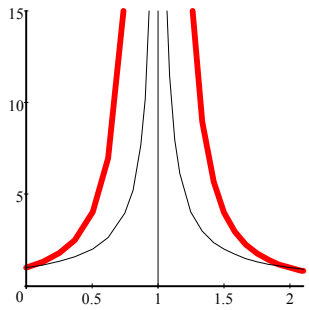
allora esiste un intorno di P in cui f è $\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ positiva, se } L > 0 \text{ o } L = +\infty \\ \\ \cdot \text{ negativa, se } L < 0 \text{ o } L = -\infty \end{array}\right.$

Esempio 3.49 Nell'esempio precedente, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x} = \dfrac{1}{4} > 0$ e f è maggiore di 0 nell'intorno $(-1, 1)$ di 0.

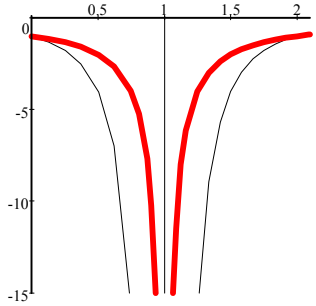
Teorema 3.50 (Criterio del confronto)

1) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di P.

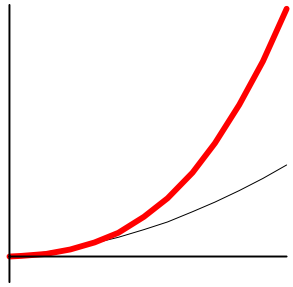
$$\begin{cases} \cdot \text{ Se } \lim_{x\to P} f(x) = +\infty, \text{ allora } \lim_{x\to P} g(x) = +\infty. \\ \cdot \text{ Se } \lim_{x\to P} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim_{x\to P} f(x) = -\infty \end{cases}$$



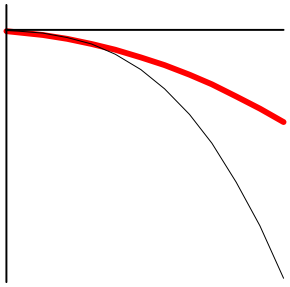
f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$



f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(1, \frac{1}{2})$



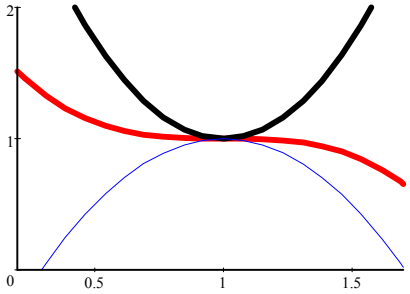
f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(+\infty)$



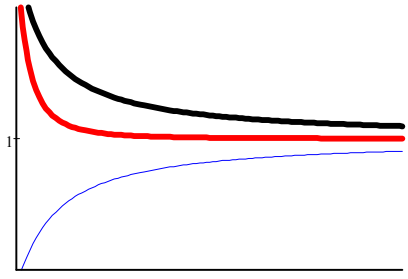
f sottile, g grossa
$f \leq g$ in $U(+\infty)$

2) Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di P.

$$\text{Se } \lim_{x\to P} f(x) = \lim_{x\to P} h(x) = L, \quad \text{allora } \lim_{x\to P} g(x) = L$$



$f$sottile, $g$rossa, $h$nera
$f \leq g \leq h$ in $U(1, \frac{1}{2})$

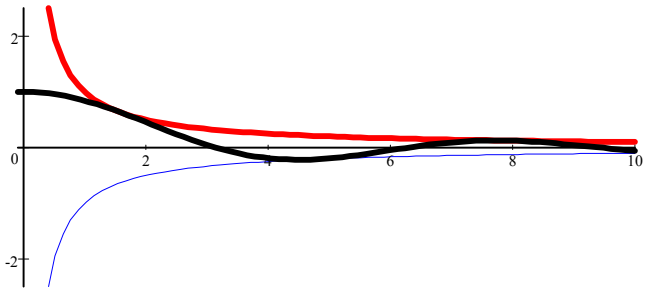


$f$sottile, g rossa, $h$nera
$f \leq g \leq h$ in $U(+\infty)$

Esempi 3.51

- Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. Il limite di $\sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste, ma.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



sottile -$\frac{1}{x}$, rossa $\frac{1}{x}$, nera $\frac{\sin x}{x}$

e $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Quindi dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty}(2x - \sin x)$. Il limite di $\sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste ma poiché

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x$$

e $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to+\infty}(2x - \sin x) = +\infty$.

- Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}}$. Il limite di $\cos\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ non esiste, ma poichè per $x \in (0, \frac{1}{e})$,

$$\frac{2}{\log x + 1} \leq \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}} \leq \frac{2}{\log x - 1}$$

e $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x + 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - 1} = 0$, dal criterio del confronto segue che $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\log x - \cos\frac{1}{x}} = 0$.

Corollario 3.52 (al teorema del confronto)
Se $\lim_{x\to P} f(x) = 0$ e g è una funzione limitata in un intorno di P, allora

$$\lim_{x\to P} f(x)g(x) = 0.$$

Esempi 3.53

- Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ si può usare il corollario: $\sin(x)$ è una funzione limitata e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} \cos x e^x = 0$, perché $\cos x$ è limitata e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Corollario 3.54

$\lim_{x\to P} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to P} |f(x)| = 0$.

Esempio 3.55

$\lim_{x\to 0} |e^x - 1| = 0 = \lim_{x\to 0}(e^x - 1)$.

Argomento 3

Esercizi

Suggerimento generale

Ex. 3.1 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 3}(x^2-2x+1)$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\arctan x\right)$

3. $\lim_{x\to+\infty}(x^3-2)$

4. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+2}{x-6}$

5. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x+5}$

6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x+2}{x+3}$

7. $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}$

8. $\lim_{x\to 0}xe^x$

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x$

10. $\lim_{x\to 0^+}(\log x-x)$

11. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log x+x^2}{\arctan x}$

12. $\lim_{x\to 0}\cos x\cdot(x^2+3)$

13. $\lim_{x\to+\infty}(2^{-x}+\arctan x-x^4)$

14. $\lim_{x\to-\infty}2^{3x+1}$

15. $\lim_{x\to 1}\left(3x+\sqrt{4x}-\log_5 x\right)$

16. $\lim_{x\to 0}(\tan x)e^x$

17. $\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}$

18. $\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}$

19. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\log_2 x}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)$

20. $\lim_{x\to 0}\log_3\left(\dfrac{1}{x^2+9e^x}\right)$

21. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{e^{2x}+4}$

22. $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-\dfrac{1}{x+2}\right)$

23. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

24. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(e+e^{-x})}{1-\frac{1}{x}}$

25. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x-1}{\log(-x)}$

26. $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\arctan x+\dfrac{1}{x}\right)$

27. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2-2}}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 3.2 Verificare se esistono i seguenti limiti e in tal caso calcolarli:

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{2x^5-5x^2}$

2. $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{3x}{x-3}$

3. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x^3}\right)^2$

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2}$

5. $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$

6. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+x}}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 3.3 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)^{x^3-1}$ **2.** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+2x}{2x^3-1}\right)^{2x^2}$ **3.** $\lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\arctan(x)}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 3.4 Calcolare i seguenti limiti, usando, se occorre, il teorema del confronto:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x-\sin x}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{5x-\cos x}$ **3.** $\lim_{x\to+\infty} x(7+3\cos x)$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 3.5 (Esercizi facoltativi di riepilogo)

1. $\lim_{x\to 1} (x^3-x+4)$ **2.** $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x+5}{x-1}$ **3.** $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\log x}{\arctan x}$

4. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$ **5.** $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x-1}$ **6.** $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{\sin(-x)}$

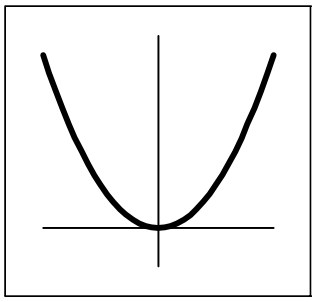
7. $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x+4}{1-e^x}}$ **8.** $\lim_{x\to 0^+} \log\left(\sqrt{\frac{x^2+3x}{x+5}}\right)$ **9.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x+3}$

10. $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^{-x}}{x^2+1}\right)$ **11.** $\lim_{x\to 0} e^{\sin x}\cos(x+\pi)$ **12.** $\lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{x^3-1}{x^{-2}+2}\right)}$

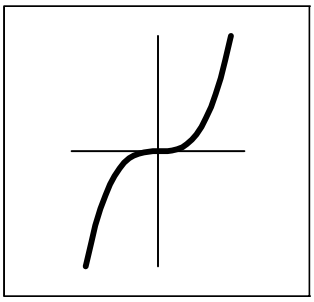
13. $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\arctan(\frac{1}{x})\right)}{e^{x-1}}$ **14.** $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3^{-x}-2}{x^3+1}}$ **15.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2+e^x}$

Argomento 3
Suggerimenti

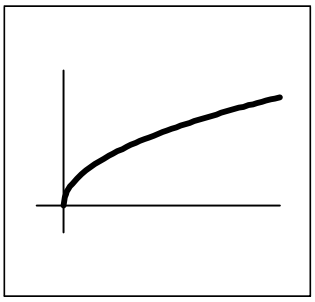
Suggerimento generale:
utilizzare i seguenti grafici per ricordare il comportamento delle funzioni elementari



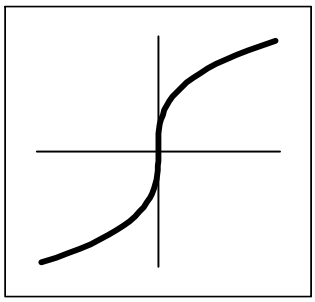
$f(x) = x^{2n}$



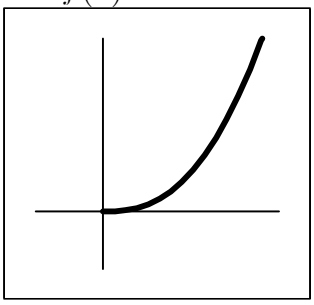
$f(x) = x^{2n+1}$



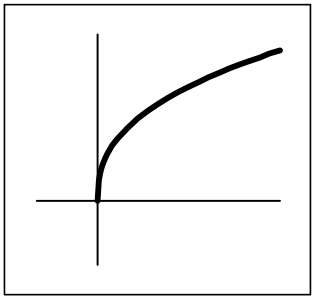
$f(x) = \sqrt[2n]{x}$



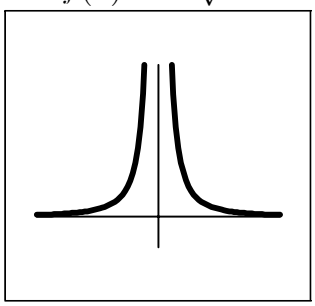
$f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$



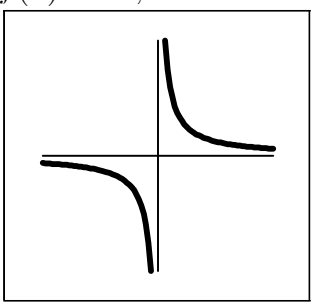
$f(x) = x^{\alpha}$, α reale > 1



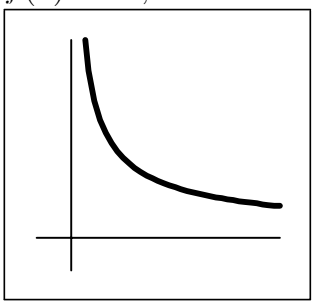
$f(x) = x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$



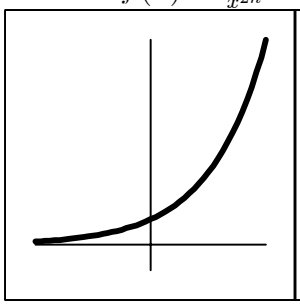
$f(x) = \frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$



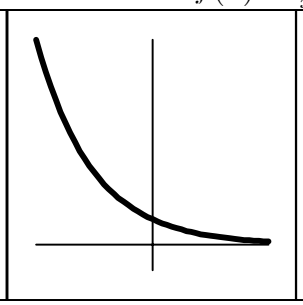
$f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} = x^{-2n-1}$



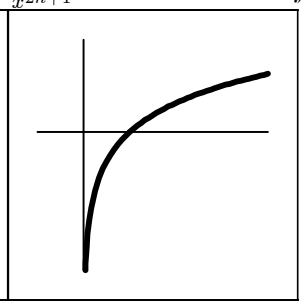
$f(x) = x^{\alpha}$, α reale < 0



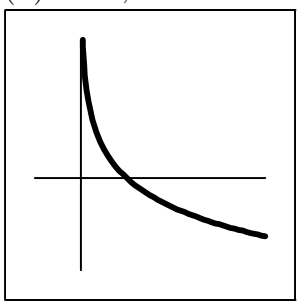
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



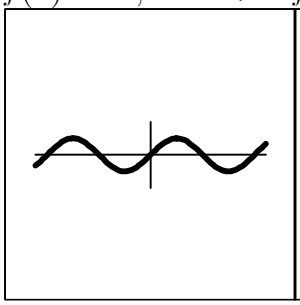
$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$



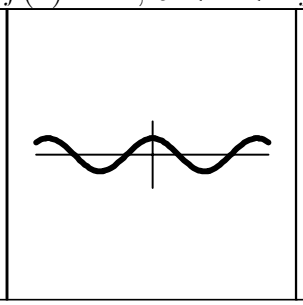
$f(x) = \log_a x$, $a > 1$



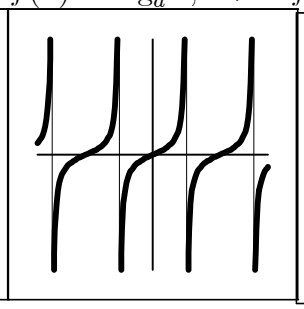
$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$



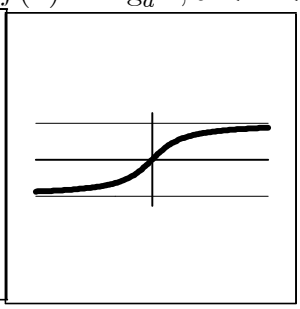
$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \tan x$



$f(x) = \arctan x$

Suggerimenti Ex. 3.1

17. Si noti che $\lim_{x\to 1^+} x-1=0^+$ quindi $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}=+\infty$.

19. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \log_2 x=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x=-\infty$ (oppure che $\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$)

21. Si noti che $\lim_{x\to-\infty} 3x+2=-\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}+4=4$.

24. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \log(e+e^{-x})=1$ e $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$.

26. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \left(\arctan x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}+0$.

27. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{1}{x}}=3^0=1$ e $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2}=+\infty$.

Suggerimenti Ex. 3.2

1. Si noti che $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x}{2x^5-5x^2}=\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x(2x^3-5)}=....$

3. Si noti che $\lim_{x\to 0} (\cos x)^2=1$ e $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}=+\infty$.

4. Si noti che $\lim_{x\to 2^+} x-2=0^+$ e $\lim_{x\to 2^-} x-2=0^-$

6. Si noti che $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^3+x}=0^-$

Suggerimenti Ex. 3.3

1. Si ricordi che $a^b=e^{b\log a}$ $(a>0)$. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} (x^3-1)\log(x^2+1)=+\infty$

2. Si noti che $\lim_{x\to 1} \log\left(\frac{x^2+2x}{2x^3-1}\right)=\log 3$ e $\lim_{x\to 1} 2x^2=2$

3. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \log(\log x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)=\frac{\pi}{2}$

Suggerimenti Ex. 3.4

1. Si noti che valgono le disugualianze $\frac{1}{2x+1}\le\frac{1}{2x-\sin x}\le\frac{1}{2x-1}$ in un intorno $U(+\infty)$ di $+\infty$ in cui tutti i denominatori sono definiti e positivi, ad esempio in $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Argomento 3
Soluzioni

Soluzioni Ex. 3.1

1. 4	**2**. 1	**3**. $+\infty$
4. 1	**5**. $+\infty$	**6**. $\frac{2}{3}$
7. 0	**8**. 0	**9**. $-\infty$
10. $-\infty$	**11**. $+\infty$	**12**. 3
13. $-\infty$	**14**. 0	**15**. 5
16. 0	**17**. $+\infty$	**18**. 0
19. $-\infty$	**20**. -2	**21**. $-\infty$
22. $-\infty$	**23**. 0	**24**. 1
25. 0	**26**. 1	**27**. 0

Soluzioni Ex. 3.2

1. non esiste	**2**. $+\infty$	**3**. $+\infty$
4. non esiste	**5**. $-\infty$	**6**. $-\infty$

Soluzioni Ex. 3.3

1. $+\infty$	**2**. 9	**3**. $+\infty$

Soluzioni Ex. 3.4

1. 0	**2**. 0	**3**. $+\infty$

Soluzioni Ex. 3.5

1.	4	**2**.	11	**3**.	$\frac{4}{\pi}$
4.	1	**5**.	non esiste	**6**.	$-\infty$
7.	$+\infty$	**8**.	$-\infty$	**9**.	0
10.	0	**11**.	-1	**12**.	$+\infty$
13.	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**14**.	1	**15**.	0

Argomento 4

Calcolo dei limiti II: forme indeterminate

Confronto tra infiniti (forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$)

Definizione 4.1 Una funzione f si dice un **infinito** per $x \to P$ se $\lim_{x\to P} f(x) = +\infty$ o $-\infty$.

Date le funzioni f e g, infiniti per $x \to P$, fare il *confronto tra infiniti* vuol dire calcolare (se esiste) il limite di un loro rapporto e dal risultato dedurre se uno prevale sull'altro o se si equivalgono.

Definizione 4.2 Se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, g si dice **infinito** di **ordine inferiore** a f per $x \to P$ e f infinito di **ordine superiore** a g per $x \to P$.[1]

Se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = k \neq 0$, f e g si dicono invece infiniti dello **stesso ordine** per $x \to P$.

Nel limite per $x \to P$ della somma e del quoziente di due infiniti di ordine diverso prevale quello di ordine superiore, cioè,

se f è un infinito di ordine **superiore** a g :

$$\boxed{\lim_{x\to P} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to P} f(x)\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to P} f(x),} \qquad \boxed{\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{|g(x)|} = +\infty \text{ o } -\infty.}$$

Confronto tra potenze x^α per $x \to +\infty$

Confrontando x^α, x^β per $x \to +\infty$, si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^{\beta-\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha > \beta \\ +\infty \text{ se } \alpha < \beta \\ 1 \text{ se } \alpha = \beta \end{cases} .$$

Perchè x^α sia un infinito per $x \to +\infty$, α deve essere > 0, quindi

per $x \to +\infty$

- x^α è un infinito di **ordine superiore** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta > 0$
- x^α è un infinito di **ordine uguale** a $x^\beta \quad \Leftrightarrow \alpha = \beta > 0$.

Perciò nel limite per $x \to +\infty$ di una somma di potenze di esponente diverso, prevale quella con esponente maggiore.

[1] Notare che, poichè f e g sono infiniti, se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x\to P} \frac{|g(x)|}{f(x)} = 0^+$ o 0^-, da cui si ha che $\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{|g(x)|} = +\infty$ o $-\infty$, che è quindi un modo equivalente per esprimere che f è infinito di **ordine superiore** a g.

Esempio 4.2

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-x^2+3) = \lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow\\ +\infty}{2x^3} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^3}\right)}_{\downarrow\\ 1} = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty.$$

Esempio 4.4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6-2x^3+1}{2x^5-x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow\\ +\infty}{\frac{3x^6}{2x^5}} \cdot \underbrace{\frac{(1-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{3x^6})}{(1-\frac{1}{2x^3}+\frac{5}{2x^5})}}_{\downarrow\\ 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6}{2x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2} = +\infty.$$

Confronto tra esponenziali a^x per $x \to +\infty$

Confrontando a^x, b^x per $x \to +\infty$, si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^x = \begin{cases} +\infty, \text{ se } a<b \\ 0, \text{ se } a>b \\ 1, \text{ se } a=b. \end{cases}$$

Perchè a^x sia un infinito per $x \to +\infty$, a deve essere > 1, quindi

per $x \to +\infty$	• a^x è un infinito di **ordine superiore** a $b^x \Leftrightarrow a > b > 1$ • a^x è un infinito di **ordine uguale** a $b^x \Leftrightarrow a = b > 1$

.

Esempio 4.5

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-5^x) = \lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow\\ -\infty}{-5^x} \left(-\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^x}_{\downarrow\\ 1}+1\right) = \lim_{x\to+\infty} -5^x = -\infty.$$

Confronto tra logaritmi $\log_a x$ per $x \to +\infty$

Confrontando $\log_a x$, $\log_b x$ per $x \to +\infty$ con $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x \log_a b}{\log_a x} = \log_a b \ (\neq 0, \text{ perchè } b \neq 1).$$

Quindi

per $x \to +\infty$	$\log_a x$ e $\log_b x$ sono infiniti dello **stesso ordine**, $\forall a, b > 0,\ a, b \neq 1$.

Esempio 4.6 $\lim_{x\to+\infty}(\log_2 x - \log_3 x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 3}\right)$
$= \lim_{x\to+\infty}\log_2 x\left(1-\frac{1}{\log_2 3}\right) = +\infty \left(\text{poiché } \log_2 3 > 1,\ \left(1-\frac{1}{\log_2 3}\right) > 0\right).$

Confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi per $x \to +\infty$

Confrontando $a^x, x^\alpha, \log_b x$ per $x \to +\infty$ con $a, b > 1$, $\alpha > 0$, si hanno i seguenti limiti (notevoli):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{a^x} = 0,$$

(per una verifica si veda Arg.6).
Quindi

per $x \to +\infty$	• a^x è un infinito di **ordine superiore** a $x^\alpha,\ \forall\ \alpha > 0, \forall\ a > 1$
	• x^α è un infinito di **ordine superiore** a $\log_b x,\ \forall\ \alpha > 0, \forall\ b > 0,\ b \neq 1$
	• a^x è un infinito di **ordine superiore** a $\log_b x,\ \forall b > 0, b \neq 1, \forall a > 1.$

Esempi 4.7

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 2^x}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x\left(1 + \dfrac{x^3}{2^x}\right)}{3^x\left(1 + \dfrac{x^2}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \log x}{x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1 + \dfrac{\log x}{x^2}\right)}{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - \sqrt{x} + 1}{3^x + \log 3x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{3^x\left(1 + \dfrac{\log 3x}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{3^x} = 0.$

Nota. Il caso $x \to -\infty$ si può trattare riportandolo al caso $t \to +\infty$ mediante il cambio di variabile $t = -x$.

Esempio 4.8 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - \log x^2}{3x^2 + 5^x} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{(-t)^3 - \log(-t)^2}{3(-t)^2 + 5^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{-t^3\left(1 + \dfrac{2\log t}{t^3}\right)}{3t^2\left(1 + \dfrac{5^{-t}}{3t^2}\right)} = -\infty.$

Confronto tra infinitesimi: (forma indeterminata $\frac{0}{0}$)

Definizione 4.9 Una funzione f si dice un **infinitesimo** per $x \to P$ se $\lim_{x\to P} f(x) = 0$.

Date le funzioni f e g, infinitesimi per $x \to P$, fare il *confronto tra infinitesimi* vuol dire calcolare, se esiste, il limite di un loro rapporto e da tale risultato dedurre se uno prevale sull'altro o se si equivalgono.

Definizione 4.10 Se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, g si dice infinitesimo di **ordine superiore** a f e f infinitesimo di **ordine inferiore** a g per $x \to P$.
Se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = k \neq 0$ f e g si dicono invece infinitesimi dello **stesso ordine** per $x \to P$.

Nel limite per $x \to P$ della somma di due infinitesimi di ordine diverso prevale quello di ordine inferiore, (o, equivalentemente, quello di ordine superiore è trascurabile) cioè,

se f è un infinitesimo di ordine **inferiore** a g :

$$\boxed{\lim_{x\to P} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to P} f(x) \left(1 + \tfrac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to P} f(x) \ .}$$

Confronto tra potenze x^α per $x \to 0^+$

Confrontando x^α, x^β per $x \to 0^+$ con $\alpha, \beta > 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha > \beta \\ +\infty \text{ se } \alpha < \beta \\ 1 \text{ se } \alpha = \beta \end{cases} .$$

Perchè x^α sia un infinitesimo per $x \to 0^+$, α deve essere > 0, quindi

per $x \to 0^+$
- x^α è un infinitesimo di **ordine superiore** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta > 0$
- x^α è un infinitesimo di **ordine uguale** a $x^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta > 0$

.

Perciò nel limite per $x \to 0^+$ di una somma di potenze di esponente diverso, prevale quella con esponente minore.

Esempio 4.11 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 2x^2}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^2} = -2.$

Si utilizza lo stesso metodo per $x \to 0^-$ quando le potenze che compaiono nel limite sono definite anche per valori negativi.

Utilizzo dell'asintotico e del trascurabile

Quanto detto finora si può esprimere utilizzando le nozioni di *asintotico* e *trascurabile.*

Definizione 4.12 La funzione f è detta un **asintotico** della funzione g per $x \to P$ se il $\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si denota con

$$\boxed{f \sim g \text{ per } x \to P}$$

Se $f \sim g$ per $x \to P$, $\lim_{x\to P} f(x) = \lim_{x\to P} g(x)$ (se tali limiti esistono).[2]

Introduciamo ora il concetto di funzione trascurabile rispetto a un'altra:

Definizione 4.13 La funzione g è detta **trascurabile** rispetto alla funzione f o un **o-piccolo** di f per $x \to P$ se il $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ e si denota con

$$\boxed{g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \to P}$$

Con il simbolo $o(f(x))$ per $x \to P$ si indica quindi una qualsiasi funzione trascurabile rispetto a f per $x \to P$.
Inoltre, se $g(x) = o(f(x))$ per $x \to P$, dato $k \neq 0$ anche $kg(x) = o(f(x))$.

$$\boxed{\text{Se } g(x) = o(f(x)) \text{ per } x \to P, \text{ allora } \lim_{x\to P} f(x) + g(x) = \lim_{x\to P} f(x) + o(f(x)) = \lim_{x\to P} f(x).}$$

Il legame tra asintotico e trascurabile segue dalle definizioni:

$$\boxed{g(x) \sim f(x) \quad \text{se e solo se} \quad g(x) = f(x) + o(f(x)) \quad \text{per } x \to P}$$

(infatti $\lim_{x\to P} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ se e solo se $\lim_{x\to P} \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} = 0$).

Utilizzando le nozione di asintotico o di trascurabile possiamo dire che:

se f è un infinito di ordine superiore o un infinitesimo di ordine inferiore a g per $x \to P$, allora

$$\boxed{g(x) = o(f(x))} \quad \text{e} \quad \boxed{f(x) + g(x) = f(x) + o(f(x)) \sim f(x)} \quad \text{per } x \to P.$$

Esempi 4.14

- Si osservi che, per $x \to 0^+$, $\left(-2x^{\frac{5}{3}} + x^4 + 3x^2\right) \sim -2x^{\frac{5}{3}}$, infatti $(x^4 + 3x^2) = o(x^{\frac{5}{3}})$.
- Per $x \to +\infty$, $(x^5 - 2e^x + 3x - \log(4x)) \sim -2e^x$, infatti $(x^5 + 3x - \log(4x)) = o(e^x)$.

Nota. Le nozione di asintotico e di trascurabile per $x \to P$ sono nozioni **locali**, che riguardano cioè il comportamento delle funzioni solo in un intorno di P. Ad esempio le funzioni x e $(x + x^2)$ sono asintotiche $(x \sim x + x^2)$ per $x \to 0$ mentre non lo sono per $x \to +\infty$, (infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+x^2} = 0$).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Nel calcolo di un limite per } x \to P \text{ di } \textbf{prodotti } f(x)\cdot h(x) \text{ e } \textbf{quozienti } \dfrac{f(x)}{h(x)},\\ \text{si può sostituire } f(x) \text{ con un asintotico } g(x) \text{ di } f(x) \text{ per } x \to P\ (^3).\end{array}}$$

Esempio 4.17 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x^5 - 2e^x + 3x - \log(4x))}{x^3 - x + 2} \overset{\text{vedi Es.4.14}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2e^x}{x^3} = -\infty.$

[2] Si noti che il simbolo $\sim$ si usa tra funzioni. Tra limiti si hanno uguaglianze quindi si usa sempre il simbolo $=$ (MAI $\lim \sim \lim$)

[3] Infatti da $\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ segue che: $\lim_{x\to P} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to P} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \cdot h(x) = \lim_{x\to P} g(x)\cdot h(x)$,
$\lim_{x\to P} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to P} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to P} \frac{g(x)}{h(x)}$.

Nel calcolo di un limite per $x \to P$ di **somme** $f(x)+h(x)$
NON si può in generale sostituire $f(x)$ con un suo asintotico.

Esempio 4.18 Consideriamo il limite: $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2-x)-x^3 = \lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. D'altra parte $(x^3+x^2-x) \sim x^3 \sim (x^3-x)$ per $x \to +\infty$: se si sostituisse x^3 al posto di (x^3+x^2-x) nell'espressione del limite si otterrebbe $\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^3) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$ e se si sostituisse (x^3-x) si otterrebbe $\lim_{x\to+\infty}(x^3-x-x^3) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$.

Se $g(x) = f(x)+o(f(x))$ per $x \to P$, nel calcolo di limiti per $x \to P$ di somme $g(x)+h(x)$ si può invece ovviamente sostituire $g(x)$ con $f(x)+o(f(x))$, anche se non sempre questo serve a risolvere il problema.

Esempio 4.19 Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)$. Poiché $\sqrt{x^2-x} = x+o(x)$ per $x \to +\infty$,
$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+o(x))+x = \lim_{x\to+\infty} 2x+o(x) \overset{2x+o(x)\sim 2x}{=} \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.
Nello stesso modo possiamo procedere per $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x+o(x)+\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x$, perchè anche $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x e quindi trascurabile rispetto a x per $x \to +\infty$.

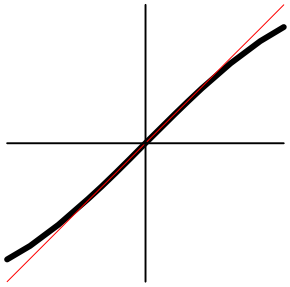
Esempio 4.20 Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$. Se cerchiamo di procedere allo stesso modo dell'esempio precedente, otteniamo: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+o(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} o(x)$, che non ci permette di calcolare il limite, in quanto la notazione $o(x)$ ci dà informazioni (di tipo qualitativo) solo quando si confronta con la funzione x per $x \to +\infty$, ma non in assoluto.
Per limiti di questo tipo, in cui compaiono radici, si ricorre al metodo della "razionalizzazione":

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{x^2-x}+x}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} \overset{\text{vedi Es. 4.19}}{=}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x+o(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Comportamento di alcune funzioni elementari per $x \to 0$.

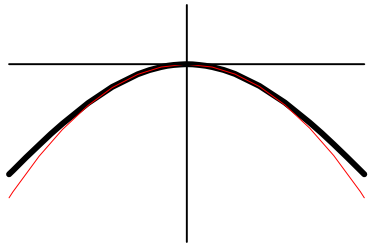
Si ha il seguente elenco di limiti **notevoli**:

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$



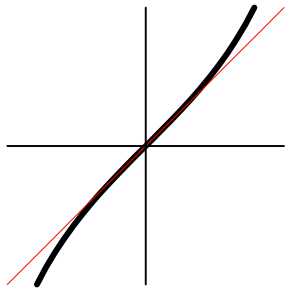
grosso: $\sin x$, sottile: x

(2) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1}$



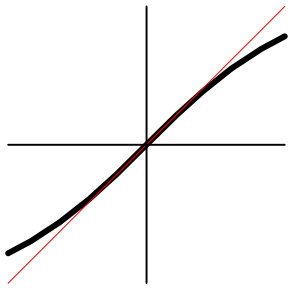
grosso: $\cos(x) - 1$, sottile:$-\frac{1}{2}\, x^2$

(3) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$



grosso: $\tan x$, sottile: x

(4) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1}$

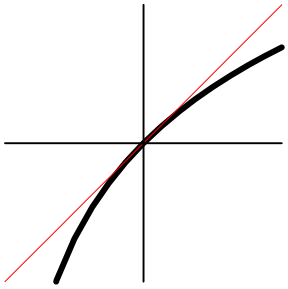


grosso: $\arctan x$, sottile: x

(5) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$

da cui

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}}$$

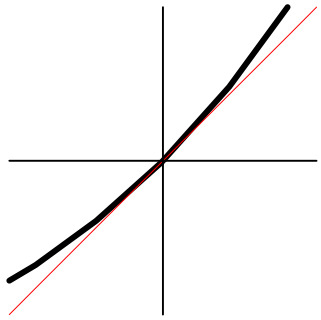


grosso: $\log(1+x)$, sottile: x

(6) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a}$

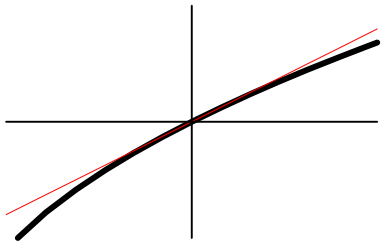
in particolare per $a=e$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$



grosso: e^x-1, sottile: x

(7) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1}$



grosso: $(1+x)^{\frac{1}{2}}-1$, sottile: $\frac{1}{2}x$

La verifica di (1), (2), (3) e (4) è mostrata nelle note 1, 2, 3 e 4. I limiti (5), (6) e (7) sono dedotti (nelle note 5, 6 e 7) dal limite notevole:

(8) $$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\\ \text{o equivalentemente, mediante il cambio di variabili } t=\frac{1}{x}\\ \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\end{array}}$$

Possiamo riscrivere i limiti notevoli precedenti utilizzando la nozione di asintotico, (o quella di trascurabile), esprimendo così il comportamento di alcuni infinitesimi per $x\to 0$, in cui compaiono funzioni elementari:

Per $x\to 0$

- $\sin x\sim x$
- $\cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$
- $\tan x\sim x$
- $\arctan x\sim x$
- $\log_a(1+x)\sim\frac{1}{\log a}x$
- $\log(1+x)\sim x$
- $a^x-1\sim x\log a$
- $e^x-1\sim x$
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

cioé

per $x\to 0$

- $\sin x=x+o(x)$
- $\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$
- $\tan x=x+o(x)$
- $\arctan x=x+o(x)$
- $\log_a(1+x)=\frac{1}{\log a}x+o(x)$
- $\log(1+x)=x+o(x)$
- $a^x-1=x\log a+o(x)$
- $e^x-1=x+o(x)$
- $(1+x)^\alpha-1=\alpha x+o(x)$

Esempio 4.21 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{(e^{x^3}-1)}$. È un quoziente: si può sostituire nel calcolo del limite un asintotico dell'intera funzione al numeratore e dell'intera funzione al denominatore. Per $x \to 0$, $\left(\sqrt{1+x}-1\right) \sim \dfrac{x}{2}$ e $(e^{x^3}-1) \sim x^3$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{e^{x^3}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = +\infty.$$

Equivalentemente si poteva sostituire le espressioni $\left(\sqrt{1+x}-1\right) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ e $(e^{x^3}-1) = x^3 + o(x^3)$, oppure ricondursi direttamente ai limiti notevoli:

Esempio 4.22 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)+x^2}{2x^3-\sin x}$. È un quoziente: si può sostituire nel calcolo del limite un asintotico dell'intera funzione al numeratore e dell'intera funzione al denominatore, ma poichè tali funzioni sono definite come somme occorre dapprima usare l'o-piccolo e ragionare caso per caso per trovarlo. Per $x \to 0$

$$\log(1+x)+x^2 = x + o(x) + x^2 = x + o(x) \sim x$$

poichè anche x^2 è trascurabile rispetto a x e, poichè $\sin x \sim x$, cioè $\sin x = x + o(x)$

$$2x^3 - \sin x = 2x^3 - x + o(x) \sim -x.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+x^2}{2x^3-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x} = -1.$$

Per le regole sul limite di una funzione composta, mediante un "cambio di variabile" dalla tabella precedente si deduce:

per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) \sim (\ )$ • $\cos(\ ) - 1 \sim -\frac{1}{2}(\ )^2$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1+(\ )) \sim (\ )$ • $e^{(\ )} - 1 \sim (\ )$ • $(1+(\ ))^\alpha - 1 \sim \alpha(\ )$	cioé	per $(\ ) \to 0$	• $\sin(\ ) = (\ ) + o((\ ))$ • $\cos(\ ) - 1 = -\frac{1}{2}(\ )^2 + o((\ )^2)$ • $\tan(\ ) \sim (\ )$ • $\arctan(\ ) \sim (\ )$ • $\log(1+(\ )) = (\ ) + o((\ ))$ • $e^{(\ )} - 1 = (\ ) + o((\ ))$ • $(1+(\ ))^\alpha - 1 = \alpha(\ ) + o((\ ))$

Esempio 4.23 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x}$. È il limite di un quoziente: posso sostituire un asintotico al numeratore.
Per $x \to 0^+$, $(x^2) \to 0^+$, quindi $1 - \cos(x^2) = -\left(\cos(x^2) - 1\right) \sim -\left(-\frac{1}{2}(x^2)^2\right) = +\frac{1}{2}x^4$, da cui:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{+\frac{1}{2}x^4}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x^3 = 0.$$

Esempio 4.24 Si vuole calcolare $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{x-1}$. È il limite di un quoziente: posso sostituire un asintotico sia al numeratore che al denominatore. Per $x \to 1$, $(x-1) \to 0$, quindi $[\cos(x-1)-1] \sim -\frac{1}{2}(x-1)^2$, perciò

$\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)}=0$ (si poteva altrimenti operare il cambio di variabile $t=x-1$).

Esempio 4.25 Si vuole calcolare $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

Per $x\to+\infty$, $\dfrac{3}{x}\to 0$ e $\dfrac{1}{x}\to 0$ quindi $\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{3}{x}\sim\dfrac{3}{x}$ e $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$, perciò:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}}=3.$$

Forma indeterminata $0\cdot\infty$

La forma indeterminata $0\cdot\infty$, che si ha per il limite del prodotto: $\lim_{x\to P} f(x)g(x)$ con $\lim_{x\to P} f(x)=0$, $\lim_{x\to P} g(x)=+\infty$ o $-\infty$, si può ricondurre alla forma $\dfrac{0}{0}$ o, quando $\lim_{x\to P} f(x)=0^+$ o 0^-, alla forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ mediante

$$\lim_{x\to P} f(x)g(x)=\lim_{x\to P}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\qquad\text{oppure}\qquad\lim_{x\to P} f(x)g(x)=\lim_{x\to P}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

oppure mediante opportuni cambi di variabile (usando le regole sul limite della funzione composta).

Esempio 4.26 Il limite notevole

$$(9)\qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\log(x^\beta)=0\qquad\text{per}\quad\alpha>0}$$

si calcola con il cambio di variabile $x=t^{-1}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\log(x^\beta)=\lim_{t\to+\infty} t^{-\alpha}\log\left(t^{-\beta}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\beta\log t}{t^\alpha}=0.$$

Esempio 4.27 $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)x^3=\lim_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\dfrac{t}{t^3}=+\infty$

Come si è visto in Arg.3, limiti del tipo $\lim_{x\to P} f(x)^{g(x)}$, con $f(x)>0$ in un intorno di P, si riconducono a limiti di prodotti, mediante la trasformazione $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log(f(x))}$ nell'intorno di P, quindi l'unica eventuale forma indeterminata a cui si perviene è quella $0\cdot\infty$:

Esempio 4.28 $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^4+x^2}\right)^x=\lim_{x\to 0} e^{x\log\left(\frac{1}{x^4+x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to 0} x\log\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\left(-x\log x^2\right)}\overset{(9)}{=}e^0=1.$

Asintoti

La proprietà di una retta di "avvicinarsi" al grafico di una funzione quando i punti del dominio o dell'immagine della funzione tendono a $+\infty$ o a $-\infty$ si traduce nella definizione di asintoto.

Definizioni 4.29

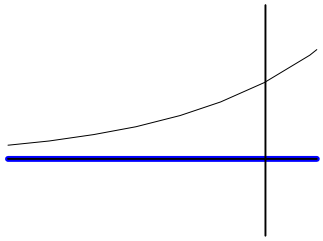
• La retta di equazione $y = a$ è **asintoto orizzontale** per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$).

• La retta di equazione $x = x_0$ è **asintoto verticale** per f se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ (o $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ o $-\infty$).

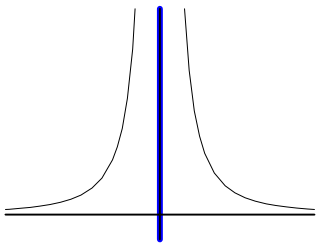
• La retta di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è **asintoto obliquo** per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \qquad (\text{o } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx - q) = 0)$$

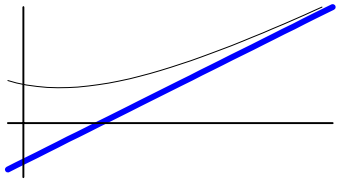
Esempi 4.30 2^x ha asintoto orizzontale $y = 0$, $\dfrac{1}{x^2}$ ha asintoto verticale $x = 0$, $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + \dfrac{1}{2}(x-1)\right]$ ha asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}(x-1)$ per $x \to +\infty$:



asintoto orizzontale $y = 0$



asintoto verticale $x = 0$



asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}(x-1)$

Esempio 4.31 La retta $y = x - 2$ è asintoto obliquo per $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ per $x \to +\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+2} - x + 2\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+4}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x+2} = 0.$

Operativamente, per determinare gli eventuali asintoti obliqui di una funzione f si usano le due condizioni date dalla seguente

Proposizione 4.32 La retta di equazione $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) se e solo se valgono contemporaneamente le due condizioni seguenti:

$$\begin{cases} (1) \quad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ (2) \quad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - mx) = q \end{cases}$$

Notiamo che la condizione (1) è equivalente a richiedere che $f \sim mx$ per $x \to +\infty$ (o $-\infty$). Il metodo per determinare gli eventuali asintoti obliqui di una funzione f è il seguente:

- se per $x \to +\infty$ (o$-\infty$), $\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = 0, +\infty, -\infty$ o non esiste
  allora f NON ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$ (o$-\infty$);
- se per $x \to +\infty$ (o $-\infty$), $\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$
  allora f PUÒ avere asintoti obliqui per $x \to +\infty$ (o $-\infty$),

ma per sapere se li ha veramente, si deve verificare se vale la condizione (2), cioè calcolare il $\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - mx)$ e vedere se esiste finito.

Esempio 4.33 Data $f(x) = x \log x$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x \log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, quindi f NON ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Esempio 4.34 Data $f(x) = \frac{x \log x + 2 \sin x}{2 \log x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x \log x + 2 \sin x}{2 \log x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \log x + 2 \sin x}{x\,(2 \log x)} = \frac{1}{2}$, quindi f potrebbe avere asintoti obliqui. Dobbiamo calcolare quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x \log x + 2 \sin x}{2 \log x} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \log x + 2 \sin x - x \log x}{2 \log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\log x} \overset{\text{Cor. 3.52}}{=} 0$$

da cui si deduce che anche la condizione (2) è soddisfatta e che $y = \frac{1}{2}x$ è asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$.

Esempio 4.35 Data $f(x) = \frac{x \log x + 2\sqrt{x}}{2 \log x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x \log x + 2\sqrt{x}}{2 \log x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + 2\frac{\sqrt{x}}{x}}{2 \log x} = \frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$,quindi f potrebbe avere asintoti obliqui. Dobbiamo calcolare quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x \log x + 2\sqrt{x}}{2 \log x} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \log x + 2\sqrt{x} - x \log x}{2 \log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty$$

da cui si deduce che la condizione (2) non è soddisfatta, perciò possiamo concludere che f non ha asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Nota 1. Dimostriamo che $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Dalla disuguaglianza:

$$(0 <) \sin x < x < \tan x \qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(che segue direttamente dall'interpretazione geometrica del seno e della tangente come esposto in Arg.2), dividendo per $\sin x$ e passando ai reciproci si ottiene

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Poichè $\lim_{x\to 0^+}\cos x = 1$, applicando il Teorema del confronto, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Per il caso $x \to 0^-$, basta operare il cambio di variabile $x = -t$: $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Nota 2: Dimostriamo che $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1$.
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(\cos x + 1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{-\frac{1}{2}x^2\,(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{-x^2}\left(\frac{2}{\cos x + 1}\right) = 1$$

Nota 3: Dimostriamo che $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$.
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(\cos x + 1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

Nota 4: Il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$ si deduce da $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ usando il cambio di variabile $x = \tan t$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\arctan(\tan t)}{\tan t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1.$$

Nota 5: Il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ si deduce da $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ usando le regole sui limiti delle funzioni composte e la continuità del logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\log(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log e = 1.$$

Nota 6: Il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = 1$ si deduce dal limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ facendo il cambio di variabile $a^x - 1 = t$ $(x = \log_a(1+t))$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\log(1+t)}{\log a}} = \lim_{t\to 0}\left[\log a\frac{1}{\dfrac{\log(1+t)}{t}}\right] = \log a.$$

Nota 7: Il limite $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1}$ si deduce dal limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ facendo il cambio di variabile $x = e^t - 1$ $(t = \log(1+x))$:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{t\to 0}\dfrac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha\,(e^t - 1)} = \lim_{t\to 0}\dfrac{\alpha t}{\alpha t} = 1$, visto che da 4, $e^{(\ )} - 1 \sim (\ )$, per $(\ ) \to 0$.

Argomento 4

Esercizi

Esercizio. 4.1 Stabilire se le seguenti funzioni sono infiniti per $x \to +\infty$ e in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = x$:

1. x^4 **2.** $1 + \sqrt{2x} + 5x^2$ **3.** $x^3 - 2e^{-x}$

4. $\sqrt{2x+1}$ **5.** $x - 2x^{\frac{5}{2}}$ **6.** $2x + 3\sqrt{x}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio. 4.2 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-2x}{3x-7}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x+5}$ **3.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3+7x+5}{9x^3+x-2}$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{e^x}$ **5.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2^x}{2x^2+3^x}$ **6.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+3^x}{3x^4+2^x}$

7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2 + 2^{-x}}{\log x^3 + 3^{-x}}$ **8.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ **9.** $\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2+x}}$

10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{1-x-3x^2}$ **11.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+\log(-x)}$ **12.** $\lim_{x\to+\infty} \log_2\left(\frac{4x^2+1}{x^2-x}\right)$

13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ **14.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+\log x}{2e^{3x}+1}$ **15.** $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

16. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ **17.** $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x}$ **18.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+4}\right)$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.3 Stabilire se le seguenti funzioni sono infinitesimi per $x \to 0^+$ e in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = x^3$:

1. x^8 **2.** $x^7 + 2x^4 - 3x^3$ **3.** $x^6 + 1$

4. $2x^3 - \sqrt{x^3} + 5x^6$ **5.** $x + x^{-3}$ **6.** $2x^3 - 2x^{\frac{11}{2}}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio. 4.4 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^4+x^2+5x}{x^5+4x^3-x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^4+2x^2}{x^7-x}$ **3.** $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{x^4+3x^3+4x}{3x^5+4x^2}}$

4. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}+2x^2+5x}{x^5-x^3-\sqrt{x}x}$ **5.** $\lim_{x\to 0^+} \log\left(\dfrac{x^4+3x^2}{x-x^7}\right)$ **6.** $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{5x^3+2x^2}{x^7-x^2}}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.5 Stabilire se le seguenti funzioni sono infinitesimi per $x \to +\infty$ ed in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = 1/x$:

1. $\dfrac{1}{x^2}$ **2.** $\dfrac{1}{x+1}$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

4. $\dfrac{x+3}{x^2-2}$ **5.** $\dfrac{x^3-x+2}{2x^2-1}$ **6.** $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-x^2+5x}{2x^3-x^2\sqrt{x}}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.6 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin x}{3x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{\tan x}$ **3.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{3\sin x}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\arctan x}$ **5.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^5+2x^4}$ **6.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\tan^2 x}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x-x^3}$ **8.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{x^2}}{x^2}$ **9.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+4x^3}{\sin x+x^2}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1-4x}{x}$ **11.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x^2-x}$ **12.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(\sqrt{x^4+1}-1)}{e^x-\cos x}$

13. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan x-x^2}{\sqrt{x}+\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$ **14.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x+3x^2}{3x}$ **15.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x}-\log(1+x)}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.7 Scrivere a quali potenze di x moltiplicate per un numero sono asintotiche le seguenti funzioni per $x \to 0^+$:

1. $\sin(x^2+x^4)$ **2.** $\log(\sqrt{x}+1)$ **3.** $\cos(x^3)-1$ **4.** $(x^3+1)^{\frac{1}{2}}-1$

5. $(e^{\sqrt{x}}-1)x^4$ **6.** $(x+1)^3-1$ **7.** $\sin^4 x$ **8.** $\arctan(x)+x^3$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.8 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \log(1+x)}{(e^x - 1)x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - 1 - x^3}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ **3.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^5 - 1}{\sin x - 2x}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{7x + \cos x}$ **5.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1 - \sin x}{\log(x+1)}$ **6.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^3 - 2x^5}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.9 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **2.** $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ **3.** $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)$

4. $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ **5.** $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(x-1)$ **6.** $\lim_{x\to-\infty} xe^x$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.10 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} \left(x + \log\dfrac{1}{x}\right)$ **2.** $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ **3.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(x)}{x-1}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio. 4.11 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty} (x)^{\frac{1}{2^x - x - 1}}$ **3.** $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

4. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\sin\sqrt[3]{x}}}$ **5.** $\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ **6.** $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \left(\dfrac{3}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}x}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.12 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x^4+x}-x\right)$$

al variare di α reale.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio. 4.13 (Esercizi facoltativi di riepilogo) Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1-x^5}{\sqrt{x^3}-x^2}$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5\log x+2}{x-e^x}$

3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+e^{3x}}{x^4+e^{2x}}$

5. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5+2^x}{2x^4+e^x}$

6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\log x^4-e^{-x}+\dfrac{1}{x}}{3\log x^3+e^{-2x}+\dfrac{2}{x^2}}$

7. $\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+1}$

8. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+5}\log(x^2+2)$

9. $\lim_{x\to0} x^5\log(x^4)$

10. $\lim_{x\to+\infty} (2^{-x}+\arctan x-x^4)$

11. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{2x^2+1-e^x}{\sqrt{x^3}-\log(1+2x)}$

12. $\lim_{x\to1}(3x+\sqrt{4x}-\log(x))$

13. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{2x^3-3x^5}{x^8+\sqrt{x^7}}$

14. $\lim_{x\to2^-} e^{\frac{x+2}{x-2}}$

15. $\lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^8+2}}{x^3}$

17. $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-2x+5}\right)$

18. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x+2}{e^{2x}+4}$

19. $\lim_{x\to-\infty} \left(2x^3-\dfrac{1}{x+2}\right)$

20. $\lim_{x\to0+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\log x}$

21. $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan(2x)+4x^5+2^x}{\sin x+x^2}$

22. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2})$

23. $\lim_{x\to0} \sqrt{\dfrac{\sin^2(2x)}{e^{x^2}-1}}$

24. $\lim_{x\to+\infty} (x^2+e^x)^{x+2}$

Soluzione

Argomento 4

Suggerimenti

Suggerimenti Ex. 4.2

1. $\dfrac{5-2x}{3x-7} = \dfrac{-2x\left(\dfrac{5}{-2x}+1\right)}{3x\left(1-\dfrac{7}{3x}\right)}$ = ...oppure, per $x \to +\infty$, $5-2x \sim -2x$ e $3x-7 \sim 3x$.

15. $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^3}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)$ = ...oppure, per $x \to +\infty$,

$\sqrt{x^3-1} = x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})$, $\sqrt{x^3-1} = x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})$, $\sqrt{x^2-x} = x+o(x)$, perciò

$\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2-x} = x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})-x+o(x) = x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}}) \sim x^{\frac{3}{2}}$,

perchè anche x e ogni $o(x)$ sono trascurabili rispetto a $x^{\frac{3}{2}}$.

16. $\sqrt{x^2+2}-x = \dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x}(\sqrt{x^2+2}+x)$ = ...

Suggerimenti Ex. 4.4

1. $\dfrac{2x^4+x^2+5x}{x^5+4x^3-x} = \dfrac{5x(\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{5}x^2+1)}{-x(-x^4-4x^2+1)}$ = ...oppure per $x \to 0$

$2x^4+x^2+5x = 5x+o(x) \sim 5x$ e $x^5+4x^3-x = -x+o(x) \sim -x$.

Suggerimenti Ex. 4.5

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2}$ = ...

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x+3}{x^2-2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}$ = ...

Suggerimenti Ex. 4.6

7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-1-4x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x+o(x)-4x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-x+o(x)}{x}$ = ...

12. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x}-\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{3}x}{\sqrt{x}-x+o(x)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{3}x}{\sqrt{x}}$, perchè, per $x \to 0^+$,

x e $o(x)$ sono trascurabili rispetto a $\sqrt{x}$.

Suggerimenti Ex. 4.7

10. Per $x \to 0^+$, $\sqrt{x} + \left(\sqrt{x+1} - 1\right) = x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x + o(x) \sim x^{\frac{1}{2}}$ perchè x e ogni $o(x)$ sono trascurabili rispetto a $x^{\frac{1}{2}}$ (infinitesimi di ordine superiore).

12. $x^2(\sqrt{x^4+1} - 1) \sim x^2 \dfrac{1}{2}x^4 \sim \dfrac{1}{2}x^6$.

Suggerimenti Ex. 4.8

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \log(1+x)}{(e^x - 1)x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - (x + o(x))}{x^2 + o(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x^2} = ...$

Suggerimenti Ex. 4.9

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = ...$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \log\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right) = (-4) \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)}{\dfrac{-4}{x^2}} = ...$

Suggerimenti Ex. 4.11

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{2x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2+1}{2x+1}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x+1}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x+1}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}.$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \sin\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1-\sin\frac{1}{x^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{\sin\frac{1}{x^2}} = ...$

Suggerimenti Ex. 4.12

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x^4+x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \sqrt[3]{x^4} = ...$

Suggerimenti Ex. 4.13

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}}(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+1-x^2)\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}} = ...$

Argomento 4
Soluzioni

Soluzioni Ex. 4.1

1. si, ordine superiore
2. si, ordine superiore
3. si, ordine superiore
4. si, ordine inferiore
5. si, ordine superiore
6. si, stesso ordine

Soluzioni Ex. 4.2

1. $-\frac{2}{3}$
2. $+\infty$
3. $\frac{4}{9}$
4. 0
5. 0
6. $\frac{1}{3}$
7. $\frac{2}{3}$
8. 2
9. 1
10. $-\frac{1}{3}$
11. -1
12. 2
13. 1
14. $\frac{1}{2}$
15. $+\infty$
16. 0
17. $\frac{1}{2}$
18. 0

Soluzioni Ex. 4.3

1. si, ordine superiore
2. si, stesso ordine
3. no
4. si, ordine inferiore
5. no
6. si, stesso ordine

Soluzioni Ex. 4.4

1. -5
2. 0
3. $+\infty$
4. $-\infty$
5. $-\infty$
6. $\frac{1}{4}$

Soluzioni Ex. 4.5

1. si, ordine superiore
2. si, stesso ordine
3. si, ordine inferiore
4. si, stesso ordine
5. no
6. si, stesso ordine

Soluzioni Ex. 4.6

1. $\frac{2}{3}$	**2**. 0	**3**. 1
4. 1	**5./6.** $+\infty$	
7. 0	**8**. -1	**9**. 1
10. -1	**11**. $-\frac{1}{2}$	**12**. 0
13. 0	**14**. $\frac{1}{3}$	**15**. 0

Soluzioni Ex. 4.7

1. x^2	**2**. $\sqrt{x}$	**3**. $-\frac{1}{2}x^6$	**4**. $\frac{1}{2}x^3$
5. $x^{\frac{9}{2}}$	**6**. $3x$	**7**. x^4	**8**. x

Soluzioni Ex. 4.8

1. non esiste	**2**. 2	**3**. -15
4. 0	**5**. $-\frac{1}{2}$	**6**. non esiste

Soluzioni Ex.4.9

1. 1	**2**. 0	**3**. -4
4. $+\infty$	**5**. 0	**6**. 0

Soluzioni Ex. 4.10

1. $+\infty$	**2**. 1	**3**. 1

Soluzioni Ex. 4.11

1. 1	**2**. 1	**3**. $e^{\frac{1}{2}}$
4. 0	**5**. e^2	**6**. e^2

Soluzioni Ex. 4.12

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x^4+x}-x\right) = \begin{cases} +\infty \text{ se } \alpha > -\dfrac{4}{3} \\ 1 \text{ se } \alpha = -\dfrac{4}{3} \\ +\infty \text{ se } \alpha < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Soluzioni Ex. 4.13

1. $+\infty$	**2**. 0	**3**. $\sqrt{2}$
4. $+\infty$	**5**. $-\infty$	**6**. $\frac{8}{9}$
7. 0	**8**. $+\infty$	**9**. 0
10. $-\infty$	**11**. $\frac{1}{2}$	**12**. 5
13. $+\infty$	**14**. 0	**15**. 0
16. $-\infty$	**17**. 0	**18**. $-\infty$
19. $-\infty$	**20**. 0	**21**. non esiste
22. 0	**23**. 2	**24**. $+\infty$

Argomento 5
Continuità e teoremi sulle funzioni continue

I. Continuità

Consideriamo un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ ed una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Per poter dare un senso alla definizione che segue, è necessario che x_0, oltre ad essere un punto del dominio di f, sia anche un punto di accumulazione per f (cioè, vd. Arg.3, che in ogni intorno di x_0 esistano punti del dominio di f diversi da x_0). Infatti, ci serve poter parlare sia del valore $f(x_0)$ che del limite di f per x che tende a x_0.

Definizione 5.1 *La funzione f è* **continua nel punto** x_0 *se accade che*

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

È utile osservare che nella scrittura $(*)$ sono contenute almeno tre informazioni:

i) la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

ii) il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito;

iii) inoltre, questo limite e il valore $f(x_0)$ coincidono.

Esempi:

5.2 La funzione $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 0$, perchè $f(0) = 0$, e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

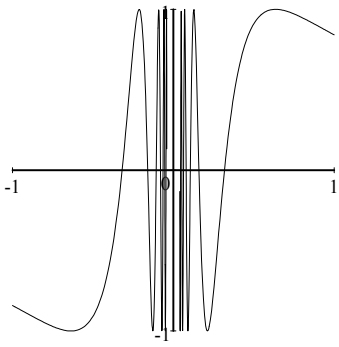
5.3 La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ non è definita per $x = 0$, e quindi non ha senso chiedersi se è continua in $x_0 = 0$.

5.4 La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè $\lim_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ non esiste.

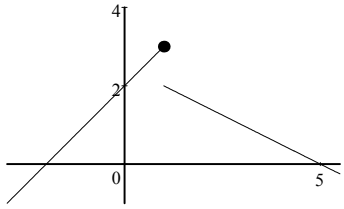
5.5 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè (vd. Arg.4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$.

È invece continua in $x_0 = 0$ la funzione $\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ che si ottiene dalla f cambiando il valore $f(0) = 0$ con il valore $\overline{f}(0) = 1$.

5.6 La funzione $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{5 - x}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 1$, perchè $\lim_{x \to 1} f(x)$ non esiste. Più precisamente, esistono sia il limite destro che quello sinistro, ma sono diversi tra loro.



Esempio 5.4



Esempio 5.6

II. Continuità **(nei punti di un intervallo)**

Nel seguito ci occupiamo solo del caso in cui l'insieme A in cui è definita la funzione f è un intervallo.

Definizione 5.7 La funzione f è **continua in** A se è continua in ogni punto di A [1].

Ad esempio, le funzioni costanti sono palesemente continue in tutti i punti di un qualsiasi intervallo A in cui noi si decida di definirle. È anche semplice vedere che questo vale anche per la funzione $f(x) = x$.

Tutti i punti di un intervallo, tranne eventualmente gli estremi, sono punti interni (vedi Arg.3), cioè sono punti dai quali è possibile spostarsi un poco, sia verso sinistra che verso destra, senza uscire da A; equivalentemente, ognuno di questi punti ammette un intorno tutto contenuto in A.

Osservazione 5.9 Quando x_0 è un punto interno all'intervallo A, le informazioni **ii) e iii)** contenute nella definizione (∗) possono essere riformulate con più precisione; se la funzione f è continua in x_0 allora:

i') la funzione f è definita nel punto x_0, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

ii') esistono, sono finiti, e sono uguali tra loro i limiti (unidirezionali) destro $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e sinistro $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$;

iii') inoltre, questi due limiti e il valore $f(x_0)$ coincidono, cioè

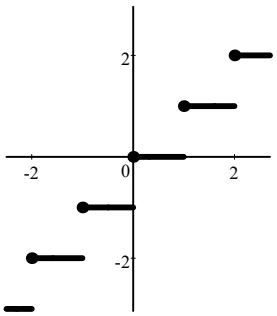
$$(**) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Osservazione 5.10 Nel caso in cui il valore $f(x_0)$ coincida con uno dei due limiti unidirezionali, ma non con l'altro (come nell'Esempio 5.6), si usa parlare di continuità unidirezionale. Più precisamente, se accade che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, si dice che in x_0 la funzione f è **continua da sinistra** (ma non da destra!). Ovviamente, per un punto x_0 interno ad A la funzione è continua se e solo se è continua sia da sinistra che da destra.

Esempio 5.11 La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte intera di x) associa ad ogni numero reale x il più grande intero che non supera x. Ad esempio, $\lfloor 51.287 \rfloor = 51$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.73 \rfloor = -3$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Se x_0 è un numero intero, ad esempio $x_0 = 4$, per x appena più piccolo di 4 la funzione vale 3, mentre per

[1] In questo caso si usa dire che f appartiene alla classe della funzioni continue in A, cioè che $f \in \mathcal{C}(A)$.

$x = 4$ e per x appena più grande di 4 abbiamo $f(x) = 4$. Così, f è continua da destra in $x_0 = 4$, ma non da sinistra. Questo discorso può essere ovviamente ripetuto per ogni altro punto a coordinata intera $x = n$, in cui $f(n) = n$. Si ottiene un grafico a gradini, composto da segmenti orizzontali che contengono l'estremo sinistro, ma non quello destro.



Esempio 5.11

Osservazione 5.12 Quando x_0 è un punto estremo appartenente all'intervallo A, i punti ii') e iii') dell'Osservazione 5.9 non hanno più senso. In questo caso si potrà parlare solo di limite sinistro (o destro), e quindi le quantità coinvolte in (**) sono solo due, e non tre.
Così, se $A = (a, x_0]$ la funzione f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ cioè se, nella notazione dell'Oss.5.10, f è continua da sinistra.

Esempio 5.13 La funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ è definita in $[-1, 1]$; poichè $f(1) = 0 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, diciamo che f è continua nel punto $x = 1$. Analogamente $f(-1) = 0 = \lim_{x \to -1^+} f(x)$, e quindi f è continua anche in $x = -1$.

Esempio 5.14 La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ristretta al solo intervallo $[0, 1]$, assume i valori

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \\ 1 & x = 1 \end{cases} .$$

Perciò, relativamente a questo intervallo f è continua in $x = 0$, ma non lo è in $x = 1$.

Osservazione 5.15 Frequentemente si incontrano situazioni in cui una funzione f è definita in un insieme del tipo $A \setminus \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$, cioè nell'intervallo (a, b) privato del punto interno x_0. Se esiste, finito, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, è possibile definire, in tutto $A = (a, b)$, una nuova funzione $\overline{f}$ come

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases} .$$

Questa funzione risulta essere continua in x_0, e viene detta **prolungamento per continuità** di f in x_0. Chiaramente, se f è continua in $A \setminus \{x_0\}$, la funzione $\overline{f}$ è continua in A.
Analogamente, se $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ e se esiste, finito, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, possiamo prolungare per continuità la f all'intervallo $(a, x_0]$.

Esempio 5.16 Le funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ f_3(x) = \frac{\sin x}{x}\ ,\ f_4(x) = \frac{x}{|x|}$$

sono tutte definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, come vedremo più avanti, sono continue in ogni $x \neq 0$. La f_3 può essere prolungata per continuità a tutto $\mathbb{R}$, come visto nell'Esempio 5.5. Per le altre questo non è possibile.

III. Operazioni sulle funzioni continue

La continuità di una funzione f in un punto x_0 può essere espressa, in modo elementare, dalla seguente affermazione:

a "piccole" variazioni della variabile x corrispondono "piccole" variazioni dei valori $f(x)$.

Questa affermazione è solo qualitativa, senza pretesa di fornire informazioni sulla relativa grandezza delle variazioni. Nella vita pratica è utilizzata di frequente, dando spesso per scontato di avere a che fare con funzioni continue. Ad esempio, dovendo farci un'idea approssimativa del valore del numero $\sqrt{101}$ tutti noi siamo portati a rispondere che non deve essere molto diverso da $\sqrt{100} = 10$. Il ragionamento, magari inconscio, che facciamo è il seguente: 101 è una "piccola" variazione da 100, e quindi le loro radici quadrate deve essere "vicine". Quel che dà validità a questo discorso è il fatto che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua nel punto $x_0 = 100$, come vedremo tra breve.
Così, conoscere un'ampia classe di funzioni ed avere informazioni sulla loro continuità può risultare utile.

- Le funzioni elementari più comunemente utilizzate

  $$f(x) = x^\alpha\ ,\ f(x) = |x|\ ,\ f(x) = \sin x\ ,\ f(x) = \cos x\ ,\ f(x) = a^x\ ,\ f(x) = \log_a x$$

  sono continue nel loro insieme di definizione.

- Se f e g sono continue nel punto x_0, lo sono anche $f+g$, $f-g$, fg, e (pur di avere $g(x_0) \neq 0$) anche $\dfrac{f}{g}$.

- Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, la funzione composta $(g \circ f)$ è continua in x_0.

- Se f è invertibile nell'intervallo A e continua in $x_0 \in A$, la funzione inversa f^{-1} è continua in $y_0 = f(x_0)$.

Esempio 5.17 Utilizzando le tre affermazioni precedenti, sono funzioni continue:

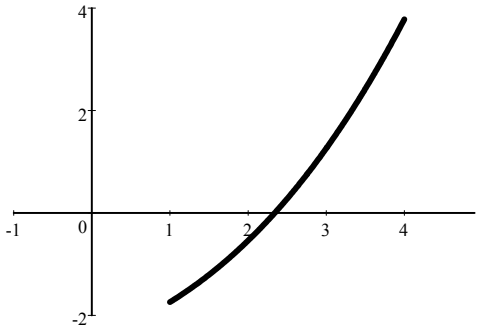
i polinomi in tutto $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan x$ per $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $f(x) = \sqrt{7 - x^2}$ per $x \in \left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$.

IV. Principali teoremi sulle funzioni continue

♦ **Teorema della permanenza del segno** *Se f è definita in un intorno U di x_0, se è continua in x_0, e se $f(x_0) > 0$, allora esiste un opportuno intorno V di x_0, $V \subset U$, in cui f assume solo valori positivi.*

Osservazione 5.18: Il teorema dice che non si arriva, in modo continuo, a valori positivi in x_0 senza un comportamento "coerente" un po' prima e un po' dopo. Ovviamente vale anche l'enunciato analogo con valori negativi, se $f(x_0) < 0$.

♦ **Teorema degli zeri** *Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, ed ha segni discordi in $x = a$ e $x = b$, allora esiste almeno un $x_0 \in (a, b)$ in cui si ha $f(x_0) = 0$.*



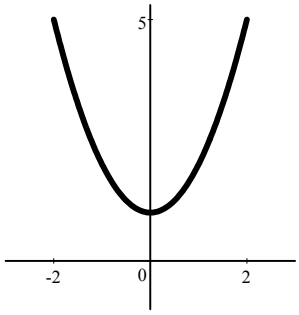
$a = 1$, $b = 4$; $f(a) < 0 < f(b)$

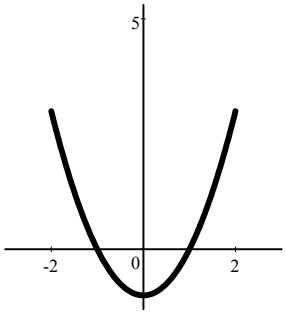
Osservazioni 5.19:

a) Non è importante sapere quale tra $f(a)$ e $f(b)$ sia positivo, l'importante è che il prodotto $f(a)f(b)$ sia negativo.

b) Il teorema non dice quante volte f si annulla in (a, b), dice solo che ciò accade almeno una volta. Ad esempio, la funzione $f(x) = \cos x$ si annulla una sola volta in $(0, \pi)$, ma tre volte in $(0, 3\pi)$.

c) Nel caso $f(a)f(b) > 0$, non è possibile affermare nulla sugli eventuali zeri di f. Ad esempio, relativamente all'intervallo $[-2, 2]$ la $f(x) = x^2+1$ soddisfa $f(-2) f(2) = 25 > 0$, ed f non si annulla mai; invece, relativamente allo stesso intervallo, la $f(x) = x^2 - 1$ soddisfa $f(-2) f(2) = 9 > 0$ ma f si annulla due volte.





Applicazioni 5.20:

a) Utilizzando questo teorema, possiamo garantire che *"Ogni polinomio f di grado dispari si annulla, in $\mathbb{R}$, almeno una volta"*. Infatti, se il termine di grado più alto ha coefficiente positivo si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e quindi esistono certamente un $a < 0$ ed un $b > 0$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.
(Nel caso in cui il coefficiente del termine di grado più alto è negativo, basta ragionare sul polinomio $-f$).

b) Un'altra conseguenza è: *"Ogni numero $\alpha > 0$ ammette, per ogni intero $n \geq 1$, almeno una radice n-sima positiva"*. Infatti, la funzione $f(x) = x^n - \alpha$ ha valore negativo in $x = 0$, e valore positivo per qualche x sufficientemente grande.
Altre considerazioni sulla monotonìa di f permettono in realtà di stabilire che questa radice n-sima è unica, denotata con il simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$.

c) Un possibile utilizzo del teorema degli zeri è legato al calcolo approssimato degli zeri di una funzione, mediante il cosiddetto "metodo di bisezione", che illustriamo con un esempio.
La funzione $f(x) = 8x^3 + 4x - 2$ si annulla almeno una volta in un punto $x_0 \in (0, 1)$, perchè $f(0) = -2 < 0 < 10 = f(1)$. Inoltre, nel punto medio dell'intervallo $(0, 1)$ si ha $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$, per cui $0 < x_0 < \frac{1}{2}$. Continuando a valutare f nei punti medi degli intervalli in cui abbiamo "intrappolato" il punto x_0 abbiamo: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{8} < 0$, per cui $\frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{64} < 0$, per cui $\frac{3}{8} < x_0 < \frac{1}{2}$; ...

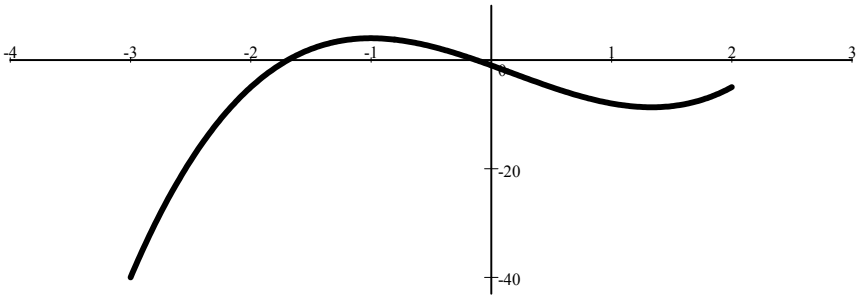
♦ **Teorema di <u>Darboux</u> (o dei <u>valori intermedi</u>)** *Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

Osservazioni 5.21:

a) Attenzione, non si sostiene che f assume <u>solo</u> i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, ma che almeno una volta <u>tutti</u> quei valori vengono assunti. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$, e l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, e quindi il teorema garantisce che tutti i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ vengono assunti da f quando x percorre l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.
Vale la pena osservare che in questo intervallo la f assume per ben tre volte i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ed assume anche tutti i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1 e tutti quelli compresi tra -1 e $-\frac{1}{2}$.

b) Una buona traduzione intuitiva di questo teorema può essere *"Una funzione continua in un intervallo non fa salti"*.

♦ **Teorema di <u>Weierstrass</u>** *Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, assume massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$.*



$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x - 1; \quad \max_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-1) = 4; \quad \min_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-3) = -40.$$

Osservazioni 5.22:

a) Una prima informazione contenuta nella tesi del teorema di Weierstrass è: *"Se f è continua in $[a,b]$, allora è limitata in $[a,b]$"*. In più, oltre ad affermare che f è limitata, il teorema è più preciso, perchè garantisce l'esistenza di almeno due punti $x_0, x_1 \in [a,b]$ per i quali si ha

$$m = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = M \qquad\qquad \forall x \in [a,b].$$

b) Per la validità del teorema di Weierstrass è fondamentale che l'intervallo di continuità di f sia chiuso e limitato come mostrato nel seguente

Esempio 5.23 La funzione $f(x) = x$ è continua e limitata in $(0,1]$, ma non assume minimo.
La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua in $[1,+\infty)$, ammette massimo ma non minimo.
La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua in $(0,1]$, assume minimo, ma non è limitata.
La funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ non è continua in $[0,1]$, ammette minimo ma non massimo.

♦ I teoremi di Weierstrass e Darboux possono essere unificati nel seguente teorema:

Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra il proprio minimo assoluto ed il proprio massimo assoluto.

V. Classificazione delle discontinuità

Un **punto di discontinuità** di f è un punto x_0 in cui f è definita, ma non è continua. Alla luce delle osservazioni contenute nel paragrafo II, possiamo dare tre diverse tipologie per questi punti. Per semplicità, ci occupiamo ancora di funzioni definite su intervalli.

♦ **Discontinuità eliminabile:**

i) Quando x_0 è un punto interno ad A, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste, è finito, ma è diverso da $f(x_0)$.
Questo significa che se ci avviciniamo ad x_0 sia da destra che da sinistra f ammette lo stesso limite, ma in x_0 il valore di f è diverso.
L'aggettivo "eliminabile" ci dice che la discontinuità può essere rimossa semplicemente cambiando il valore assunto da f in x_0, e ponendolo uguale a quello del limite. È la situazione incontrata nell'Esempio 5.5, dove la discontinuità è stata rimossa costruendo la funzione $\overline{f}$.

ii) Sono anche eliminabili quelle discontinuità situate in punti estremi di un intervallo, in cui il limite unilaterale esiste, è finito, ma diverso da $f(x_0)$.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.14, in cui la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$. Cambiando il suo valore in $f(1) = 0$ otteniamo una funzione continua nell'intervallo $[0,1]$.

♦ **Discontinuità di I specie:**

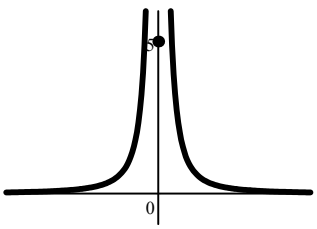
È un punto interno ad A, in cui esistono, finiti, i due limiti unidirezionali, ma sono diversi tra loro. In questo caso non c'è possibilità di eliminare la discontinuità. Possiamo solo, come nell'Oss.5.10, eventualmente avere continuità da destra o da sinistra.
È il caso della funzione dell'Esempio 5.6, che ha un punto di discontinuità di I specie in $x = 1$. Per la funzione dell'Esempio 5.11 tutti i punti ad ascissa intera sono discontinuità di I specie.

♦ **Discontinuità di II specie:**

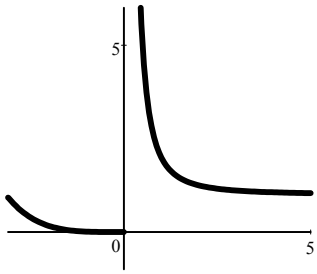
È un punto di A in cui f non è continua, e nessuno dei due casi precedenti si applica. Questo significa che: se il punto è interno ad A, almeno uno dei due limiti unidirezionali di f non esiste, oppure esiste ma non è finito; se il punto è un estremo per l'intervallo A, l'unico limite unidirezionale calcolabile non esiste, oppure esiste ma non è finito.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.4, dove non esiste nessuno dei due limiti unidirezionali in $x_0 = 0$.
Altri esempi sono:

Esempio 5.24 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non ha limite finito per $x \to 0$.

Esempio 5.25 La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha limite infinito per $x \to 0^+$.



Esempio 5.24



Esempio 5.25

Argomento 5
Esercizi

Gli esercizi contrassegnati con **(*)** possono risultare più impegnativi degli altri.

Esercizio 5.1 Determinare per quale valore del parametro reale α la funzione f è continua in tutto il proprio insieme di definizione:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha\,(x - 1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(e^x - x) + 1}{x - e^x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha(x + \alpha + 3) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + 5\alpha x^2)}{2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha^2 - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x + \frac{1}{x-2}} & \text{se } x \leq 0 \\ x^{1/(3\alpha - 5)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt[5]{2 - x}}{\log x} & \text{se } x > 0,\ x \neq 1 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.2 i) Determinare per quali valori reali m, q la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x + q & \text{se } x \leq -1 \\ mx + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

risulta continua in $\mathbb{R}$.

ii) Successivamente, determinare m e q così da avere f continua in $\mathbb{R}$ e $f(-2) = f(5)$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.3 Dimostrare che l'equazione $x^3 - 3x = 4$ ha almeno una soluzione x_0 nell'intervallo $(1, 3)$. Sapendo che questa soluzione è unica, stabilire se x_0 è maggiore o minore di 2.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.4 Sia $f(x) = x^3 - 3x$. Dopo aver calcolato $f(1)$, verificare che l'equazione

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

ha esattamente tre soluzioni reali.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.5 Riconoscere le (eventuali) discontinuità delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 10 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \log(1 + 3x) & \text{se } -\frac{1}{3} < x < 0 \\ \sqrt{x}(3 - x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{2x}{x-5} & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+5)^2} & \text{se } x < -5 \\ 3x + 1 & \text{se } -5 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{1}{\log(\sqrt{x} - 2)} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.6 Riconoscere le (eventuali) discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{se } x < 4 \\ \alpha & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.7 Disegnare il grafico, e classificare le discontinuità, della funzione "signum"

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.8 (*) Riconoscere le (eventuali) discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{se } x \leq 4 \\ \sqrt{\frac{x}{2} + 7} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.9(*) Riconoscere le discontinuità della *funzione di Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.10 (*) Determinare i punti di continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Esercizio 5.11 (*) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ e classificarne le discontinuità.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.12 (*) Dopo aver verificato che le funzioni $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = \lfloor x \rfloor$ hanno discontinuità negli stessi punti $x \in \mathbb{Z}$, verificare che la funzione composta $(g \circ f)(x) = \lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Argomento *Soluzione*

Esercizio 5.13 (*) Classificare le discontinuità della funzione $f(x) = sgn(x - \lfloor x \rfloor)$.

Argomento *Soluzione*

Argomento 5
Suggerimenti e soluzioni

Suggerimento Ex.5.3 Utilizzare il Teorema degli zeri.

Suggerimento Ex.5.4 La funzione $g(x) = x^3 - 3x + 1$ è un polinomio di III grado; inoltre $g(1) = -1 < 0 < 1 = g(0)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Poi, utilizzare il Teorema degli zeri.

Suggerimento Ex.5.9 e 5.10 Ogni $x \in \mathbb{R}$ può essere indefinitamente avvicinato sia da razionali che da irrazionali.

Sol. Ex. 5.1

1) Per $x \to 0$ abbiamo
$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{(e^x - 1) - (e^{-x} - 1)}{x} \sim \frac{(x) - (-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$
e quindi c'è continuità in $x = 0$ per $\alpha = 2$.

2) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e continua per $x \neq 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. In $x = 1$ vale 5, ed è continua da sinistra; poichè $\lim_{x\to 1^+} \alpha x^2 = \alpha$, la funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 5$.

3) La funzione è continua in ogni $x \neq 0$. Poichè $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + x^2} = 0$, c'è continuità in $x = 0$ per $\alpha = 0$.

4) Funzione continua in ogni $x \neq 1$; in $x = 1$ è continua da sinistra, e $\lim_{x\to 1^+} \alpha(x - 1) = 0 = f(1)$ per ogni valore di α, per cui f è continua in $\mathbb{R}$ per ogni valore di α.

5) Notiamo che la quantità $e^x - x$ è sempre positiva se $x < 0$, per cui $\log(e^x - x)$ è ben definito, ed il denominatore non si annulla mai. Così, l'unico possibile punto di discontinuità è $x = 0$, in cui la funzione è continua da destra e assume il valore $\alpha^2 + 3\alpha$. Poichè
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(e^x - x) + 1}{x - e^x} = \frac{\log 1 + 1}{-1} = -1 \,,$$
abbiamo continuità in $x = 0$ se $\alpha^2 + 3\alpha = -1$, cioè $\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

6) Poichè $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 5\alpha x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5\alpha x^2}{2x^2} = \frac{5\alpha}{2}$, abbiamo continuità in $x = 0$ se $\alpha^2 - 1 = \frac{5\alpha}{2}$, cioè se $\alpha = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$. Tuttavia, perchè f sia definita in tutto $\mathbb{R}$ deve essere sempre definita l'espressione $\log(1 + 5\alpha x^2)$, e quindi deve essere $\alpha \geq 0$. Così, l'unico valore accettabile per α è $\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41}$.

7) Per $x \leq 0$ l'espressione $x + \frac{1}{x-2}$ è sempre definita, mai nulla, e continua, per cui
$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \iff f \text{ continua in } x = 0 \iff \lim_{x\to 0^+} x^{1/(3\alpha-5)} = f(0) = 0 \iff \frac{1}{3\alpha - 5} > 0 \iff \alpha > \frac{5}{3} \,.$$

8) La funzione è continua in ogni $x > 0,\ x \neq 1$; ponendo $t = x-1$ abbiamo $\alpha = \lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[5]{2-x}}{\log x} = \dfrac{1}{5}$, perchè $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt[5]{1-t}}{\log(1+t)} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t/5}{t}$.

Sol. Ex. 5.2 **i)** $-3+q = -m+4$, cioè $m+q = 7$; **ii)** $\begin{cases} m+q = 7 \\ -6+q = 5m+4 \end{cases}$, da cui $m = -\dfrac{1}{2}, q = \dfrac{15}{2}$.

Sol. Ex. 5.3 $f(x) = x^3 - 3x - 4$ è continua in $[1,3]$, e ha valori di segno opposto nei punti $x = 1$ e $x = 3$. Per il teorema degli zeri, f si annulla almeno una volta in un punto $x_0 \in (1,3)$. Poichè ci viene garantito che questo punto è unico, e $f(2) < 0$, questo stesso teorema applicato all'intervallo $[2,3]$ permette di concludere che $x_0 > 2$.

Sol. Ex. 5.4 La funzione $g(x) = x^3 - 3x + 1$ è continua in $\mathbb{R}$; assume valore positivo in $x = 0$ e valore negativo in $x = 1$, per cui si annulla almeno una volta nell'intervallo $(0,1)$. Inoltre, poichè $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g si annulla almeno una volta in $(1,+\infty)$ e, in modo simile, si annulla almeno una volta in $(-\infty,0)$ perchè $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Così, g si annulla almeno 3 volte in $\mathbb{R}$; trattandosi di un polinomio di III grado, non può avere più di 3 zeri.

Sol. Ex. 5.5

1) I polinomi sono funzioni ovunque continue, per cui in ogni punto $x \neq 2$ c'è continuità. In $x = 2$ c'è anche continuità da destra, perchè l'espressione $f(x) = 10$ vale da 2 (compreso) in poi. Sempre per la continuità dei polinomi, il limite $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ può essere calcolato sostituendo $x = 2$ nell'espressione $3x^2 - 1$, ottenendo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 11 \neq 10 = f(2)$. Perciò, in $x = 2$ la f presenta una discontinuità di I specie.

2) Unica possibile discontinuità in $x = 0$. Però, $\log(1+3x) \to 0$ se $x \to 0^-$, e $\sqrt{x}(3-x) \to 0 = f(0)$ se $x \to 0^+$, per cui f è continua in tutto il suo dominio $(-\dfrac{1}{3}, +\infty)$.

3) Le tre espressioni coinvolte sono continue rispetto a x, per cui f è certamente continua per $x \neq 0$ e $x \neq 5$, ed è continua da destra in $x = 0$ e $x = 5$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0 = f(0) \ \left(= \lim_{x\to 0^+} f(x) \right)$$

per cui f è continua anche da sinistra, e quindi è continua, in $x = 0$. Invece

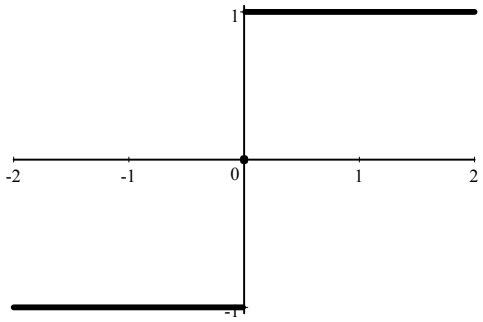
$$\lim_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5} = -\infty$$

e quindi $x = 5$ è un punto di discontinuità di II specie.

4) Discontinuità di II specie in $x = -5$, perchè $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{1}{(x+5)^2} = +\infty$. Discontinuità di I specie in $x = 4$, perchè i limiti unidirezionali esistono, sono finiti, e diversi tra loro.

Sol. Ex. 5.6 La funzione ha una discontinuità di I specie in $x = 4$, nel caso $\alpha \neq 17$; è invece continua ovunque se $\alpha = 17$.

Sol. Ex. 5.7 Discontinuità di I specie in $x = 0$.



Sol. Ex. 5.8 La funzione "parte intera" ha discontinuità di I specie in tutti i punti a coordinata intera (vd. Esempio 5.11), e questo vale perciò per tutti gli interi ≤ 3. Per $x > 4$ la f è continua. In $x = 4$ si ha

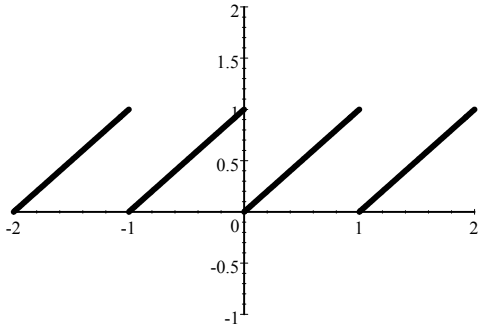
$$\lim_{x\to 4^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{\frac{x}{2} + 7} = 3 \neq 4 = f(4)$$

per cui si tratta di un punto di discontinuità eliminabile.

Sol. Ex. 5.9 Ogni $x \in \mathbb{R}$ è un punto di discontinuità di II specie.

Sol. Ex. 5.10 Per $x \to x_0$ la funzione assume infinite volte i valori x e x^3, per cui c'è continuità solo se $x_0 = x_0^3$, cioè in $x = -1,\ x = 0$ e $x = 1$.

Sol. Ex. 5.11 Discontinuità di I specie in tutti i punti a coordinata intera, in cui f è continua da destra.



Sol. Ex. 5.12 La funzioni f e g sono continue in tutti i punti a coordinata non intera, per cui lo è anche $(g \circ f)$. In $x_0 \in \mathbb{Z}$ si ha

$$(g \circ f)(x_0) = \lfloor x_0 - \lfloor x_0 \rfloor \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0 \, ,$$

mentre se x è vicino ad x_0, ma $x \neq x_0$, è

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$$

per cui $(g \circ f)(x) = \lfloor f(x) \rfloor = 0$. Così, $(g \circ f)$ è continua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Sol. Ex. 5.13 La funzione $x - \lfloor x \rfloor$ si annulla nei punti a coordinata intera, e assume valori positivi negli altri punti, per cui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} .$$

Quindi f ha discontinuità eliminabili in tutti i punti a coordinata intera.

Argomento 6

Derivate

Derivata in un punto

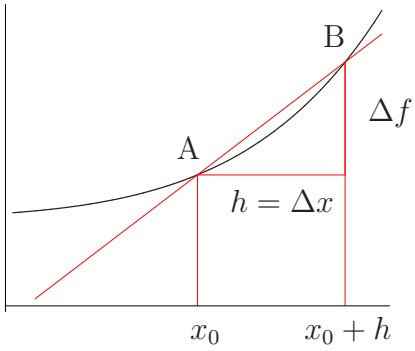
Definizione 6.1 Data una funzione f definita su un intervallo I e $x_0 \in I$, si chiama *rapporto incrementale di f in x_0* di incremento $h = x - x_0 = \Delta x$ il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

per $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x \in I$.

Da un punto di vista geometrico, il rapporto incrementale di f in x_0 di incremento $h = \Delta x$ rappresenta il coefficente angolare della retta secante il grafico di f nei due punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$(\Diamond)$



Esempio 6.2 Se $f(x) = \sin x$, il rapporto incrementale in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ di incremento $h = x - \frac{\pi}{2}$ è dato da:

$$\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(h + \frac{\pi}{2}) - 1}{h}.$$

Definizione 6.3 Una funzione f si dice *derivabile* in x_0 interno ad I se esiste <u>finito</u> il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (*)$$

In tal caso, il valore di tale limite si chiama *derivata di f in x_0* e si indica con $f'(x_0)$, oppure con $(Df)(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ quando tale limite esiste finito.}$$

Esempio 6.4 Per vedere quindi se $\sin x$ è derivabile in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ed, in tal caso, calcolarne la derivata, occorre prendere il rapporto incrementale calcolato in Es. 6.2 e calcolare il

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h + \frac{\pi}{2}) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \text{(1)} \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2}h = 0.$$

Quindi $\sin x$ è derivabile in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ e $(D\sin)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Definizione 6.5 Se esiste finito il $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tale limite si chiama *derivata destra di f in x_0* e si indica con $f'_+(x_0)$. Analogamente, se esiste finito $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tale limite si chiama *derivata sinistra di f in x_0* e si indica con $f'_-(x_0)$.

Esempio 6.6 Consideriamo la funzione $|x|$. Calcoliamo il limite destro del rapporto incrementale in 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Quindi la derivata destra di $|x|$ esiste in 0 e vale 1.

Analogamente per il limite sinistro del rapporto incrementale in 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

Quindi la derivata sinistra di $|x|$ esiste in 0 e vale -1. Allora, visto che il limite destro ed il limite sinistro del rapporto incrementale esistono, ma sono diversi, il limite completo non esiste (vedi Arg. 3) e quindi la funzione $|x|$ non è derivabile in 0. Vale in generale che

- Se x_0 è interno a I, la funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e sono coincidenti.

Se invece x_0 è l'estremo destro (sinistro) di I, si dice che la funzione f è *derivabile* in x_0 se e solo se esiste la derivata sinistra (destra), cioè la sola che si può calcolare.

Esempio 6.7 Sia $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. Il campo di esistenza di f è $[0, +\infty)$ e 0 ne è l'estremo sinistro. Allora si può vedere solo se esiste la derivata destra di f in 0, in quanto possiamo calcolare solo il

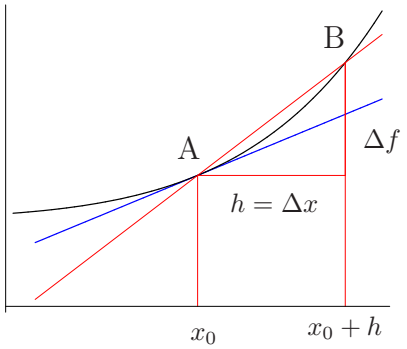
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}} - 0e^{\sqrt{0}}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}} = 1.$$

Quindi f è derivabile in 0 e la derivata vale 1.

[1] $\cos h - 1 \sim -\frac{1}{2}h^2$ per $h \to 0$, vedi Arg. 4.

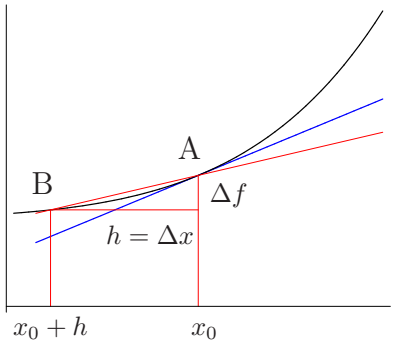
Significato geometrico della derivata

Dal punto di vista geometrico, l'esistenza della derivata di f in un punto interno x_0 comporta l'esistenza di una posizione limite di tangenza al grafico di f nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ per la retta secante (◊), quando l'incremento h tende a zero, sia da destra che da sinistra, come si può osservare animando i grafici successivi:



Caso $h > 0$

Vai all'animazione



Caso $h < 0$

Vai all'animazione

Possiamo concludere che:

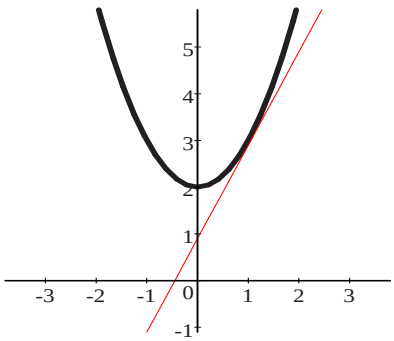
- Una funzione è derivabile in un punto interno x_0 se e solo se il suo grafico ammette *tangente non verticale* nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ e $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare di tale tangente. In tal caso l'equazione della retta tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Esempio 6.8 Consideriamo $f(x) = x^2 + 2$. f è derivabile in $x_0 = 1$ ed in tale punto ha derivata uguale a 2, in quanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2.$$

Di conseguenza il suo grafico ammette tangente non verticale nel punto $A = (1, 3)$ di equazione $y = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1$:



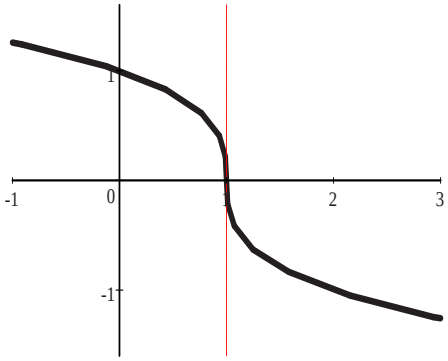
Diversa è la situazione se, per h che tende a 0, la retta secante tende a porsi in posizione verticale, in quanto per le rette verticali non è definito il coefficiente angolare:

- Una funzione f ha grafico che ammette *tangente verticale* nel punto $A = (x_0, f(x_0))$ per x_0 interno se e solo se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ o $-\infty$. In tal caso l'equazione della tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ è $\boxed{x = x_0.}$

Esempio 6.9 Consideriamo $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$. In $x_0 = 1$ si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 0}{x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t}}{-t} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = -\infty.$$

Di conseguenza il suo grafico ammette tangente verticale nel punto $A = (1, 0)$ di equazione $x = 1$, come mostra il grafico seguente:



Osservazione 6.10 Se x_0 è un estremo destro (sinistro) di I, tutto quanto detto relativamente all'esistenza di una tangente al grafico di f in $A = (x_0, f(x_0))$ si può ripetere considerando il limite sinistro (destro) del rapporto incrementale al posto di quello completo.

Funzione derivata

Definizione 6.11 Sia $A' = \{x \in E(f) |\ f \text{ è derivabile in } x\}$ l'insieme di derivabilità della funzione f. Su A' si può definire una funzione, detta *derivata di* f ed indicata con f', che associa ad ogni $x \in A'$, la derivata $f'(x)$, cioè

$$f' : A' \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x).$$

Notazione. La derivata di f si indica anche con Df o con $\dfrac{df}{dx}$.

Esempio 6.12 Data $f(x) = \sqrt{x}$, ove $E(f) = [0, +\infty)$, possiamo vedere che il suo insieme di derivabilità è $A' = (0, +\infty)$, in quanto, $\forall\ x_0 > 0$, si ha:

$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \overset{\diamond}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0}\left(\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1\right)}{h} =^{(2)} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0}\frac{1}{2}\frac{h}{x_0}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, mentre in 0 si ha che

$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$

Di conseguenza la funzione derivata di $f(x)=\sqrt{x}$ coincide con $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Derivate successive

Definizione 6.13 Sia f derivabile su A', dove risulta essere definita, come visto precedentemente, la funzione f'. Sia ora f' derivabile su $A''\subseteq A'$; su A'' si può quindi definire la derivata di f', detta *derivata seconda* di f ed indicata con f''.
Se f'' è a sua volta derivabile su A''', si può ripetere il procedimento e definire f''', *derivata terza* di f e così via, per arrivare a $f^{(n)}$, *derivata n-esima* o *derivata di ordine n di* f.

Esempio 6.14 Per $f(x)=\sqrt{x}$, abbiamo visto nell' esempio precedente che $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ è definita in $A'=(0,+\infty)$. Questa funzione è a sua volta derivabile in $A''=A'$, in quanto, se $x_0>0$, si ha:

$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x_0+h}}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}{h} = \lim_{h\to 0}-\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{2h\sqrt{(x_0+h)(x_0)}}$ (vedi $\diamond$) $= \lim_{h\to 0}-\frac{\sqrt{x_0}\frac{1}{2}\frac{h}{x_0}}{2h\sqrt{(x_0+h)(x_0)}} = -\frac{1}{4x_0\sqrt{x_0}}.$

Quindi f è derivabile 2 volte su $A''=A'$ e la sua derivata seconda coincide con $f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, come si può anche verificare più facilmente applicando le regole di derivazione delle potenze date nella sezione successiva sul calcolo delle derivate. (Si può in realtà derivare f su $A^{(n)}=A'$ n volte, con n qualunque naturale).

Calcolo di derivate

Derivate delle funzioni elementari

- Le funzioni elementari sono derivabili.

Esempio 6.15 Dimostriamo che e^x è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Sia allora $x_0\in\mathbb{R}$ e consideriamo il limite per $h\to 0$ del rapporto incrementale in x_0, nella forma $(*)$:

$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} =^{(3)} \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}h}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} = e^{x_0}.$

Quindi e^x è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ed ha derivata in x_0 uguale a e^{x_0}.

In modo analogo (tranne che per la tangente e l'arcotangente, vedi Es. 6.18 ed Es. 6.20) possiamo ottenere le derivate delle funzioni elementari.

[2] $\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1\sim\frac{1}{2}\frac{h}{x_0}$, per $h\to 0$, vedi Arg. 4.

[3] $e^h-1\sim h$, per $h\to 0$, vedi Arg. 4.

Qui sotto si riporta una tabella delle loro derivate:

f	c	x^α	e^x	a^x	$\log x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\arccos x$
f'	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \log a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \log a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Regole di derivazione

Poiché trattiamo funzioni ottenibili da funzioni elementari mediante somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa, avendo a disposizione le derivate delle funzioni elementari, per la derivazione ci basta sapere come si comporta la derivata rispetto a tali operazioni, comportamento descritto dalle cosiddette *"regole di derivazione"*. Qui sotto riportiamo una tabella riassuntiva di tali regole, supponendo che le funzioni f' e g' esistano dove richiesto.

	Regole di derivazione
Somma: $f+g$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Prodotto: $f \cdot g$	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quoziente: $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$)	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Composta: $g \circ f$	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Inversa: f^{-1}	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, dove $\begin{matrix} f'(x) \neq 0 \\ y = f(x) \end{matrix}$

Esempio 6.16 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = x^2 + \sin x$: è una somma di funzioni elementari e quindi avremo che $f'(x) = 2x + \cos x$.

Esempio 6.17 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt{x} \log x$, per $x > 0$: è un prodotto di funzioni elementari e quindi avremo che $f'(x) = (\sqrt{x})' \log x + \sqrt{x} (\log x)' = (x^{\frac{1}{2}})' \log x + (x^{\frac{1}{2}}) (\log x)' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) \log x + (x^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \log x + 1 \right)$.

Esempio 6.18 Vogliamo calcolare la derivata di $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: è un quoziente di funzioni elementari e quindi avremo che

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \quad (\spadesuit)$$

Esempio 6.19 Dobbiamo calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt[3]{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{3}}$: è una composizione di funzioni elementari e quindi prima di tutto bisogna capire da quali funzioni ed in quale ordine si ottiene la composizione:

$$x \xrightarrow{\sin(\ )} \sin x \xrightarrow{(\ )^{\frac{1}{3}}} (\sin x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sin x}.$$

Allora dovremo operare derivando in ordine inverso: prima si deriva l'ultima funzione applicata, cioè $(\ )^{\frac{1}{3}}$, e si calcola la sua derivata, che è $\frac{1}{3}(\ )^{\frac{1}{3}-1}$, in $\sin x$. Poi si moltiplica quanto ottenuto per la derivata di $\sin x$, cioè $\cos x$. Possiamo riassumere il procedimento nel seguente schema:

$$x \quad \underset{\cos(\ )}{\longleftarrow} \quad \sin x \quad \underset{\frac{1}{3}(\ )^{\frac{1}{3}-1}}{\longleftarrow} \quad (\sin x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sin x}.$$

In conclusione si ottiene: $f'(x) = \frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{1}{3}-1}\cos x = \dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

Esempio 6.20 Vogliamo calcolare la derivata dell'arcotangente, inversa della tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (vedi Arg. 2), applicando la regola di derivazione della funzione inversa:

Per $y = \tan(x)$, $D(\arctan)(y) = \dfrac{1}{D(\tan x)} \overset{(\spadesuit)}{=} \dfrac{1}{1+(\tan x)^2} = \dfrac{1}{1+y^2}$, da cui si ricava che la funzione arcotangente è derivabile su $\mathbb{R}$ e ha derivata $D(\arctan)(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Esempio 6.21 Data $f(x) = e^x + x$, invertibile sul suo insieme di definizione, in quanto (vedi Arg. 1) strettamente crescente (vedi Es. 6.35), dobbiamo calcolare la derivata della sua funzione inversa f^{-1} in 1. Applicando la regola di derivazione della funzione inversa, avremo che:

$$\text{Se } f'(x) \neq 0,\ (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)},\ \text{ove } x \text{ è tale che } f(x) = 1.$$

Dobbiamo quindi dapprima trovare l'unico valore di x tale per cui $f(x) = e^x + x = 1$. Per $x = 0$, avremo $f(0) = e^0 + 0 = 1$ e quindi è 0 il valore di x che stavamo cercando. Calcoliamo ora f', applicando la regola di derivazione di somme:

$$f'(x) = (e^x)' + (x)' = e^x + 1, \quad \text{quindi} \quad f'(0) = e^0 + 1 = 2 \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Derivabilità e continuità

(Per la nozione di continuità, si veda l'Argomento 5.)

Teorema 6.22 *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

Osservazione 6.23 Non è vero il viceversa, cioè esistono funzioni continue non derivabili. [4]

[4] Per esempio $f(x) = |x|$ e $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ in $x_0 = 0$ sono continue, ma non derivabili.

Nel caso di $|x|$, come mostrato in Es. 6.6, si ha che $f'_+(0) = 1$, mentre $f'_-(0) = -1$. (In questo caso, 0 è detto *punto angoloso*).

Nel caso di $\sqrt[3]{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$. (In questo caso, 0 è detto *punto di cuspide*).

Teorema 6.24 (Condizione sufficiente per la derivabilità di funzioni definite a tratti) *Sia f continua in x_0 e derivabile in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = c \in \mathbb{R}$,*

allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = c$.[5]

Osservazione 6.25 Questa condizione può risultare molto utile, ma attenzione a controllare tutte le ipotesi prima di applicarla: la funzione $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per} \quad x < 0 \\ x-1 & \text{per} \quad 0 \leq x \end{cases}$ è tale per cui $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$, ma non è certo derivabile in 0, in quanto in 0 non è continua!

Esempio 6.26 Sia $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{per} \quad x < 0 \\ e^x - x & \text{per} \quad 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{per} \quad x \geq 2 \end{cases}$.

Per questa funzione definita a tratti, i punti di incollamento sono 0 e 2. Poiché f è derivabile in $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ ed in $(2, +\infty)$, vorremmo sapere se è derivabile anche in 0 e 2, applicando se possibile il teorema appena dato. Prima di tutto bisogna controllare che f sia continua:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 + 1 = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - x = 1 = f(0).$$

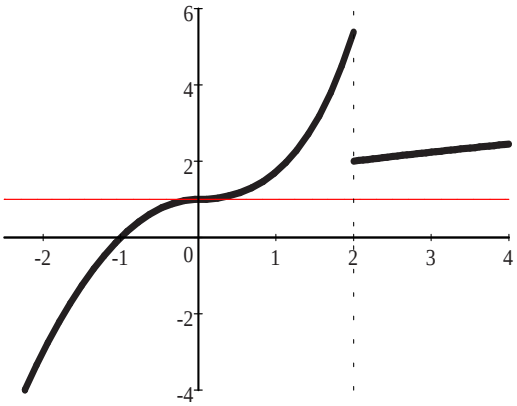
f è continua in 0, quindi possiamo applicare il teorema precedente e calcolare i limiti destro e sinistro della derivata in 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0.$$

I due limiti coincidono, di conseguenza f è derivabile anche in 0 con derivata nulla. In 2 :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} e^x - x = e^2 - 2 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x+2} = 2 = f(2).$$

Notiamo che i due limiti non coincidono, quindi f presenta in 2 un punto di discontinuità. Di conseguenza f non può essere derivabile in 2, come possiamo vedere dal grafico:



[5] Nel caso in cui f sia continua in x_0, ma derivabile solo a sinistra (o a destra) di x_0 e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = c$ (o $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = c$), allora esiste solo la derivata sinistra (o destra) di f in x_0, con $f'_-(x_0) = c$ (o $f'_+(x_0) = c$).

Teoremi su funzioni derivabili

Definizione 6.27 x_0 si dice *punto di massimo (di minimo) relativo* per una funzione f se esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 ($U^+(x_0)$ o $U^-(x_0)$ se x_0 è un estremo) in cui f sia definita e x_0 sia un punto di massimo (di minimo) per f in tale intorno, cioè :

$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))\,, \qquad$ per ogni x in $U(x_0)$ ($U^+(x_0)$ o $U^-(x_0)$ se x_0 è un estremo)

Teorema 6.28 (di Fermat)
Sia f definita in un intorno di x_0 ed x_0 sia un punto interno di massimo o minimo relativo per f. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazione 6.29 i) Non è vero il viceversa : ci sono punti non di massimo o minimo relativo per f in cui la derivata è nulla, come per esempio, l'origine per $f(x) = x^3$.

ii) Il teorema di Fermat risulta utile nel vedere se un punto x_0 di derivabilità per f non è un punto interno di massimo o minimo relativo: infatti basta controllare che la derivata $f'(x_0)$ sia $\neq 0$.

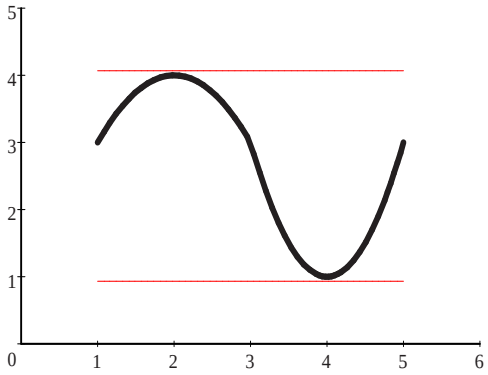
iii) Ci sono punti di massimo o minimo relativi in cui non esiste $f'(x_0)$, come, per esempio, l'origine per $f(x) = |x|$.

iv) Ci sono punti non interni di massimo o di minimo in cui la derivata (destra o sinistra) esiste ed è diversa da zero, come, per esempio, l'origine per $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x$.

Possiamo allora concludere che i punti di massimo o di minimo per f vanno ricercati tra i punti interni all'insieme di definizione di f in cui o la derivata è nulla o non esiste, oppure tra i punti non interni all'isieme di definizione di f.

Teorema 6.30 (di Rolle)
Sia f definita e continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e sia $f(a) = f(b)$.
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

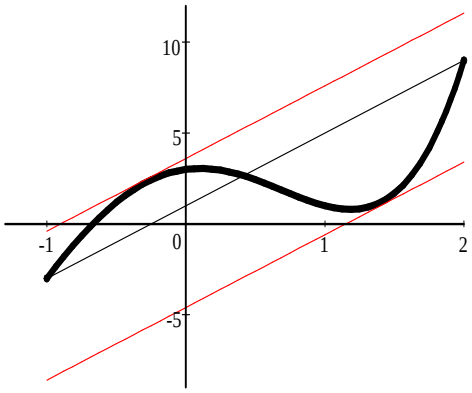
Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è orizzontale (da notare che possono esistere più punti con tale proprietà, come mostra l'esempio seguente):



$f(1) = f(5) = 3,\ f'(2) = 0,\ f'(4) = 0$

Teorema 6.31 (di Lagrange o del valor medio)
Sia f definita e continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b).
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta che unisce i punti $A = (a, f(a)), B = (b, f(b))$. Da notare che possono esistere più punti con tale proprietà (come mostra l'esempio seguente):



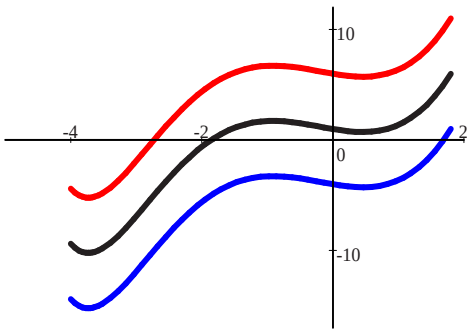
Conseguenze del Teorema di Lagrange

I - *Sia f continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b).*
Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, allora $f(x) = c, \forall x \in [a,b]$.

Questo significa che le uniche funzioni derivabili con derivata nulla in tutti i punti di un intervallo sono le funzioni costanti.

II - *Siano f e g continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b).*
Se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$, allora $g(x) = f(x) + c, \forall x \in [a,b]$.

Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che funzioni con la stessa derivata su un intervallo hanno grafici ottenibili uno dall'altro per traslazioni lungo l'asse y :



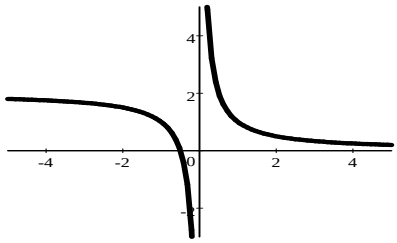
$x^3 + e^{-x}$, $x^3 + e^{-x} + 5$, $x^3 + e^{-x} - 5$

III - Relazione tra monotonia e segno della derivata su intervalli.

Sia f derivabile su I intervallo.
Se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, allora f *è strettamente crescente su* I (vedi Arg. 1.)
Se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, allora f *è strettamente decrescente su* I (vedi Arg. 1.)

Osservazione 6.32 Non è vero il viceversa.[6]

Osservazione 6.33 Questa relazione tra monotonia e segno della derivata vale su intervalli.
Per esempio $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ ha derivata sempre negativa $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ nel suo campo di esistenza, pur non essendo strettamente decrescente su di esso, in quanto $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 < f(2) = \frac{1}{2}$, ma $-1 < 2$. Il suo campo di esistenza è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, cioè l'unione di due intervalli, su ognuno dei quali (ma separatamente) la funzione è strettamente decrescente, come mostra il suo grafico :



Corollario 6.34 Se la derivata di una funzione derivabile è sempre positiva (o sempre negativa) su un intervallo I, la funzione è invertibile su I (in quanto iniettiva perché strettamente monotona).

Esempio 6.35 Verifichiamo la stretta monotonia della funzione $f(x) = e^x + x$ dell'Es. 6.21. Tale funzione è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, che è un intervallo; calcolando la sua derivata $f'(x) = e^x + 1$, che è ovviamente strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$, ricaviamo che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Esempio 6.36 Vogliamo studiare la monotonia di $f(x) = \log x + \frac{1}{x-1}$. Questa funzione è definita in $E(f) = (0,1) \cup (1, +\infty)$, quindi nell'unione di due intervalli. Poiché è derivabile nel suo campo di esistenza, possiamo avere informazioni sulla monotonia di f studiando il segno della sua derivata:

$$\frac{d}{dx}\left(\log x + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)^2} > 0 \iff x^2 - 3x + 1 > 0 \text{ in } E(f) \iff$$

$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ in $E(f)$:

	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Di conseguenza f sarà crescente in $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ed in $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, decrescente in $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$ ed in $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

[6] Infatti ci sono funzioni strettamente crescenti su intervalli con derivata non strettamente positiva, ad esempio $f(x) = x^3$ su $\mathbb{R}$. Per avere un' equivalenza bisogna rinunciare alla monotonia stretta, cioè vale che:
Sia f derivabile su I intervallo.
$f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, se e solo se f *è debolmente crescente su* I.
$f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, se e solo se f *è debolmente decrescente su* I.

Ricerca di punti interni di massimo o minimo relativo attraverso la derivata

Sia f continua in x_0 e derivabile in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.
Se $f'(x) > 0$ in (a, x_0) e $f'(x) < 0$ in (x_0, b), allora x_0 è punto di massimo relativo.
Se $f'(x) < 0$ in (a, x_0) e $f'(x) > 0$ in (x_0, b), allora x_0 è punto di minimo relativo.

Quindi se a sinistra di x_0 la derivata esiste con un certo segno, a destra di x_0 la derivata esiste con segno opposto, dopo aver controllato che f è definita e continua in x_0, si può concludere che x_0 è punto di massimo o minimo relativo, anche senza sapere nulla di $f'(x_0)$.

*Si ha un criterio analogo nel caso in cui x_0 sia **un estremo** del campo di esistenza di f :*
nel caso di estremo sinistro, se f è continua in $[x_0, b)$, derivabile con derivata positiva (negativa) in (x_0, b), x_0 è punto di minimo (massimo) relativo.
Analogamente si opera nel caso di estremo destro.

Esempio 6.37 Per la funzione $f(x) = \log x + \frac{1}{x-1}$ dell'esempio precedente, possiamo concludere che $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo e $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo.

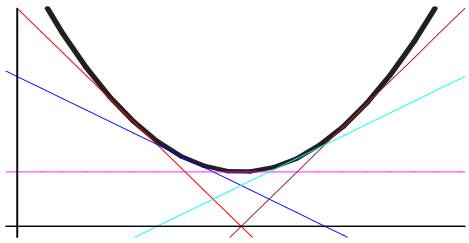
Relazione tra convessità e segno della derivata seconda su intervalli.

Dobbiamo premettere dapprima come descrivere la convessità (vedi Arg. 1) di una funzione derivabile su un intervallo attraverso il comportamento delle rette tangenti al grafico:

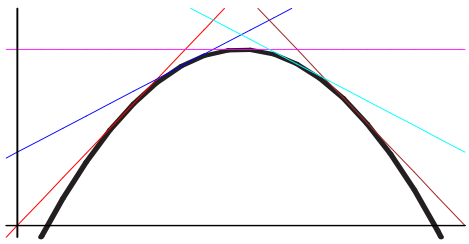
Teorema 6.38 *Sia f derivabile sull'intervallo I.*

f è strettamente convessa su I se e solo se, per ogni punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f su I, la retta tangente al grafico di f in P sta al di sotto del grafico di f.

f è strettamente concava su I se e solo se, per ogni punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f su I, la retta tangente al grafico di f in P sta al di sopra del grafico di f .



f derivabile e convessa su I



f derivabile e concava su I

Dal precedente risultato si può dedurre la seguente relazione esistente tra la convessità di una funzione derivabile su un intervallo e la monotonia della sua derivata.

Teorema 6.39 *Sia f derivabile sull'intervallo I.*

f è strettamente convessa su I se e solo se f' è strettamente crescente su I.
f è strettamente concava su I se e solo se f' è strettamente decrescente su I.

Avendo trasferito il problema della convessità di f su quello della monotonia di f', nel caso in cui f' sia a sua volta derivabile su I, possiamo applicare quanto visto prima (III) a f' ed ottenere:

Teorema 6.40 *Sia f derivabile due volte sull'intervallo I.*
Se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, allora f è strettamente convessa su I.
Se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, allora f è strettamente concava su I.

Definizione 6.41 *Sia f derivabile sull' intervallo I ed x_0 punto interno ad I. x_0 è detto* **punto di flesso** *per f se f cambia concavità in x_0, cioè se in un intorno sinistro di x_0 f è concava (convessa) ed in un intorno destro di x_0 f è convessa (concava).*

Ovviamente se f è derivabile due volte su I, x_0 punto interno ad I è punto di flesso per f se f'' cambia segno in x_0, cioè se a sinistra di x_0 è negativa (positiva), in x_0 è nulla e a destra è positiva (negativa).

Esempio 6.42 Sia $f(x) = \log x + x^2$. La funzione f ha come campo di esistenza l'intervallo $(0, +\infty)$ ed è derivabile almeno due volte, quindi possiamo cercare i suoi intervalli di convessità studiando il segno della sua derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

$$f''(x) = \frac{-1+2x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi f è concava in $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e convessa in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. f ha un flesso in $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Applicazioni al calcolo di limiti

Per le nozioni utili sui limiti, si vedano gli Argomenti 3 e 4.

Teorema 6.43 (de l'Hôpital, forme $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$)
Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo $I = (x_0, b)$ con $g'(x) \neq 0$ in I e con

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0 \quad \left(\text{caso } \frac{0}{0}\right)$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} g(x) = \pm\infty \quad \left(\text{caso } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Se $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste (finito od infinito), allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{esiste} \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazione 6.44 Il teorema precedente vale anche:

- per il calcolo del limite sinistro $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (a, x_0)$;
- per il calcolo del limite completo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, se le ipotesi valgono su $(a, x_0) \cup (x_0, b)$;

- per il calcolo del limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (a, +\infty)$;
- per il calcolo del limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se $I = (-\infty, b)$.

Osservazione 6.45 Attenzione a non applicare i teoremi di de l'Hôpital quando non sono verificate tutte le ipotesi, in particolare quando non si è di fronte a forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ (vedi [7]), o quando il limite del rapporto delle derivate non esiste (vedi [8]), in quanto ciò potrebbe portare a risultati del tutto sbagliati!

Esempio 6.46 Con il teorema di de l'Hôpital nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, possiamo anche verificare la gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$ enunciata nell'Arg. 4, pag. 3:

$\lim_{x\to+\infty} e^x/x = \lim_{x\to+\infty} e^x/1 = +\infty$, da cui si ha che e^x è un infinito di ordine superiore ad x per $x \to +\infty$.

(Notare che questo ci serve anche per risolvere il limite $\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$, in quanto con un cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, si ha che $\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} e^t/t = +\infty$).

La stessa cosa si può verificare per e^x e x^α, con $\alpha > 0$, applicando ripetutamente (se necessario) il teorema di de l'Hôpital fino ad ottenere al denominatore una potenza $x^{\alpha-k}$, con $\alpha - k \leq 0$, in modo da togliere l'indeterminazione, ottenendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}} = +\infty$. In conclusione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \text{per ogni} \quad \alpha > 0$$

Consideriamo ora $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x}$, con $\alpha > 0$. Applicando de l'Hôpital, si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$. Da questo possiamo ottenere che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log^k x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha/k}}{\log x}\right)^k = +\infty, \quad \text{per ogni} \quad \alpha > 0,\ k > 0.$$

Teorema 6.47 (di Taylor)

Sia f derivabile n volte in x_0. Si consideri il polinomio:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

[7] Consideriamo per esempio il $\lim_{x\to1^+} \frac{x}{\log x}$: se applicassimo il Teorema di de l'Hôpital in questo caso (cosa non possibile, in quanto questa NON è una forma indeterminata), otterremmo $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1/x} = 1$, mentre $\lim_{x\to1^+} \frac{x}{\log x} = +\infty$.

[8] Consideriamo per esempio il $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x}$: per applicare il Teorema di de l'Hôpital nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, dovremmo prima calcolare il limite del rapporto delle derivate, che in questo caso non esiste, essendo uguale a $\lim_{x\to+\infty} 1 + \cos x$. Questo non vuole dire che il limite di partenza non esiste, ma solo che non è risolubile con questo metodo. ($\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1$, per il Criterio del confronto (vedi Arg. 3)).

Esiste un intorno $U(x_0)$ tale che, per ogni $x \in U(x_0)$, la funzione

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, cioè (vedi Arg. 4):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \qquad \textit{o, equivalentemente,} \qquad R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right).$$

Definizione 6.48 Il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

che compare nel precedente teorema si chiama *Polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0* e l'uguaglianza

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

si chiama *Formula di Taylor di ordine n in x_0*.
Nel caso particolare $x_0 = 0$, il polinomio prende il nome di *Polinomio di Mc Laurin di ordine n* ed assume la forma:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Osservazione 6.49 Il teorema di Taylor permette di approssimare in un intorno di x_0 una funzione derivabile n volte in x_0 con un polinomio, in quanto si ha che:

$$\text{se } P_n(x) \text{ non è identicamente nullo } [9], \quad f(x) \sim P_n(x) \qquad \text{per } x \to x_0 \qquad (\otimes)$$

ed in particolare, se $f^{(\tilde{n})}(x_0)$ è la prima derivata non nulla in x_0,

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f^{(\tilde{n})}(x_0)}{\tilde{n}!}(x - x_0)^{\tilde{n}} \qquad \text{per } x \to x_0$$

(da notare che $f(x) = P_n(x)$ se e solo se f è un polinomio di grado $\leq n$.)

Di conseguenza possiamo applicare tale risultato al calcolo di limiti per $x \to x_0$.
In particolare possiamo calcolare la Formula di Taylor per le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\log(x+1)$, e^x, $(1 + x)^\alpha$ per $x \to 0$ e ottenere i seguenti sviluppi di McLaurin [10], che sono la generalizzazione di quanto mostrato nelle tabelle dei limiti notevoli in Arg. 4 ed alquanto utili per risolvere forme indeterminate nei limiti per $x \to 0$:

[9] $P_n(x)$ è identicamente nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, cioè se e solo se tutte le derivate di f fino all' ordine n sono nulle in x_0. Quindi la relazione $f(x) \sim P_n(x)$ è valida solo se esiste almeno una derivata di f di ordine minore od uguale ad n che sia non nulla in x_0.

[10] Possiamo notare nella tabella che nel polinomio di Taylor di $\sin x$ ed $\arctan x$ compaiono solo potenze dispari di x, mentre in quello di $\cos x$ compaiono solo potenze pari: questo non è un caso, visto che le prime due sono funzioni dispari, mentre il coseno è una funzione pari (vedi Arg. 1).

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad \text{per } x \to 0$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad \text{per } x \to 0$
$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}), \quad \text{per } x \to 0$
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad \text{per } x \to 0$
$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \text{per } x \to 0$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \text{per } x \to 0$

Esempio 6.50 Dobbiamo calcolare il $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x-8}+2}{x}$, che presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Il denominatore è già un polinomio di grado 1. Il numeratore è una funzione f derivabile in 0 e quindi possiamo determinare il polinomio di Mc Laurin di ordine 1 dato da $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$. Poiché $f(0) = 0$, abbiamo solo bisogno di conoscere $f'(0)$ e quindi calcoliamo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+x-8)^{-\frac{2}{3}}(2x+1), \quad \text{da cui} \quad f'(0) = \frac{1}{3}(-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$$

Quindi $P_1(x) = \dfrac{1}{12}x$ non è identicamente nullo e possiamo allora applicare la relazione (⊗) e ottenere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+x-8}+2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x}{x} = \frac{1}{12}.$$

Esempio 6.51 Ci sono casi in cui non basta fermarsi al primo ordine, proprio perchè $P_1(x)$ risulta identicamente nullo, come per $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\log(1+x)}$. Infatti, se utilizziamo lo sviluppo $\sin(x) = x + o(x)$ di Mc Laurin per $\sin(x)$ di ordine 1, otteniamo che il polinomio $P_1(x)$ di Mc Laurin del numeratore coincide con il polinomio nullo. In tali casi, occorre proseguire con gli ordini successivi, sempre che sia possibile. Abbiamo quindi bisogno del termine successivo non nullo, cioè di $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \to 0$, quindi al numeratore si ottiene :

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x = -\tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\tfrac{1}{6}x^3 \text{ per } x \to 0$$

Al denominatore possiamo usare $\log(1+x) = x + o(x) \sim x$ per $x \to 0$ ed ottenere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x\to 0} -\tfrac{1}{6}x^2 = 0.$$

Argomento 6 - Derivate

Soluzioni Esercizi

I Parte - Derivate

Sol. Ex. 6.1

1) $\frac{1}{x} - 15x^2 - 2\sin x$

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3) $10[1 + \tan^2(2x)]$

4) $2(2x + 2 - 6e^{2x}) - \cos x$

5) $\frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2}$

6) $\frac{2\log(x)}{x}$

7) $x + 2^x \log 2$

8) $x^2 - 2\frac{1}{x \log 2} + 3$

9) $x2^x(2 + x \log 2)$

10) $\frac{(2x - 4)}{\sqrt[3]{(3x^2 - 12x + 16)^2}}$

11) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

12) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\cos(\sqrt{x}))$

13) $\frac{\log(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2xe^x + x^2e^x$

14) $\frac{1}{1 - \cos x}$

15) $-\frac{1}{(2x + 1)^2}$

16) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

17) $\frac{3^x}{x^8}(x \log 3 - 7)$

18) $x^2(3\log_5 x + \frac{1}{\log 5})$

19) $\frac{-3\sqrt{x}}{2(x^3 - 5)^2}(x^3 + 5)$

20) $\frac{1 + \cos x}{x + \sin x}$

21) $\frac{2e^x(1 - x)}{(x + e^x)^2}$

22) $\frac{(1 + \tan^2 x)}{3\sqrt[3]{\tan x^2}}$

23) $\frac{6x}{x^2 + 1}\log^2(x^2 + 1)$

24) $(\log x + 1)x^x$

25) $\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

26) $-\frac{1}{2x\sqrt{\log^3 x}}$

27) $e^{\frac{x}{\log x}}\frac{\log x - 1}{\log^2 x}$

28) $(2x + 2)e^{x^2+2x} + (\log x + 1)(-\sin(x \log x))$

29) $\frac{\log^2 x + x}{(x + \log x)^2}$

30) $\frac{(2x - \sin x - x^2 - \cos x)e^x + 2x - \sin x}{(e^x + 1)^2}$

31) $\frac{5\cos x}{(1 - 3x)^2} - \frac{2x + 1}{1 - 3x}\sin x$

32) $\frac{\sin(x^2 - x + 2) + (x - 2x^2)\cos(x^2 - x + 2)}{\sin^2(x^2 - x + 2)}$

33) $\frac{x^2 + 2x - 3}{(2x^2 - 3x + 3)^2}$

34) $\frac{x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 2)(x^2 + x)}$

35) $\frac{5(\sin(\tan\sqrt{x}))^4(\cos(\tan\sqrt{x}))(1+\tan^2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

36) $(x^2 + 1)^{\log x}\left(\frac{\log(x^2 + 1)}{x} + \frac{2x \log x}{x^2 + 1}\right)$

Sol. Ex. 6.2 Per ogni funzione f, diamo l'insieme di esistenza e la funzione derivata f':

1) $x \neq \frac{1}{3}$, $\dfrac{e^{2-x}(2+3x)}{(-1+3x)^2}$ 2) $x \neq 3$, $\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$ 3) $x \neq 0$, $\ln|x|+1$

4) $x \neq 2$, $\dfrac{e^{x^2}(2x^2-4x-1)}{(x-2)^2}$ 5) $x \neq 0,-1$, $\dfrac{2x^2-5x-4}{x^3(x+1)^2}$ 6) $x \neq 1$, $\dfrac{e^{x-2}|1-x|(x-2)}{(x-1)^3}$

7) $x \neq 0,-2$, $\dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ 8) $x \geq 0$, $\dfrac{e^x}{2\sqrt{(e^x-1)}}-1$ 9) $x \neq -\frac{1}{2}$, $\dfrac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$

10) $\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x(e^{2x}+2e^x-3)}{(e^{2x}+3)(e^x+1)}$ 11) $x \neq 0$, $e^{\frac{|x-2|}{x}}\dfrac{2|x-2|}{(x-2)x^2}$ 12) $x<-2$, $x>2$, $\dfrac{4}{(x^2-4)}$

Sol. Ex. 6.3 1) $y = x+1$, 2) $x = 0$, 3) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$.

Sol. Ex. 6.4 $x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$

Sol. Ex. 6.5

1) f continua e derivabile in $\mathbf{R}$.
2) f continua in $\mathbf{R}$, derivabile in $\mathbf{R}-\{0\}$ (0 punto angoloso).
3) f continua in $\mathbf{R}$, derivabile in $\mathbf{R}-\{0\}$ (0 punto angoloso).

Sol. Ex. 6.6 $\alpha = 2$.

Sol. Ex. 6.7

f continua e derivabile in $\mathbf{R}$ se e solo e $b = a+10$. Ci sono quindi infiniti valori di a e b che soddisfano la condizione. Se $f(1) = a+8 = 2$, $a = -6$ e quindi $b = 4$. In questo caso, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Sol. Ex. 6.8

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\cos\frac{1}{x}$, limite che non esiste.

Sol. Ex. 6.9 $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$, essendo $f(0) = 1$ e $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2+1}+1$.

Sol. Ex. 6.10 $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(-2)} = \dfrac{1}{1/3} = 3$.

Sol. Ex. 6.11 La derivata di f in 2 esiste e vale $f'(2) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Sol. Ex. 6.12 **B**

Sol. Ex. 6.13 **A**

Sol. Ex. 6.14 **B**

Sol. Ex. 6.15 **D**

Sol. Ex. 6.16 **D**

Sol. Ex. 6.17 **B**

Sol. Ex. 6.18 **A**

Sol. Ex. 6.19 **D**

Sol. Ex. 6.20 **B**

Sol. Ex. 6.21 **C**

Sol. Ex. 6.22 **D**

Sol. Ex. 6.23 **D**

Sol. Ex. 6.24 **B**

Sol. Ex. 6.25 **C**

Sol. Ex. 6.26

1) $f' = 3x^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x > \frac{\sqrt{3}}{3},$

f crescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ punti di massimo: $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $f' = -2x > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,$

f crescente in $(-\infty, 0)$

f decrescente in $(0, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = 0$

3) $f' = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,\ x > \frac{1}{4},$

f crescente in $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{1}{4}$ punti di massimo: $x = 0$

4) $f' = 2\left(2x-1\right)\left(x-2\right)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x,\ x \neq 2,$

f crescente in $\left(\frac{1}{2}, 2\right), (2, +\infty)$

f decrescente in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

punti di minimo: $x = \frac{1}{2}$ punti di massimo: $x = 2$

5) $f' = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 0,\ x > 1,$

f crescente in $(-\infty, 0), (1, +\infty)$

f decrescente in $(0, 1)$

punti di minimo: $x = 1$ punti di massimo: *nessuno*

6) $f' = \frac{(2x+1)}{3\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x,\ x \neq 0, -1,$

f crescente in $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

f decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

punti di minimo: $x = -\frac{1}{2}$ punti di massimo: *nessuno*

7) $f' = -\left|x-1\right|\frac{x^2+4-2x}{\left(x-1\right)\left(x^2-4\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1,\ x \neq -2,$

f crescente in $(-\infty, -2), (-2, 1)$

f decrescente in $(1, 2), (2, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = 1$

8) $f' = \frac{17-2x-7x^2}{(x^2-3x+2)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-1-2\sqrt{30}}{7} < x < \frac{-1+2\sqrt{30}}{7},$

f crescente in $\left(\frac{-1-2\sqrt{30}}{7}, \frac{-1+2\sqrt{30}}{7}\right)$

f decrescente in $\left(-\infty, \frac{-1-2\sqrt{30}}{7}\right), \left(\frac{-1+2\sqrt{30}}{7}, 1\right), (1, 2)$

punti di minimo: $x = \frac{-1-2\sqrt{30}}{7}$ punti di massimo: $x = \frac{-1+2\sqrt{30}}{7}$

9) $f' = 2x - 2\frac{|x|}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 0,\ x > 1,$

f crescente in $(-1, 0), (1, +\infty)$

f decrescente in $(-\infty, -1), (0, 1)$

punti di minimo: $x = 1, -1$ punti di massimo: $x = 0$

10) $f' = \frac{2x^2-1}{\sqrt{(x^2-1)}} > 0 \quad \Leftrightarrow x < -1,\ x > 1$

f crescente in $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

f decrescente: mai

punti di minimo: $x = 1$ punti di massimo: $x = -1$

11) $f' = \frac{1}{2}\frac{e^{x+1}}{\sqrt{\left(\frac{e^{x+1}}{e^x+1}\right)}\left(e^x+1\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},$

f crescente in $\mathbb{R}$

f decrescente: mai

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: *nessuno*

12) $f' = \dfrac{\sqrt{(x^2+1)} - x}{\sqrt{(x^2+1)}} > 0 \quad \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},$ f crescente in $\mathbb{R}$

f decrescente: mai

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: *nessuno*

13) $f' = 2\dfrac{2\cos x - 1}{(-2+\cos x)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi,$ f crescente in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$

f decrescente in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$

punti di minimo: $x = \frac{5}{3}\pi, 2\pi$ punti di massimo: $x = 0, \frac{\pi}{3}$

14) $f' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow 0 < x < e,$ f crescente in $(0, e)$

f decrescente in $(e, +\infty)$

punti di minimo: *nessuno* punti di massimo: $x = e$

Sol. Ex. 6.27

Per verificare l'invertibilità di $f(x) = \log x - \dfrac{1}{x^3}$ sul suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, dove f è anche derivabile, basta guardare il segno della sua derivata in tale intervallo: $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^4} > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, perciò f è strettamente crescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = -1$, $(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Sol. Ex. 6.28

Per verificare l'invertibilità di $f(x) = e^x + \sqrt{2x+1}$ sul suo insieme di definizione $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ basta guardare il segno della sua derivata : $f'(x) = e^x + \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} > 0$ per $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, perciò f è strettamente crescente e quindi invertibile. Poiché $f(0) = 2$, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

Sol. Ex. 6.29

1) $f'' = 6x > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0,$ f convessa in $(0, +\infty)$

f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: $x = 0$

2) $f'' = -2 > 0$ per nessun x, f convessa mai

f concava in $\mathbb{R}$

punti di flesso: *nessuno*

3) $f'' = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3} > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0$ f convessa in $(0, +\infty)$

f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: $x = 0$

4) $f'' = 12\left(x^2 - 3x + 2\right) > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1,\ x > 2,$ f convessa in $(-\infty, 1), (2, +\infty)$; f concava in $(1, 2)$

punti di flesso: $x = 1, 2$

5) $f'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \quad \Leftrightarrow x > 0,$ f convessa in $(0, +\infty)$; f concava in $(-\infty, 0)$

punti di flesso: *nessuno*

6) $f'' = -\dfrac{2}{9}\dfrac{x^2 + x + 1}{(x^2 + x)\left(\sqrt[3]{(x^2 + x)}\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 0,$ f convessa in $(-1, 0)$; f concava in $(-\infty, -1), (0, +\infty)$

punti di flesso: $x = -1, 0$

Sol. Ex. 6.30

Applicando i teoremi di De l'Hôpital (in 6 si deve prima trasformare in forma $\frac{0}{0}$), si ottiene:

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{-1 - \frac{1}{\tan^2(x+\frac{\pi}{2})}} = -1$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty^+} \left(\dfrac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x^2}} = -\frac{1+x^2}{e^x} \right) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2}{\frac{1}{x}} = -3$ 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}}{-\sin x} = +\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{1+x^2} \right) = -1$

Sol. Ex. 6.31

1) Per il numeratore, $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$, quindi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0.$

2) Per il numeratore, $P_4(x) = \frac{1}{12}x^4$, quindi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{12}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{12}.$

3) Per il denominatore, $P_3(x) = \frac{1}{3}x^3$, quindi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{\tan x - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{\frac{1}{3}x^3} = 6.$

4) Per il numeratore, $P_1(x) = (x-1)$, per il denominatore, $P_1(x) = \frac{1}{3}(x-1)$, quindi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{\frac{1}{3}(x-1)} = 3.$

5) Per il numeratore, $P_4(x) = \frac{1}{2}x^4$, quindi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{2}.$

6) Per il numeratore, $P_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, per il denominatore, $P_1(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, quindi $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = 0.$

Argomento 6: Derivate

Esercizi

I Parte - Derivate

Ex. 6.1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1)	$\log x - 5x^3 + 2\cos x$	2)	$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x^2}$	3)	$5\tan 2x$
4)	$2(x^2 + 2x - 3e^{2x}) - \sin x$	5)	$\arctan(x^2 + 1)$	6)	$\log^2 x$
7)	$\frac{x^2}{2} + 2^x + 3$	8)	$\frac{x^3}{3} - 2\log_2 x + 3x$	9)	$x^2 2^x$
10)	$\sqrt[3]{3x^2 - 12x + 16}$	11)	$\sqrt{\sin x}$	12)	$\sin\sqrt{x}$
13)	$\sqrt{x}\log x + x^2 e^x$	14)	$\frac{\sin x}{\cos x - 1}$	15)	$\frac{3x+2}{2x+1}$
16)	$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	17)	$\frac{3^x}{x^7}$	18)	$x^3 \log_5 x$
19)	$\frac{\sqrt{x^3}}{x^3 - 5}$	20)	$\log\lvert x + \sin x\rvert$	21)	$\frac{x - e^x}{x + e^x}$
22)	$\sqrt[3]{\tan x}$	23)	$\log^3(x^2 + 1)$	24)	$x^x = e^{x\log x}$
25)	$\sqrt{4x^2 - 3}$	26)	$\frac{1}{\sqrt{\log x}}$	27)	$e^{\frac{x}{\log x}}$
28)	$e^{x^2+2x} + \cos(x\log x)$	29)	$\frac{x\log x}{x + \log x}$	30)	$\frac{x^2 + \cos x}{e^x + 1}$
31)	$\frac{2x+1}{1-3x}\cos x$	32)	$\frac{x}{\sin(x^2 - x + 2)}$	33)	$-\frac{x - 1 + \frac{2}{x}}{2x - 3 + \frac{3}{x}}$
34)	$\log\left(\frac{x^2-2}{x^2+x}\right)$	35)	$(\sin(\tan\sqrt{x}))^5$	36)	$(x^2 + 1)^{\log x}$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.2 Dopo averne determinato l'insieme di esistenza, calcolare, quando possibile, la derivata delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \dfrac{e^{2-x}}{1-3x}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-3}$ 3) $f(x) = x \log |x|$

4) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x-2}$ 5) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3+x^2}$ 6) $f(x) = \dfrac{e^{x-2}}{|1-x|}$

7) $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2+2x}$ 8) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} - x$ 9) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x+1}$

10) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^{2x}+3}{e^x+1}\right)$ 11) $f(x) = e^{\frac{|x-2|}{x}}$ 12) $f(x) = \log\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.3 Scrivere le equazioni delle rette tangenti alle seguenti curve nei punti a fianco indicati:

1) $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$ 2) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ $x_0 = 0$ 3) $f(x) = \sin x$ $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.4 Determinare le ascisse dei punti in cui la curva di equazione $y = \frac{1}{x-1}$ ha tangente parallela alla retta $y = -4x$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.5 Si studi la derivabilità e la continuità delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos x & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^2} & \text{per} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{(x+1)} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per} \quad x < 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.6 Per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \alpha\,(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risulta derivabile in $\mathbb{R}$?

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.7 Determinare a, b tali che

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 6 & \text{per} \quad x \leq 1 \\ -3x^2 + bx + 1 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Quante soluzioni ci sono? Quante con la condizione $f(1) = 2$? In quest'ultimo caso, se f^{-1} è l'inversa di f in un intorno di $x = 1$, calcolare la derivata di f^{-1} in $y = 2$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.8 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases},$$

calcolarne la derivata in $x = 0$ mediante il limite del rapporto incrementale.
Calcolare poi $\lim_{x \to 0} f'(x)$. È uguale a $f'(0)$?

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.9 Data la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + \arctan x + x$, calcolare la derivata dell'inversa f^{-1} in $y = 1$. Se $z = g(y)$ è derivabile in $y = 1$ con $g'(1) = \frac{3}{2}$, posto $h(x) = g(f(x))$, quanto vale $h'(0)$?

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.10 Data una funzione f derivabile ed invertibile su $\mathbb{R}$ tale che $f(-2) = -5$ e $f'(-2) = 1/3$, calcolare la derivata dell'inversa f^{-1} in $y = -5$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.11 Data f invertibile su $\mathbb{R}$, sapendo che $(f^{-1})'(1) = 4$ e $f(2) = 1$, cosa possiamo dire sulla derivata di f in 2?

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.12 La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x(3x - 4)$ nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione:

A. $y = e(x - 2)$; B. $y = e(2x - 3)$; C. $y = e(x - 1)$; D. $y = 2e(x - 1)$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.13 La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x(x^2 - 1)$ nel punto di ascissa $x = 2$ ha equazione:

A. $y = e^2(7x - 11)$; B. $y = 7e^2(x - 2)$; C. $y = e^2(7x + 3)$; D. $y = 7e^2x$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.14 Siano $f(x) = \log(x+3)$ e $g(x) = e^x - 2$ e sia $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x = 0$ è:

A. $y = \frac{1}{2}x$; B. $y = \frac{1}{2}x + \log 2$; C. $y = \frac{1}{3}x$; D. $y = \frac{1}{3}x + \log 3$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.15 La funzione $f(x) = \begin{cases} 3x^2(e^x - 2) & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 + 3x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è

A. continua e derivabile in $\mathbb{R}$
B. nè continua nè derivabile in $x = 0$
C. derivabile, ma non continua in $x = 0$
D. continua su $\mathbb{R}$, ma non derivabile in $x = 0$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.16 La funzione $f(x) = |x|e^x$ è:

A. continua e derivabile in $\mathbb{R}$
B. nè continua nè derivabile in $x = 0$
C. derivabile, ma non continua in $x = 0$
D. continua su $\mathbb{R}$, ma non derivabile in $x = 0$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.17 Sia $f(x) = \dfrac{x \log(1+x^2)}{e^{\sqrt{x}}}$. Allora $f'(1)$ vale:

A. $\dfrac{\log 2 - 1}{e}$; B. $\dfrac{\log \sqrt{2} + 1}{e}$; C. $\dfrac{\log 2 + 1}{e}$ D. $\dfrac{\log \sqrt{2} - 1}{2}$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.18 Sia data la funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{5 + 6x + 3x^2}{x+1}\right)$.

Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

A. $y = \log 5 + \frac{1}{5}x$; B. $y = \log 5 - \frac{1}{5}x$; C. $y = \log 5 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$; D. $y = \log 5 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.19 Sia g una funzione derivabile e tale che $g(0) = 4$ e $g'(0) = 3$ e sia $f(x) = \log^2(1+x)$. Allora $(f \circ g)'(0)$ vale

A. $\frac{12}{5}\log^2 5$; B. $\frac{6}{5}\log^2 5$; C. $\frac{12}{5}\log 5$; D. $\frac{6}{5}\log 5$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.20 Siano $f(x) = e^{1/x}$, $g(x) = x - x^2$ e $F(x) = (f \circ g)(x)$. Allora $F'(2)$ vale:

A. $\dfrac{3\sqrt{e}}{4}$; B. $\dfrac{3}{4\sqrt{e}}$; C. $\dfrac{3\sqrt{e}}{2}$; D. $\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.21 Determinare per quali valori del parametro reale k il grafico della funzione di equazione $f(x) = -kx^2 + k^2x - 1$ è tangente alla retta $y = 3x - 2$ nel punto di coordinate $(1, 1)$.

A. $k = -1, 3$; B. $k = 3$; C. $k = -1$; D. Per nessun valore di k.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.22 Siano $f(x) = \log(1 + x)$, $g(x)$=cos$(x + 2)$ e $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Allora $F'(0)$ vale:

A. $\sin 2$; B. $-\sin 2$; C. $\dfrac{\sin 2}{1 + \cos 2}$; D. $-\dfrac{\sin 2}{1 + \cos 2}$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.23 Siano $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = 2 - x^2$.

Se $F(x) = (f \circ g)(x)$, allora $F'(2)$ vale:

A. -4; B. -2; C. 2; D. 4.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.24 Si considerino le funzioni $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 6x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

e sia $F(x)$ la funzione composta $(f \circ g)(x) = F(x)$. Allora $F'(2)$ vale:

A. 14; B. 18; C. -14; D. -18.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.25 Su tutto $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 2x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ \log(2 + x) + x^3 + x & \text{se } x > -1 \end{cases}$ è

A. non continua; B. continua, ma non derivabile;
C. derivabile solo una volta; D. derivabile almeno due volte.

Argomento *Soluzione*

II Parte - Applicazioni

Ex. 6.26 Si determinino gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

1)	$x^3 - x$	2)	$1 - x^2$	3)	$x - \sqrt{x}$
4)	$x(x-2)^3$	5)	$xe^{\frac{1}{x}}$	6)	$\sqrt[3]{x^2 + x}$
7)	$\dfrac{\lvert x-1\rvert}{x^2-4}$	8)	$\dfrac{7x+1}{x^2-3x+2}$	9)	$x^2 - 2\lvert x\rvert$
10)	$x\sqrt{x^2-1}$	11)	$\sqrt{\dfrac{e^{x+1}}{e^x+1}}$	12)	$x - \sqrt{x^2+1}$
13)	$\dfrac{2\sin x}{2-\cos x}$ in $[0, 2\pi]$			14)	$\dfrac{\log x}{x}$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.27 Si verifichi che la funzione $f(x) = \log x - \dfrac{1}{x^3}$ è invertibile dove definita e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(1)$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.28 Si verifichi che la funzione $f(x) = e^x + \sqrt{2x+1}$ è invertibile dove definita e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(0)$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.29 Si determinino gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso relativi delle seguenti funzioni:

1)	$x^3 - x$	2)	$1 - x^2$	3)	$x - \sqrt{x}$
4)	$x(x-2)^3$	5)	$xe^{\frac{1}{x}}$	6)	$\sqrt[3]{x^2 + x}$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.30 Si calcolino i seguenti limiti, usando, se necessario, i teoremi di De l'Hôpital, nei casi in cui sia possibile:

1) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ 2) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\frac{1}{\tan(x+\frac{\pi}{2})}}$ 3) $\lim_{x\to +\infty^+} \dfrac{e^{-x}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$

4) $\lim_{x\to -1^{++}} \dfrac{x^3+1}{\log(-x)}$ 5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}{\cos x}$ 6) $\lim_{x\to -\infty} x\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$

Argomento *Soluzione*

Ex. 6.31 Si calcolino i seguenti limiti, dopo aver calcolato i polinomi di Taylor necessari:

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x}$ 2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{3x^4}$ 3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{\tan x - x}$

6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x}-1}$ 5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-x^2}{x^3}$ 6) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$

Argomento *Soluzione*

Argomento 7

Studio di funzione

Studiare una funzione significa ottenere, mediante strumenti analitici (limiti, derivate, ecc.) informazioni utili a disegnare un grafico qualitativo della funzione data. I principali passi da compiere a questo scopo possono essere suddivisi in due parti, delle quali la prima riguarda i punti assolutamente essenziali, la seconda i punti che possono dare ulteriori informazioni, in alcuni casi utili per completare quelle precedenti, ma non sempre da seguire.

Passi fondamentali

1. Determinazione campo di esistenza $E(f)$ di f.

2. Limiti di f agli estremi di $E(f)$ (ed eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui).

3. Calcolo di f'.

4. Studio del segno di f' e determinazione intervalli di monotonia, con eventuali punti di massimo e di minimo.

Ulteriori informazioni utili per ottenere il grafico di f

a. Calcolo di f''.

b. Studio del segno di f'' e determinazione intervalli di convessità, con eventuali punti di flesso.

c. Calcolo del valore di f per gli eventuali punti di max e di minimo.

d. Intersezioni con gli assi.

e. Segno di f.

f. Calcolo dei limiti di f' agli estremi di $D(f')$, per stabilire eventuali tangenti al grafico in punti in cui non esiste la derivata e il tipo di convessità all'infinito.

ESEMPIO 7.1

$$\boxed{f(x) = x + 2x\log x.}$$

1. Per determinare $E(f)$, dobbiamo imporre le condizioni richieste per l'esistenza delle funzioni elementari che compongono f. In questo caso è presente il logaritmo, quindi dobbiamo imporre che il suo argomento sia positivo: $x > 0$, quindi $E(f) = (0, +\infty)$.

2. Limiti agli estremi: in questo caso gli estremi di $E(f)$ sono 0 e $+\infty$, quindi dobbiamo calcolare:

$\lim_{x\to 0^+} x + 2x\log x = 0,$ in quanto $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0,$ per $\alpha > 0.$

$\lim_{x\to +\infty} x + 2x\log x = \lim_{x\to +\infty} 2x\log x = +\infty.$

Poiché $f(x) \sim 2x \log x$ per $x \to +\infty$, f è infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$ e di conseguenza f non ha asintoti obliqui.

3. Calcolo di f':

$$f'(x) = 1 + 2\log x + 2x\frac{1}{x} = 2\log x + 3.$$

4. Segno di f':

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log x + 3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x > -\frac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e^{-\frac{3}{2}} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}.$$

	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Quindi f è decrescente in $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ e crescente in $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$. In $x = e^{-\frac{3}{2}}$, presenta un punto di minimo (assoluto).

a-b. Calcolo e segno di f'': essendo semplici da calcolare, ci conviene farlo, in modo da conoscere gli intervalli di convessità:

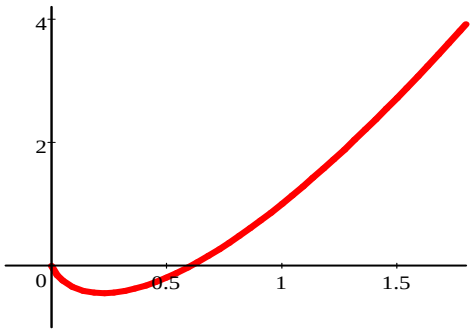
$$f''(x) = \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Quindi f è convessa su tutto il suo dominio.

c-d-e. In questo caso non servono per un grafico qualitativo, in quanto le informazioni in nostro possesso ci permettono di dedurre che il grafico ha una sola intersezione (di ascissa $\bar{x}$), con l'asse x, prima di $\bar{x}$ f è negativa e dopo è positiva. In ogni caso, il calcolo del valore di f nel punto di minimo $x = e^{-\frac{3}{2}}$ è molto semplice, in quanto $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}} \log e^{-\frac{3}{2}} = -2e^{-\frac{3}{2}} < 0$, e ci conferma le deduzioni precedenti.

f. Poiché la convessità è già stata studiata in **b**, possiamo vedere con che pendenza parte il grafico, calcolando $\lim_{x \to 0^+} 2\log x + 3 = -\infty$. Quindi abbiamo tangente verticale in 0.

Grafico di $f(x) = x + 2x \log x$



ESEMPIO 7.2

$$\boxed{f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}.}$$

1. Per determinare $E(f)$, dobbiamo imporre che l'argomento della radice sia strettamente positivo (non può essere nullo perchè la radice è al denominatore). Quindi abbiamo $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, cioè $E(f)=(-1,+\infty)$.

2. Limiti agli estremi: in questo caso gli estremi di $E(f)$ sono -1 e $+\infty$, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$, quindi f ha un ordine di infinito inferiore ad 1 per $x \to +\infty$ e non ha asintoti obliqui.

3. Calcolo di f':

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{2x+2-x-2}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3} = \frac{x}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}.$$

4. Segno di f':

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$$

	-1	0
	○	●
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Quindi f è decrescente in $(-1,0)$ e crescente in $(0,+\infty)$. In $x=0$ si ha un punto di minimo (assoluto).

A questo punto possiamo tentare di disegnare il grafico, ma ci accorgiamo di non sapere se il grafico interseca l'asse x. Abbiamo 2 opzioni:

c. Calcolo l'ordinata del punto di minimo: $f(0)=2$ (in questo caso più veloce).

d-e. Studio il segno di f:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}>0 \Leftrightarrow x>-2 \text{ e } x\in E(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$$

In conclusione il grafico sta tutto sopra l'asse x.

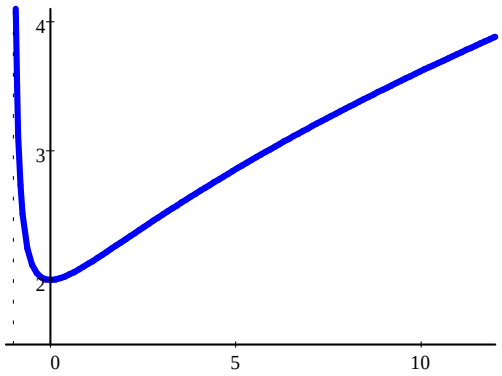
a-b. Calcolo e segno di f'':

$$f''(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3} - \frac{3}{4}\frac{x}{\left(\sqrt{x+1}\right)^5} = -\frac{1}{4}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^5} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \end{cases}.$$

	-1	2
	○	●
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Quindi f è convessa in $(-1, 2)$ e concava in $(2, +\infty)$. In $x = 2$ presenta un punto di flesso.

Grafico di $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$



ESEMPIO 7.3

$$\boxed{f(x) = \arctan(x^3) - x^3.}$$

1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto somma di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^3) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x^3) - x^3 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim -x^3$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 3\frac{x^2}{1+x^6} - 3x^2 = -3\frac{x^8}{1+x^6} \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi f risulta decrescente su tutto l'asse reale.

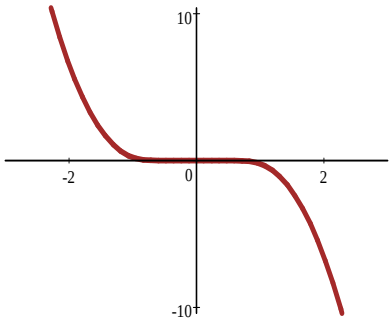
a-b. Calcolo e segno della derivata seconda:

$$f''(x) = -24\frac{x^7}{1+x^6} + 18\frac{x^{13}}{(1+x^6)^2} = -6x^7\frac{4+x^6}{(1+x^6)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; -x^7 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0.$$

	0
	●
$f''(x)$	$+$ $\quad$ $-$
$f(x)$	$\cup$ $\quad$ $\cap$

Quindi f risulta convessa su $(-\infty, 0)$ e concava su $(0, +\infty)$. In $x = 0$ presenta un punto di flesso.

Grafico di $f(x) = \arctan(x^3) - x^3$



ESEMPIO 7.4

$$\boxed{f(x) = 2x + \frac{1}{x}.}$$

1. $E(f)$ è dato da $x \neq 0$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x + \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} 2x + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, quindi potrebbero esserci asintoti obliqui. Occorre quindi calcolare:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2x = 0.$$

Di conseguenza, la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} > 0 \iff \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
		●		○		●	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

Quindi f è crescente in $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ed in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ed in $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

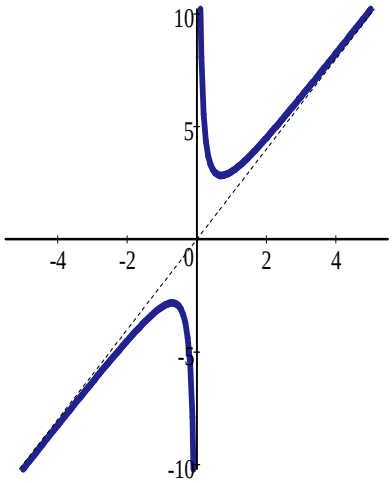
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo (relativo) e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo (relativo).

a-b. Calcolo e segno di f'':

$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Quindi f è concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$. Non ci sono flessi.

Grafico di $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$



Osservazione: Le funzioni studiate negli ultimi due esempi sono dispari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'origine. Si sarebbe potuto quindi limitare il loro studio diretto restringendosi al semiasse positivo e poi estendere per simmetria.

ESEMPIO 7.5

$$\boxed{f(x) = e^{\sqrt{x^3 - x}} - \sqrt{x^3 - x}.}$$

1. Per determinare l'insieme di definizione di f dobbiamo imporre che la radice quadrata sia definita, cioè che:

$x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \geq 0$, il che accade quando x e $(x^2 - 1)$ sono concordi, cioè:

		-1	0	1	
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$(x^2 - 1)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$(x^3 - x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

In conclusione $E(f) = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

2. Limiti agli estremi: notiamo innanzitutto che f è definita e continua negli estremi $-1, 0, 1$ dell'insieme di definizione, quindi $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 1 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. L'unico limite che bisogna effettivamente calcolare è:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x^3-x}} - \sqrt{x^3-x} = +\infty,$$

in quanto nel confronto tra infiniti per $x \to +\infty$ prevale l'esponenziale e $f(x) \sim e^{\sqrt{x^3-x}}$, il che ci dice anche che non ci sono asintoti obliqui.

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^3-x}} \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} - \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} \left(e^{\sqrt{x^3-x}} - 1\right).$$

Studiamo separatamente i segni dei due fattori:

$\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} > 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2-1 > 0$ con $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, cioè quando x soddisfa le due condizioni:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ -1 < x < 0, \; x > 1 \end{cases}$$

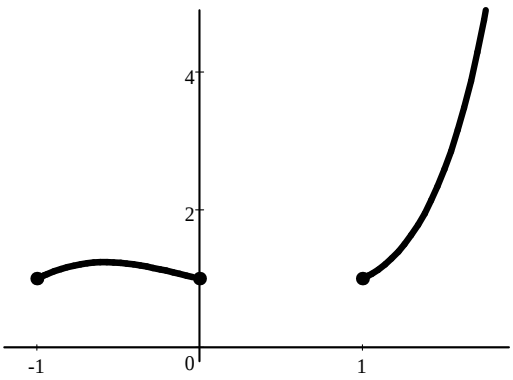
quindi per $-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; x > 1$.

Per quanto riguarda il secondo fattore, notiamo che $e^{\sqrt{x^3-x}} - 1 > 0$ se e solo se $\sqrt{x^3-x} > 0$, il che è sempre verificato per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (per tali valori di x il radicando è definito e positivo). Il conclusione il segno della derivata è determinato dal segno del primo fattore, quindi avremo che

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; x > 1.$

Concludendo, f è strettamente crescente in $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ed in $(1, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente in $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo (relativo), mentre $x = -1, 0, 1$ sono punti di minimo (assoluti).

Grafico di $f(x) = e^{\sqrt{x^3-x}} - \sqrt{x^3-x}$



ESEMPIO 7.6

Discutere il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - k = 0,$$

al variare di k reale.

In questo caso abbiamo da risolvere un problema riguardante le soluzioni di un'equazione dipendente dal parametro reale k. Per risolverlo, possiamo dapprima interpretare l'equazione data come l'equazione risolutiva del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \\ y = k \end{cases} .$$

Questo sistema rappresenta analiticamente l'intersezione tra il grafico della funzione data da $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ e la retta di equazione $y = k$, che al variare di k in $\mathbb{R}$, descrive la famiglia di rette parallele all'asse x. Il numero dei punti appartenenti a tale intersezione corrisponde al numero delle soluzioni dell'equazione data, mentre le corrispondenti ascisse sono le effettive soluzioni, la cui posizione sull'asse x ci permette di conoscerne il segno, anche se non esattamente il valore. Non ci resta quindi che iniziare a studiare la funzione $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, in modo da disegnarne il grafico.

1. $E(f)$ è dato da tutto $\mathbb{R}$.

2. Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^4 = +\infty \quad \text{(confronto tra infiniti in cui prevale } 3x^4)$$

3-4. Calcolo e segno di f':

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x > 0 \;\Leftrightarrow\; 12x(x-1)(x-3) > 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < x < 1 \quad \text{o} \quad x > 3$$

		0	1	3	
		•	•	•	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	

Quindi f è crescente in $(0,1)$ ed in $(3,+\infty)$, decrescente in $(-\infty,0)$ ed in $(1,3)$.
Avremo quindi un punto di massimo (relativo) in $x = 1$ e punti di minimo in $x = 0$ ed in $x = 3$.
In questo caso, dovendo intersecare il grafico con la famiglia di rette orizzontali $y = k$, ci è utile conoscere i valori della funzione in tali punti.

$$f(1) = 5 \qquad f(0) = 0 \qquad f(3) = 3 \times 3^4 - 16 \times 3^3 + 18 \times 3^2 = 243 - 432 + 162 = -27$$

Abbiamo quindi che in $x = 3$ vi è un punto di minimo assoluto di valore -27.

Per i nostri scopi, non ci serve sapere nulla sulla convessità, né sugli asintoti obliqui.
Le informazioni che abbiamo su f sono sufficienti per concludere che ci saranno i seguenti casi, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

per $k < -27$, nessuna soluzione (retta al di sotto del grafico);

per $k = -27$, una soluzione positiva ($x = 3$)(retta tangente al grafico nel punto corrispondente al minimo $(3, -27)$);

per $-27 < k < 0$, due soluzioni positive (retta secante il grafico)([1]);

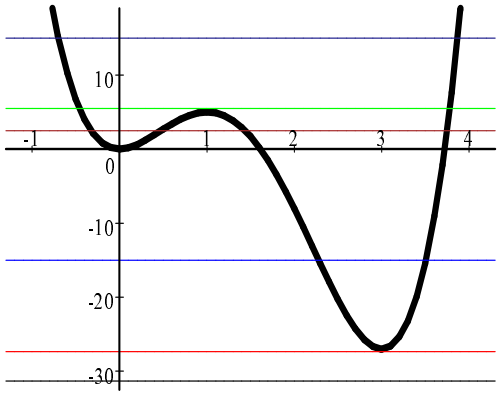
per $k = 0$, tre soluzioni, di cui una nulla e due positive (retta tangente al grafico nel punto corrispondente al minimo relativo $(0, 0)$);

per $0 < k < 5$, quattro soluzioni, di cui una negativa e tre positive (retta secante il grafico);

Per $k = 5$, tre soluzioni, di cui una negativa e due positive (retta tangente al grafico nel punto corrispondente al massimo relativo $(1, 5)$).

Per $k > 5$, due soluzioni, di cui una negativa ed una positiva (retta secante il grafico).

La situazione è visibile nel grafico seguente:



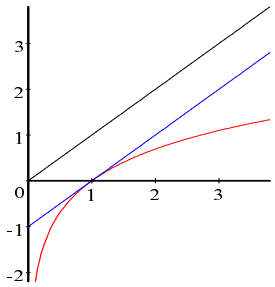
ESEMPIO 7.7

Vogliamo studiare alcune disequazioni non elementarmente risolubili, iniziando da

$$x - \log x > 0.$$

Dopo aver stabilito il campo di esistenza, che è $(0, +\infty)$, possiamo interpretare questa disequazione come il confronto tra le ordinate dei punti di uguale ascissa dei grafici delle due funzioni elementari, $f(x) = x$ e $g(x) = \log x$ e cercare di trovare le soluzioni attraverso i grafici (*confronto grafico*). In questo caso è abbastanza semplice, in quanto sappiamo che, per $0 < x < 1$, $\log x < 0$, mentre da 1 in poi è anch'esso positivo. Starà sopra o sotto la retta? Poichè in $x = 1$ il grafico ha tangente $y = f'(1)(x - 1) = x - 1$ e la funzione è concava, il suo grafico sta al di sotto di tale retta, e quindi sotto la retta di equazione $y = x$. In conclusione, le soluzioni della diseguaglianza sono date da $(0, +\infty)$.

[1] Utilizzando il teorema degli zeri e le informazioni a disposizione sulla monotonia di f, queste soluzioni, come le successive, si possono "localizzare", nel senso di trovare, per ciascuna di esse, un intervallo a cui appartiene (ed a cui non appartiene nessun'altra soluzione). Per esempio, in questo caso, le due soluzioni x_1, x_2 determinate sono tali che $1 < x_1 < 3$ e $x_2 > 3$.

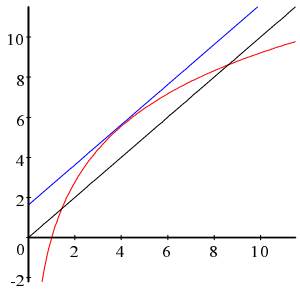


Confronto tra x e $\log x$

Diversa la situazione se dobbiamo studiare, sempre con confronto grafico

$$x > 4\log x.$$

In questo caso, l'unico punto del grafico con tangente parallela a $y = x$ corrisponde a $x_0 = 4$ (infatti $4\frac{1}{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 4$) ed in tale punto la tangente ha equazione $y = x - 4 + 4\log 4 = x + 4(\log 4 - 1)$. Essendo $(\log 4 - 1) > 0$, tale retta sta sopra $y = x$ ed il grafico concavo di $f(x) = 4\log x$ incontra $y = x$ in 2 punti α e β, con $\alpha < 4 < \beta$.



Confronto tra x e $4\log x$

Alternativamente, si può procedere studiando la funzione

$$f(x) = x - 4\log x$$

in modo da determinarne il segno.

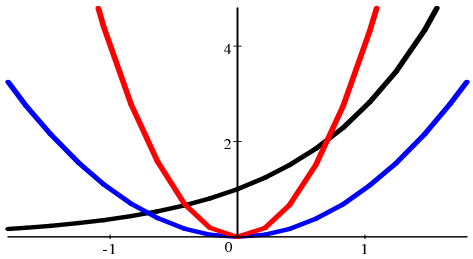
ESEMPIO 7.8

Studiamo ora con confronto grafico una disequazione dipendente da un parametro:

$$e^x - kx^2 > 0.$$

Qui dobbiamo confrontare il grafico di $f(x) = e^x$ con le parabole di vertice l'origine. La prima banale osservazione è che, se $k < 0$, la parabola è rivolta verso il basso e, avendo vertice l'origine, sta tutta sotto l'asse x. Di conseguenza, per $k \leq 0$, $e^x > kx^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Per $k > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto e il valore di k dà una misura dell'apertura della parabola stessa (più k è piccolo, più la parabola è aperta). Ci dovremo quindi aspettare diversi casi, a seconda del valore di k :

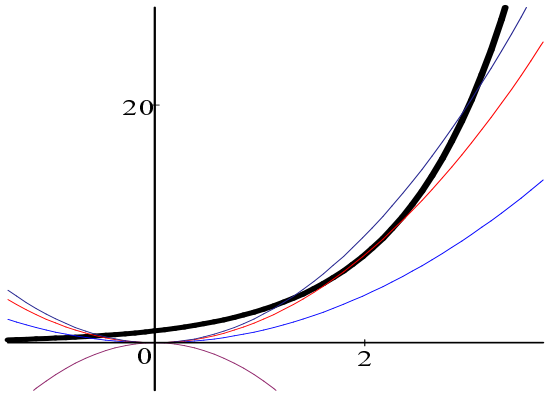


Sicuramente, ogni parabola con un $k > 0$ interseca il grafico di e^x in un punto del II quadrante, corrispondente ad una ascissa $x = \alpha < 0$. Invece, nel I quadrante, se una di queste parabole interseca il grafico di e^x in un punto di ascissa $\beta > 0$, lo deve poi intersecare in almeno un altro punto di ascissa $\gamma \geq \beta$. Infatti, pur essendo entrambe convesse su tutto $\mathbb{R}$, e^x ha un ordine di infinito superiore a kx^2 per $x \to +\infty$ e quindi, da un certo punto in poi, il suo grafico si troverà definitivamente sopra la parabola. Per distinguere i vari casi, dobbiamo dapprima vedere se una tra queste parabole è tangente al grafico di e^x, distinguendo poi tra quelle più aperte (che non avranno quindi intersezioni positive) e quelle meno aperte, che avranno 2 intersezioni positive.
Affinchè i grafici di 2 funzioni siano tangenti, devono avere una tangente comune e quindi ci serve un punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente ad entrambi i grafici in cui le 2 tangenti abbiano lo stesso coefficiente angolare. Abbiamo allora un sistema in 2 incognite (x_0 e $k > 0$) con due equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{x_0} = kx_0^2 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2kx_0 = kx_0^2 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0\ (x_0 - 2) = 0 \\ e^{x_0} = 2kx_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ e^2 = 4k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ k = \frac{e^2}{4} \end{array} \right. .$$

Abbiamo allora che per $k = \frac{e^2}{4}$ la parabola risulta tangente al grafico di e^x. In conclusione la disequazione avrà le seguenti soluzioni, al variare di k :

$k \leq 0$	ogni $x \in \mathbb{R}$
$0 < k < \frac{e^2}{4}$	$x > \alpha$, con $\alpha < 0$
$k = \frac{e^2}{4}$	$x > \alpha$, con $\alpha < 0$ e $x \neq \beta > 0$
$k > \frac{e^2}{4}$	$\alpha < x < \beta$, $x > \gamma$, con $\alpha < 0 < \beta < \gamma$



Argomento 7 - Studi di funzioni

Esercizi

Ex. 7.1 Data la funzione

$$f(x) = \log 3x + \frac{4}{\sqrt{x}},$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti agli estremi, la monotonia e la convessità.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.2 Data la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1,$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.3 Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+8}}{x},$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti agli estremi e la monotonia.
Scrivere l'equazione della tangente al grafico di f nel punto $P = (-2, 0)$.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.4 Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}},$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.5 Data la funzione

$$f(x) = \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2,$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.
Determinare la tangente al grafico di f nell'origine.
Studiare poi la convessità di f.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.6 Data la funzione

$$f(x) = \log(x^2+x) - x,$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.7 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3,$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti, i punti di intersezione con l'asse x e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.8 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - \log 4x,$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia, sapendo che, dove è definita, la funzione è positiva.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.9 Data la funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.10 Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log(4 - x^2)},$$

i) stabilire se è pari, dispari o nè pari nè dispari;
ii) tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.11 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1 + \log(x)}{x^2},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.12 Data

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1},$$

i) tracciare un grafico di $f(x)$ che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.
ii) Stabilire se il punto di ascissa $x = 1$ è a tangente verticale.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.13 Data

$$f(x) = \frac{e^{x+2}}{3x+3},$$

tracciare un grafico di $f(x)$ che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.14 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{x+2}\right) - \frac{1}{x},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.15 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = (1+x^8)\arctan(x^4),$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti , la monotonia e la convessità.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.16 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = -e^x + xe^x \log x,$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.17 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.18 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.19 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.20 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \log(31 + x) - \arctan x,$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.21 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x}},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.22 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = (x + 1)e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}},$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.23 Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^6}{x + 1}$$

che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.24 i) Determinare il numero delle radici dell'equazione:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = 3.$$

ii) Discutere, al variare di k reale, il numero delle radici dell'equazione:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = k.$$

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.25 Discutere il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$x\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x = k,$$

al variare di k reale.

Argomento *Soluzione*

Ulteriori Esercizi

Avvertenza: nelle soluzioni degli esercizi che seguono, verrà dato solo il grafico delle funzioni che vi compaiono.

Ex. 7.26 Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.27 Data la funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) - x$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.28 Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.29 Data la funzione

$$f(x) = x^2 + 1 + \log(4 - x^2)$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.30 Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \log(x-1)$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.31 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - x - 6}}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.32 Data la funzione

$$f(x) = \log \frac{x-2}{1-x}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.33 Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{e^x}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Ex. 7.34 Data la funzione

$$f(x) = x\sqrt{x^2-3x+2}$$

tracciare un grafico che ne evidenzi l'insieme di definizione, i limiti e la monotonia.

Argomento *Soluzione*

Argomento 7 - Studi di funzioni

Soluzioni Esercizi

Sol. Ex. 7.1 $\quad f(x) = \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

Insieme di definizione : $x > 0$

Limiti :

$\lim_{x\to 0^+} \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = +\infty$ (confronto tra infiniti in cui prevale la potenza)

$\lim_{x\to +\infty} \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \log 3x = +\infty$

Notiamo che $f(x) \sim \log 3x$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{3}{3x} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 4)$ e crescente in $(4, +\infty)$. In $x = 4$ presenta un punto di minimo (assoluto).

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} x\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2)\,\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} = \frac{-x+3\sqrt{x}}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x} > x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9$$

Quindi la funzione è convessa in $(0, 9)$ e concava in $(9, +\infty)$. In $x = 9$ presenta un flesso.

Grafico di $f(x) = \log 3x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

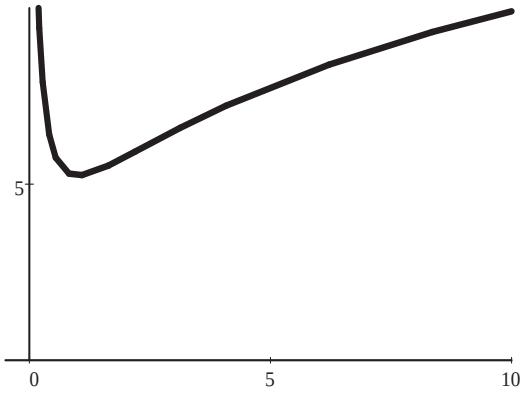


Figura 1: Ex.7.1

Sol. Ex 7.2 $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1$

Insieme di definizione: $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ o $x \geq 4$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = +\infty,$ $\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = 0,$ $\lim_{x\to4^+} e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = 0$

Notiamo che $f(x) \sim e^{\sqrt{x^2}}$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = e^{\sqrt{x^2-4x}} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \text{ o } x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Quindi la funzione è crescente in $(4, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 0)$.
In $x = 0$ e in $x = 4$ presenta punti di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4x}} - 1$

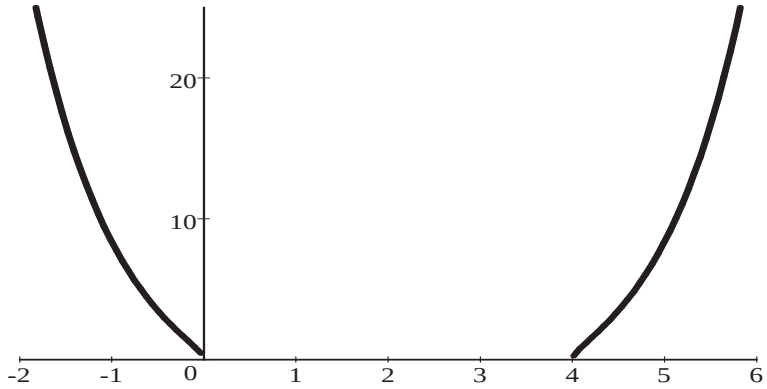


Figura 2: Ex.7.2

Sol. Ex 7.3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x}$

Insieme di definizione : $\begin{cases} x^3 + 8 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Limiti:

$\lim_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+8}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{x}=+\infty$$

Notiamo che per $x\to+\infty$, $f(x)\sim\sqrt{x}$ e quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x)=\frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}x-\sqrt{x^3+8}}{x^2}=\frac{3x^3-2x^3-16}{2x^2\sqrt{x^3+8}}=\frac{x^3-16}{2x^2\sqrt{x^3+8}}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-16>0\\ x>-2 \text{ con } x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\sqrt[3]{2}\\ x>-2 \text{ con } x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x>2\sqrt[3]{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(2\sqrt[3]{2},+\infty)$, decrescente in $(-2,0)$, $(0,2\sqrt[3]{2})$.
In $x=2\sqrt[3]{2}$, presenta un punto di minimo (relativo) e in $x=-2$ uno di massimo (relativo).

Grafico di $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+8}}{x}$

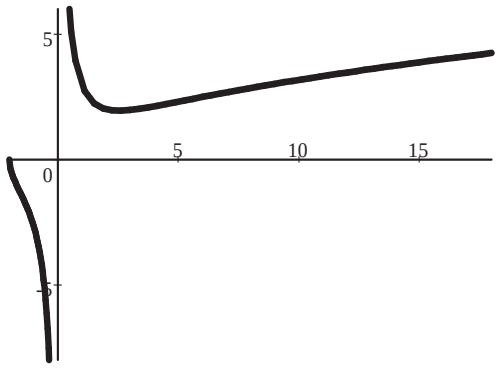


Figura 3: Ex.7.3

Poiché $\lim_{x\to-2^+}f'(x)=\lim_{x\to-2^+}\dfrac{x^3-16}{2x^2\sqrt{x^3+8}}=-\infty$, la tangente richiesta ha equazione $x=-2$.

Sol. Ex. 7.4 $\qquad f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}$

Insieme di definizione : $x^2-6x>0\Leftrightarrow x<0$ o $x>6$

Limiti :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}=0 \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}=+\infty \qquad \lim_{x\to6^+}\frac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}=+\infty$ (confronto tra ∞, in cui prevale l'esponenziale, il che ha anche come conseguenza che f non ha asintoti obliqui)

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{x^2-6x} - e^x\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}}}{x^2-6x} = \frac{e^x(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-6x}\,(x^2-6x)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+3>0 \\ x<0 \text{ e } x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7-\sqrt{37}}{2} \text{ e } x > \frac{7+\sqrt{37}}{2} \\ x<0 \text{ e } x>6 \end{cases} \Leftrightarrow x<0 \text{ e } x > \frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(\frac{7+\sqrt{37}}{2}, +\infty)$, decrescente in $(6, \frac{7+\sqrt{37}}{2})$.
In $x = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$, presenta un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-6x}}$

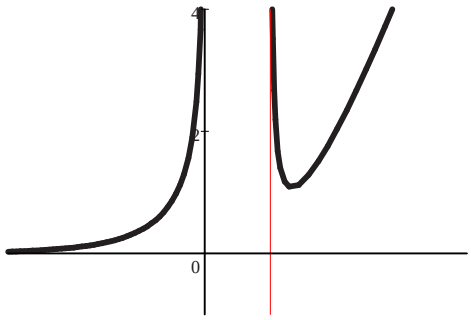


Figura 4: Ex.7.4

Sol. Ex. 7.5 $\quad f(x) = \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2$

Insieme di definizione : $\begin{cases} 2x+2>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

Limiti :

$$\lim_{x\to 0^+} \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(2x+2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2 = \lim_{x\to+\infty} \log(2x+2) = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim \log(2x+2)$ per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{2}{2x+2} - \frac{1}{x+1}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x+1}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

Quindi la funzione è crescente in $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ e decrescente in $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

In $x = \dfrac{1}{4}$, presenta un punto di minimo (assoluto) e in $x = 0$ un punto di massimo (relativo).

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{(x+1)}\frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-4x\sqrt{x} + 3x + 1}{4x\sqrt{x}\,(x+1)^2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x\sqrt{x} + 3x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 > 4x\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)^2 > 16x^3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(16x^2 + 7x + 1) < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Quindi la funzione è convessa in $(0, 1)$ e concava in $(1, +\infty)$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso.

Poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1}\left(\dfrac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right) = -\infty$, la retta tangente nell'origine ha equazione $x = 0$.

Grafico di $f(x) = \log(2x + 2) - \arctan\sqrt{x} - \log 2$

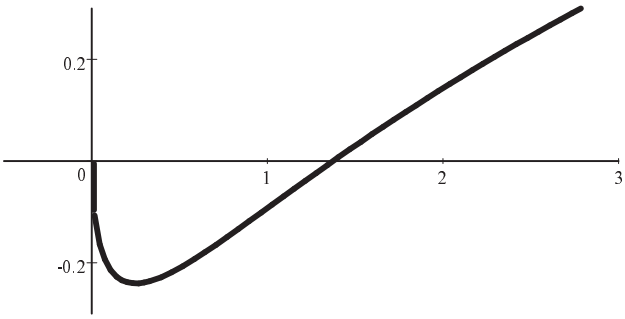


Figura 5: Ex.7.5

Sol. Ex. 7.6 $\quad f(x) = \log(x^2 + x) - x$

Insieme di definizione: $x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ o $x > 0$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2 + x) - x = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$,

$\lim_{x\to-1^-} \log(x^2 + x) - x = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} \log(x^2 + x) - x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + x) - x = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ (confronto tra infiniti, in cui prevale la potenza).

Notiamo che $f(x) \sim -x$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi potrebbe avere asintoti obliqui. Necessita dunque calcolare:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2 + x) = +\infty$

Si conclude quindi che f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} - 1 = \frac{-x^2+x+1}{x^2+x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 + 1 > 0 \\ x < -1 \text{ o } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < -1 \quad \text{o} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Quindi la funzione è crescente in $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, decrescente in $(-\infty, -1)$ ed $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \log(x^2+x) - x$

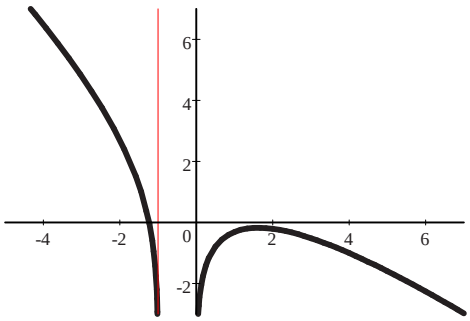


Figura 6: Ex.7.6

Sol. Ex. 7.7 $\quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

Insieme di definizione : $x > 0$.

Intersezioni con l'asse x:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = x + 2 \Leftrightarrow x = 1, 4.$$

Limiti :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Si ha dunque che $f(x) \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{x-2}{x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 2)$ e crescente in $(2, +\infty)$.
In $x = 2$, presenta un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3$

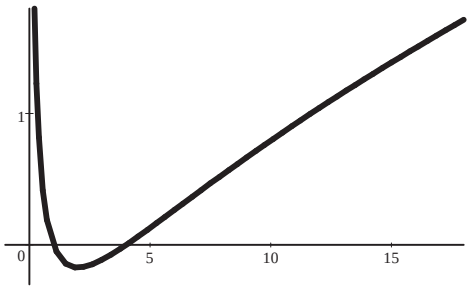


Figura 7: Ex.7.7

Sol. Ex. 7.8 $\quad f(x) = \sqrt{1+2x} - \log 4x$

Insieme di definizione: $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Limiti:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+2x} - \log 4x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+2x} - \log 4x = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+2x} = +\infty$ (confronto tra infiniti in cui prevale la potenza).

Notiamo che $f(x) \sim \sqrt{1+2x}$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{1+2x}}{x\sqrt{1+2x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{1+2x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1+2x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 1-\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x > 1+\sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1+\sqrt{2}$$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 1+\sqrt{2})$ e crescente in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$. $x = 1+\sqrt{2}$ è un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \sqrt{1+2x} - \log 4x$

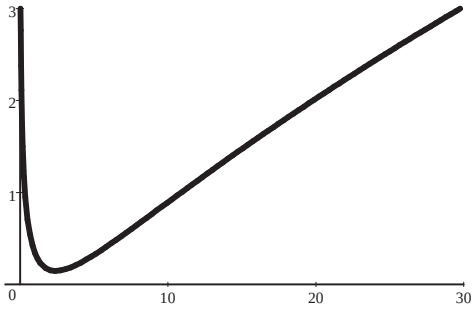


Figura 8: Ex.7.8

Sol. Ex. 7.9 $\quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Insieme di definizione: $2 + \frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} \geq 0 \quad \text{con} \quad x \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \leq -\frac{1}{2}$ o $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \lim_{x\to -0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Notiamo che per $x \to -\infty$, $f(x) \sim \left(\frac{1}{3}\right)^x$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3 - \frac{1}{2x^2\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)}} < 0 \qquad \forall x \in E(f).$$

Quindi la funzione è decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ed in $(0, +\infty)$. Quindi $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

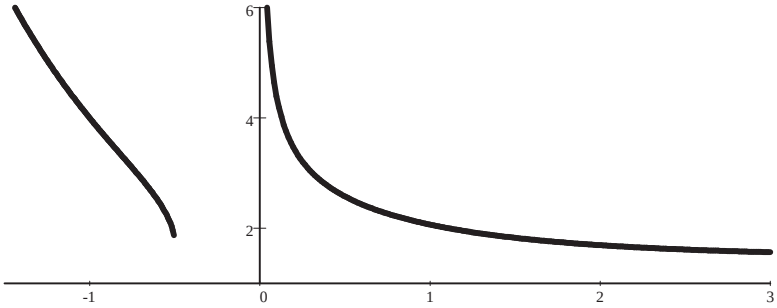


Figura 9: Ex.7.9

Sol. Ex. 7.10 $\quad f(x) = \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$

i) f è pari, in quanto $\dfrac{1}{\log(4-x^2)} = \dfrac{1}{\log(4-(-x)^2)}$

ii) **Insieme di definizione**: $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ \log(4-x^2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ 4-x^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Limiti: (poiché f è pari, la studiamo solo nella parte positiva dell'insieme di definizione).

$$\lim_{x\to+\sqrt{3}^-} \frac{1}{\log(4-x^2)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{3}^+} \frac{1}{\log(4-x^2)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\log(4-x^2)} = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\log^2(4-x^2)}\frac{-2x}{(4-x^2)} = \frac{2x}{(4-x^2)\log^2(4-x^2)}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(4-x^2)\log^2(4-x^2)} > 0 \Leftrightarrow x>0 \quad e \quad x\neq+\sqrt{3}$$

Quindi f è crescente in $(0,+\sqrt{3})$, $(+\sqrt{3},2)$, decrescente in $(-2,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$ e ed ha un punto di minimo (relativo) in $x=0$.

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$

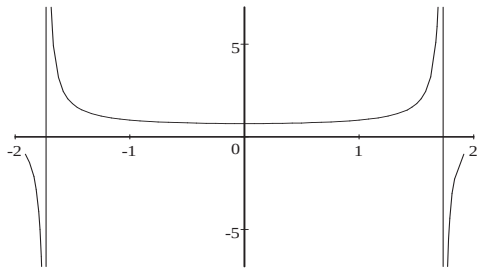


Figura 10: Ex.7.10

Sol. Ex. 7.11 $\quad f(x) = \dfrac{1+\log x}{x^2}$

Insieme di definizione: $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log x}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\log x}{x^2} = 0 \ (\ x^2 \text{ prevale su } \log x \text{ per } x \to +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - (1+\log x)\,2x}{x^4} = \frac{x(1-2\,(1+\log x))}{x^4} = -\frac{1+2\log x}{x^3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\log x}{x^3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\log x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Quindi la funzione è crescente in $(0, e^{-\frac{1}{2}})$, decrescente in $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ ed ha un punto di massimo (assoluto) in $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Grafico di $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x^2}$

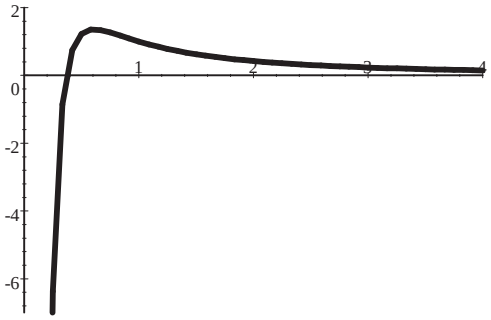


Figura 11: Ex.7.11

Sol. Ex. 7.12 $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}$

Insieme di definizione : $x \neq -1$.

Limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1} = +\infty$$

$$f'(x)=\frac{\frac{(x+1)}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2}-\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1-3(x-1)}{3\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2}}{(x+1)^2}=-\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2(x+1)^2}$$

$f'(x)>0\Leftrightarrow(x-2)<0\Leftrightarrow x<2$ con $x\neq\pm1$.

Quindi f è crescente in $(-\infty,-1)$ ed in $(-1,2)$, decrescente in $(2,+\infty)$.
$x=2$ è un punto di massimo (relativo).

Il punto di ascissa $x=1$ è a tangente verticale, in quanto

$$\lim_{x\to1^+}-\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1)}\right)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to1^-}-\frac{2}{3}\frac{x-2}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1)}\right)^2(x+1)^2}=+\infty.$$

Grafico di $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}$

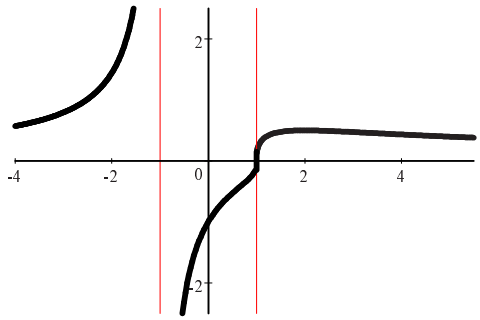


Figura 12: Ex.7.12

Sol. Ex. 7.13 $\qquad f(x)=\dfrac{e^{x+2}}{3x+3}$

Insieme di definizione: $x\neq-1$

Limiti:

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+2}}{3x+3}=+\infty$, (confronto tra infiniti, in cui prevale l'esponenziale, da cui si deduce anche che

f non ha asintoti obliqui per $x\to+\infty$.)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+2}}{3x+3}=0,\qquad\lim_{x\to-1^+}\frac{e^{x+2}}{3x+3}=+\infty\qquad\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+2}}{3x+3}=-\infty.$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{e^{x+2}(x+1)-e^{x+2}}{(x+1)^2}=\frac{1}{3}e^{x+2}\frac{x}{(x+1)^2}>0\Leftrightarrow x>0$$

Quindi $f(x)$ risulta essere crescente in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,-1),(-1,0)$.
Avrà quindi un punto di minimo (relativo) in $x=0$.

Grafico di $f(x)=\dfrac{e^{x+2}}{3x+3}$

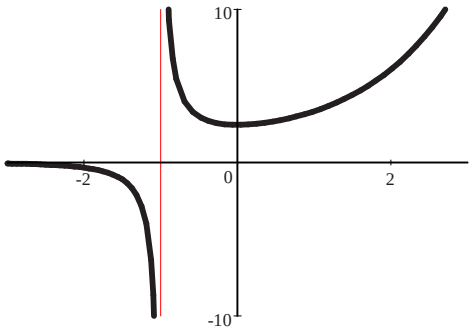


Figura 13: Ex.7.13

Sol. Ex. 7.14 $\qquad f(x)=\log\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{x}$

Insieme di definizione: $x>-2 \qquad$ con $\qquad x\neq 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to0^-}\log\left(\frac{x^2}{x+2}\right)-\frac{1}{x}=+\infty$$

Notiamo che $f(x)\sim\log x$ per $x\to+\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x)=\frac{1}{\dfrac{x^2}{x+2}}\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+4x}{x^2(x+2)}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+5x+2}{x^2(x+2)}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x+2>0\\ x>-2 \text{ con } x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-5+\sqrt{17}}{2}<x<0 \qquad o \qquad x>0$$

Quindi $f(x)$ risulta essere crescente in $(\frac{-5+\sqrt{17}}{2},0)$ ed in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-2,\frac{-5+\sqrt{17}}{2})$.
In $x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ presenta un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x)=\log\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{x}$

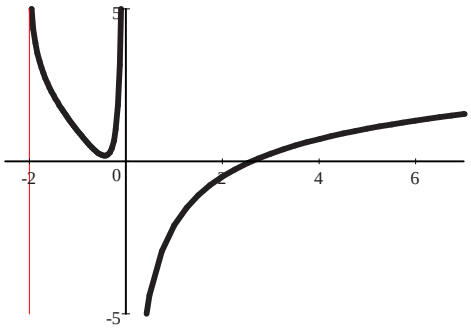


Figura 14: Ex.7.14

Sol. Ex. 7.15 $f(x) = (1+x^8)\arctan(x^4)$

Insieme di definizione: $\mathbb{R}$. La funzione è pari.

Limiti:

$\lim_{x\to+\infty}(1+x^8)\arctan(x^4) = \lim_{x\to-\infty}(1+x^8)\arctan(x^4) = +\infty$

Notiamo che $f(x) \sim -\frac{\pi}{2}x^8$ per $x \to -\infty$ e che $f(x) \sim \frac{\pi}{2}x^8$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = 8x^7 \arctan x^4 + (1+x^8)\frac{4x^3}{1+x^8} = 4x^3(2x^4 \arctan x^4 + 1) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Quindi f è crescente in $(0,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,0)$. In $x=0$ ha un punto di minimo (assoluto).

$$f''(x) = 56x^6 \arctan x^4 + 8x^7\left(\frac{4x^3}{1+x^8}\right) + 12x^2 = 4x^2(14x^4 \arctan x^4 + \frac{8x^8}{1+x^8} + 3) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Quindi la funzione risulta convessa su tutto l'asse reale.

Grafico di $f(x) = (1+x^8)\arctan(x^4)$

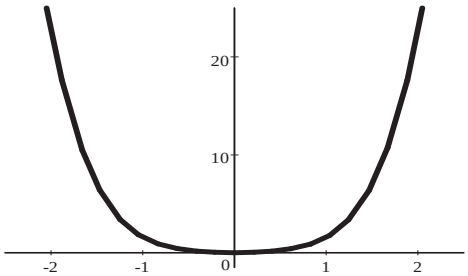


Figura 15: Ex.7.15

Sol. Ex. 7.16 $f(x) = -e^x + xe^x \log x$

Insieme di definizione: $x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} (-e^x + xe^x \log x) = -1 + \lim_{x\to 0^+} (xe^x \log x) = -1 \quad (\text{in quanto } \lim_{x\to} 0^+ (x \log x) = 0)$$

$$\lim_{x\to +\infty} (-e^x + xe^x \log x) = \lim_{x\to +\infty} e^x (x \log x - 1) = +\infty$$

Notiamo che f ha ordine di infinito superiore a e^x per $x \to +\infty$. Di conseguenza non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = -e^x + xe^x \log x + e^x(\log x + 1) = e^x (\log x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Quindi f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$. In $x = 1$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = -e^x + xe^x \log x$

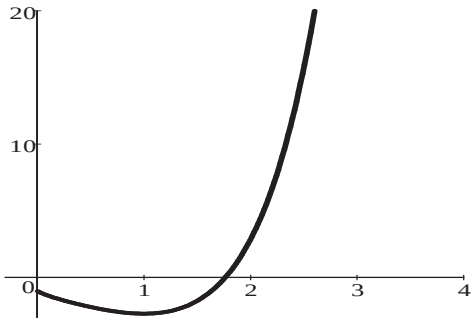


Figura 16: Ex.7.16

Sol. Ex. 7.17 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}$

Insieme di definizione:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x^2-9} \geq 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ (x^2 - 9) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 5 \leq 0 \\ (x^2 - 9) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 5 \\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 3 \quad \text{o} \quad x \geq 5$$

quindi $E(f) = (-3, 3) \cup [5, +\infty)$.

Limiti:

$$\lim_{x\to -3^+} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = \lim_{x\to +3^-} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 5^+} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} = f(5) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2}}=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}}\frac{x^2-9-2x\,(x-5)}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}}\frac{-\left(x^2-10x+9\right)}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+9<0\\-3<x<3\cup x>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<9\\-3<x<3\cup x>5\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3\cup 5<x<9$$

	-3		1		3		5		9	
	○		●		○		●		●	
$f'(x)$		$-$		$+$		$\times$		$+$		$-$
$f(x)$		↘		↗		$\times$		↗		↘

Quindi f è decrescente in $(-3,1)$ ed in $(9,+\infty)$ e crescente in $(1,3)$ ed in $(5,9)$. In $x=1$, presenta un punto di minimo, in $x=5$ un altro punto di minimo ed in $x=9$ un punto di massimo (relativo). Per stabilire se sono minimi relativi o assoluti, facciamo il confronto dei valori di minimo:

$f(1)=\sqrt{\frac{1-5}{1-9}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $f(5)=0$.

L'unico punto di minimo assoluto è quindi $x=5$.

Grafico di $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-5}{x^2-9}}$

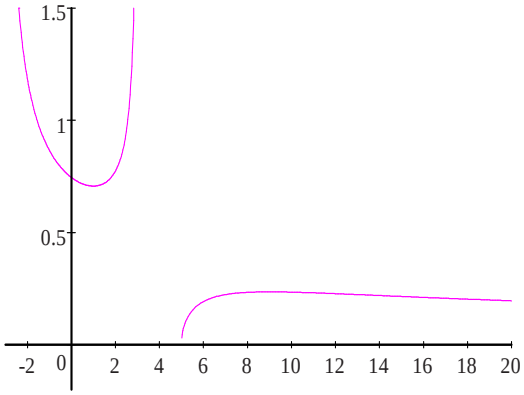


Figura 17: Ex.7.17

Sol. Ex. 7.18 $\qquad f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}}$

Insieme di definizione: $\begin{cases}2-x\geq 0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow\quad -2<x\leq 2.$

Limiti:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}} = f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} e^{\sqrt{2-x}} \frac{1}{\sqrt{x+2}} - e^{\sqrt{2-x}} \frac{3}{2\sqrt{(x+2)^3}} < 0, \quad \forall x \in (-2,2)$$

Quindi f risulta decrescente sul suo dominio. In $x = 2$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2-x}}}{\sqrt{x+2}}$

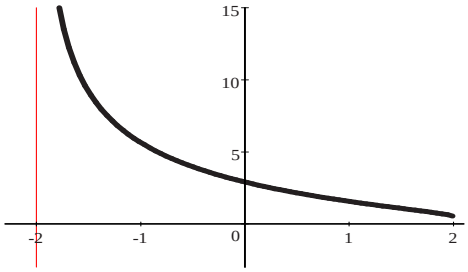


Figura 18: Ex.7.18

Sol. Ex. 7.19 $\qquad f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$

Insieme di definizione: $x > -1$

Limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1} = +\infty \text{ (l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

Notiamo che f è un infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$, quindi non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{1}{x+1} - e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{1}{(x+1)^2} = e^{\sqrt{x+1}}\, \frac{\sqrt{x+1}-2}{2(x+1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} > 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 4 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Quindi f è decrescente in $(-1,3)$ e crescente in $(3,+\infty)$. In $x = 3$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$

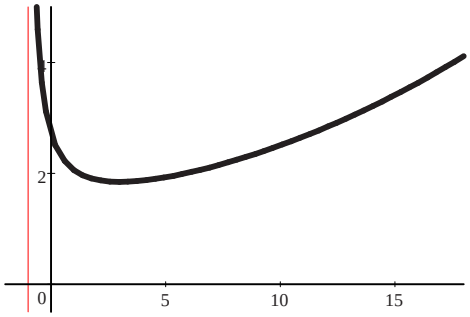


Figura 19: Ex.7.19

Sol. Ex. 7.20 $f(x) = \log(31+x) - \arctan x$

Insieme di definizione: $31 + x > 0 \quad \Leftrightarrow x > -31$

Limiti: $\lim_{x\to -31^+} \log(31+x) - \arctan x = -\infty,$

$\lim_{x\to+\infty} \log(31+x) - \arctan x = \lim_{x\to+\infty} \log(31+x) = +\infty$

Notiamo che $f(x) \sim \log(31+x)$ per $x \to +\infty$ e di conseguenza f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{1}{31+x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x - 30}{(31+x)(1+x^2)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 30}{(31+x)(1+x^2)} > 0 \\ x > -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 30 > 0 \\ x > -31 \end{cases} \Leftrightarrow -31 < x < -5 \quad e \quad x > 6$$

Quindi f è crescente in $(-31, -5)$ ed in $(6, +\infty)$, decrescente in $(-5, 6)$.
In $x = -5$ ha un punto di massimo (relativo) ed in $x = 6$ un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \log(31+x) - \arctan x$

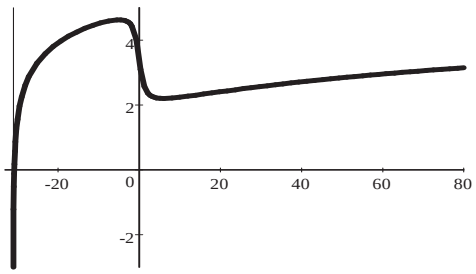


Figura 20: Ex.7.20

Sol. Ex. 7.21 $\quad f(x) = \log\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}}$

Insieme di definizione: $\dfrac{2x^2+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \log\sqrt{\frac{2x^2+1}{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log\sqrt{\frac{2x^2+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \log\sqrt{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log 2x = +\infty$$

Notiamo che $f(x) \sim \dfrac{1}{2}\log 2x$ per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

Prima di calcolare la derivata, notiamo che $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{2x^2+1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{2x^2+1}{x}}\frac{4x\,(x) - (2x^2+1)}{x^2} = \frac{x}{2\,(2x^2+1)}\left(\frac{2x^2-1}{x^2}\right) = \frac{2x^2-1}{2x\,(2x^2+1)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{2x\,(2x^2+1)} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi f è decrescente in $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, crescente in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. In $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x}}$

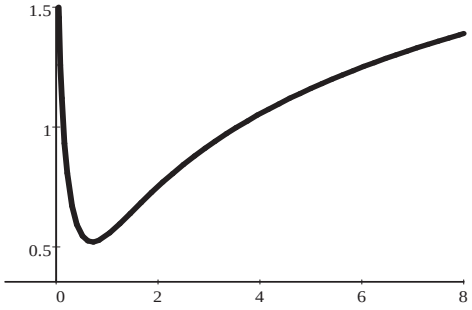


Figura 21: Ex.7.21

Sol. Ex. 7.22 $\quad f(x) = (x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}$

Insieme di definizione: $\dfrac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow\ x+1 > 0 \Leftrightarrow\ x > -1$

Limiti:

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{t} = +\infty \qquad \text{(l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}=+\infty$, con f stesso ordine di infinito di x per $x\to+\infty$. Potrebbe quindi avere asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}(x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}-x=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}-1)+e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{1}{x+1}}+e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}=+\infty.$$

Quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x)=e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}-\frac{x+1}{2\,(x+1)^2\sqrt{\frac{1}{x+1}}}e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}=e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}\frac{\left(2\sqrt{x+1}-1\right)}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)>0\quad\Leftrightarrow\quad e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}\frac{\left(2\sqrt{x+1}-1\right)}{2\sqrt{x+1}}>0\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\sqrt{(x+1)}-1>0\\ x>-1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+1>\dfrac{1}{4}\\ x>-1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x>-\frac{3}{4}$$

Quindi f è decrescente in $(-1,-\frac{3}{4})$, crescente in $(-\frac{3}{4},+\infty)$. In $x=-\frac{3}{4}$ ha un punto di minimo (assoluto).

Grafico di $f(x)=(x+1)\,e^{\sqrt{\frac{1}{x+1}}}$

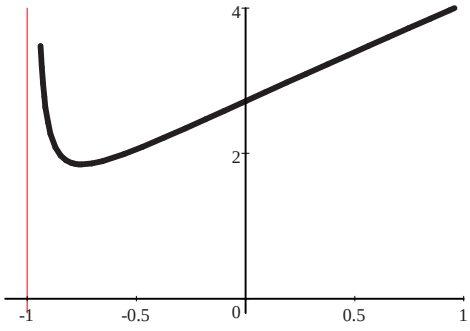


Figura 22: Ex.7.22

Sol. Ex. 7.23 $\qquad f(x)=\dfrac{x^6}{x+1}$

Insieme di definizione: $x\neq-1$

Limiti:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^6}{x+1}=+\infty,\qquad\qquad\lim_{x\to-1^-}\frac{x^6}{x+1}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty\qquad\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty.$$

Notiamo che $f(x) \sim x^5$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, quindi f non ha asintoti obliqui.

$$f'(x) = x^5 \frac{5x+6}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(5x+6) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{6}{5} \text{ e } x > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{6}{5} \text{ e } x > 0$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -\frac{6}{5})$ ed in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-\frac{6}{5}, -1), (-1, 0)$.
In $x = -\frac{6}{5}$ ha un punto di massimo (relativo) ed in $x = 0$ un punto di minimo (relativo).

Grafico di $f(x) = \dfrac{x^6}{x+1}$

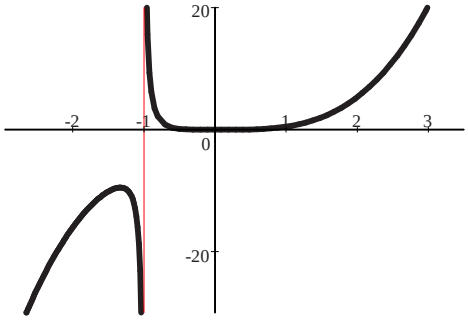


Figura 23: Ex.7.23

Sol. Ex. 7.24 i) Dobbiamo determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = 3.$$

Poiché non è un'equazione di tipo elementare, per determinare il numero delle radici possiamo dapprima studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$ e poi intersecare il suo grafico con la retta di equazione $y = 3$, per vedere quante sono le eventuali soluzioni dell' equazione.

Insieme di definizione: $x > 0$

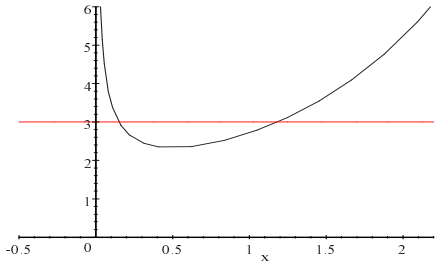
Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{(l'esponenziale prevale sulla potenza)}$$

$$f'(x) = e^x \frac{2x-1}{2\left(\sqrt{x}\right)^3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Quindi f è decrescente in $(0, \frac{1}{2})$ e crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. In $x = \frac{1}{2}$ vi è un punto di minimo (assoluto) di valore $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} = \sqrt{2e}$.
In questo caso è necessario confrontare tale valore minimo di f con 3, in quanto vogliamo intersecare il grafico della funzione con la retta $y = 3$:

$\sqrt{2e} < 3$, in quanto $\left(\sqrt{2e}\right)^2 = 2e < 2 \times 3 = 6 < 3^2 = 9$.
Quindi la retta $y = 3$ interseca il grafico di f e lo interseca in 2 punti:



ii) Dobbiamo ora discutere, al variare di k reale, il numero delle radici dell'equazione:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = k.$$

Poiché la funzione al I membro dell'equazione è la stessa di prima, dobbiamo solo confrontare il grafico già determinato con la famiglia di rette $y = k$, con k variabile reale.
Abbiamo già visto nel punto precedente che f ha un minimo assoluto di valore $\sqrt{2e}$. Di conseguenza avremo i seguenti possibili casi:

Per $k < \sqrt{2e}$, nessuna soluzione (retta al di sotto del grafico).

Per $k = \sqrt{2e}$, 1 sola soluzione (retta tangente al grafico).

Per $k > \sqrt{2e}$, 2 soluzioni (retta intersecante il grafico in 2 punti).

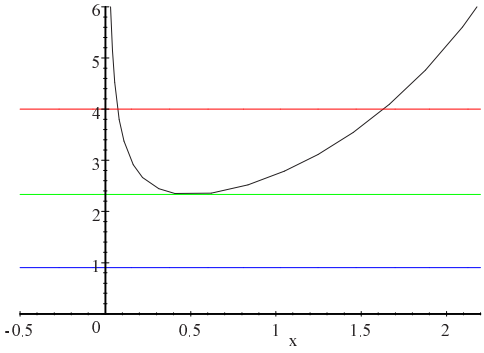


Figura 24: Ex.7.24

Sol. Ex. 7.25 Dobbiamo discutere il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$x\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x = k,$$

al variare di k reale, in modo del tutto analogo al precedente Ex. 7.24 ii). Occorre quindi dapprima studiare la funzione: $f(x) = x\mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} - x$.

Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} xe^x - \frac{x^2}{2} - x = -\infty$ (nel confronto xe^x prevale e^x che tende a 0, nel confronto tra potenze, prevale $-\frac{x^2}{2}$)

$\lim_{x\to+\infty} xe^x - \frac{x^2}{2} - x = +\infty$ (nel confronto prevale xe^x)

$f'(x) = e^x + xe^x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x\,(1+x) - (1+x) > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)\,(1+x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} e^x - 1 > 0 \\ 1 + x > 0 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} e^x - 1 < 0 \\ 1 + x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x > 1 \\ x > -1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} e^x < 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ x > -1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x < -1$ o $x > 0$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-1, 0)$. Ha quindi un massimo (relativo) in $x = -1$ di valore $M = f(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2e} > 0$ ed un minimo (relativo) in $x = 0$ di valore $m = f(0) = 0$.

Abbiamo allora i seguenti possibili casi :

$k < 0$: una soluzione negativa

$k = 0$: due soluzioni, una negativa ed una nulla;

$0 < k < \frac{e-2}{2e}$: tre soluzioni, due negative ed una positiva;

$k = \frac{e-2}{2e}$: due soluzioni, una negativa ed una positiva;

$k > \frac{e-2}{2e}$: una soluzione positiva.

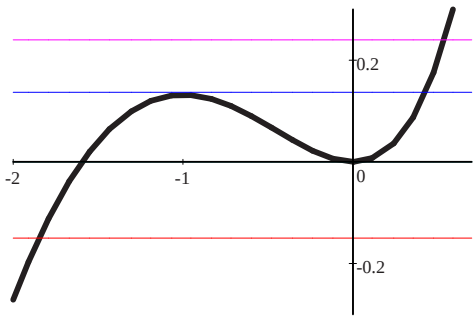
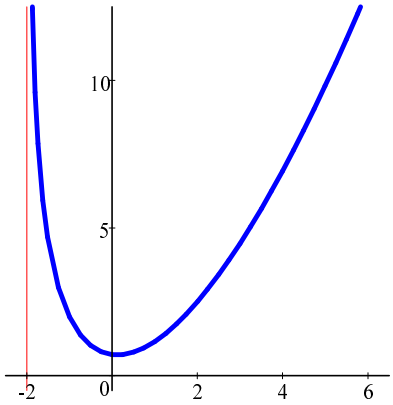
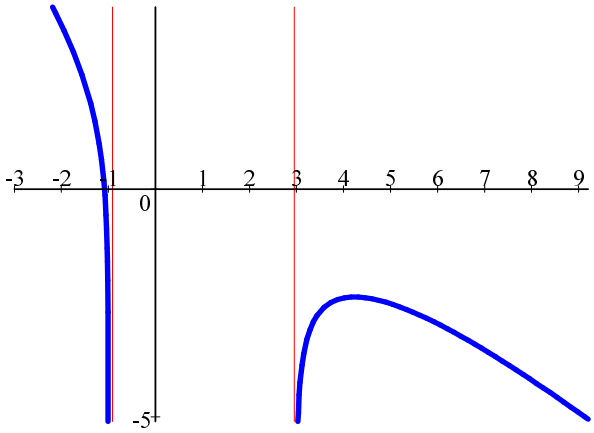


Figura 25: Ex.7.25

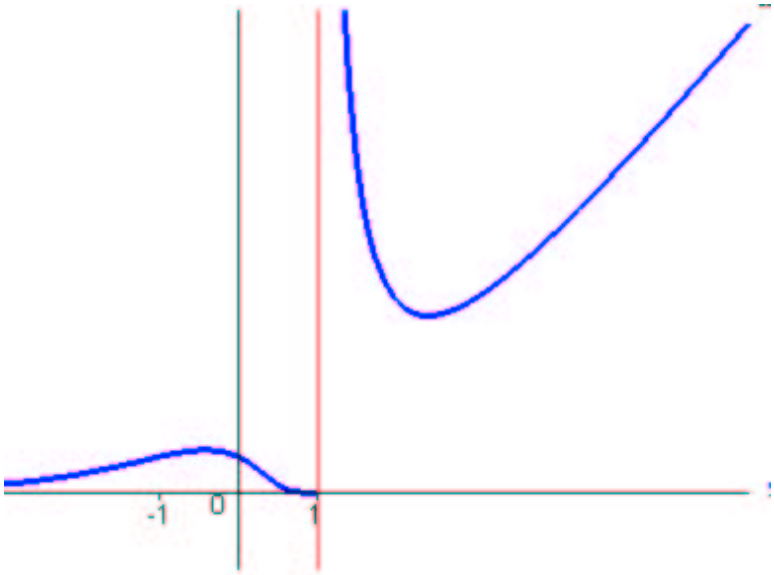
Sol. Ex. 7.26 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}$



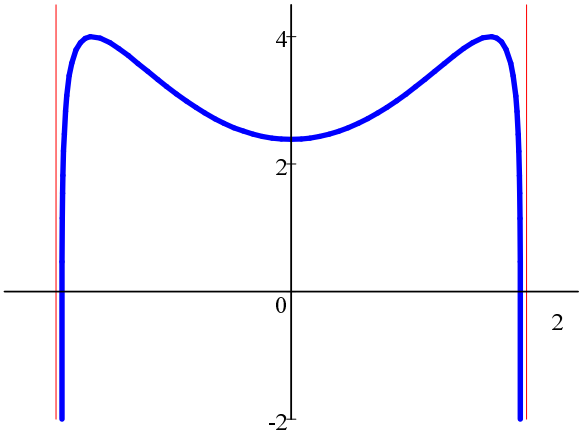
Sol. Ex. 7.27 $f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) - x$



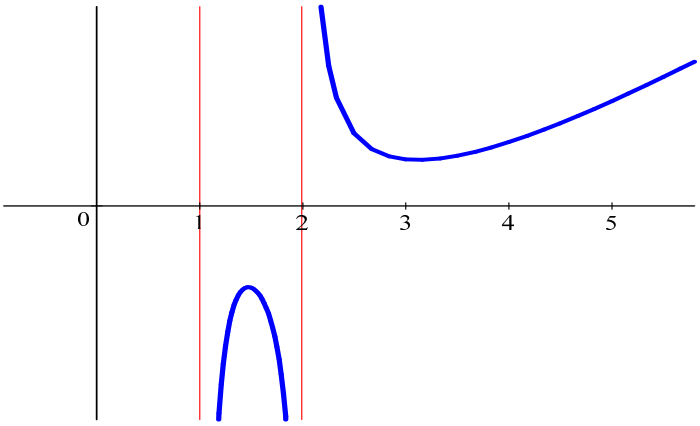
Sol. Ex. 7.28 $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$



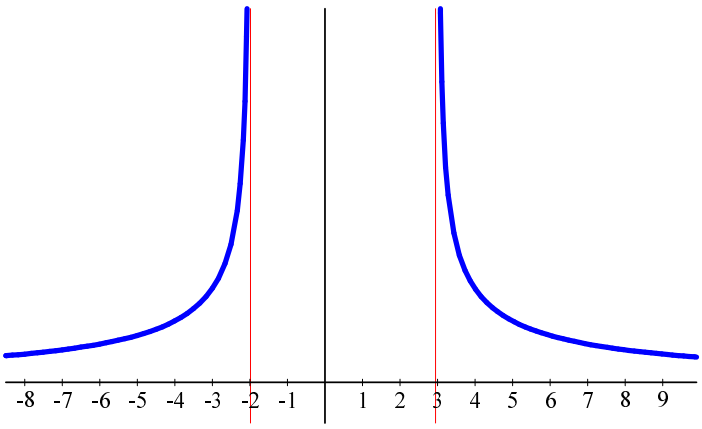
Sol. Ex. 7.29 $f(x) = x^2 + 1 + \log(4 - x^2)$



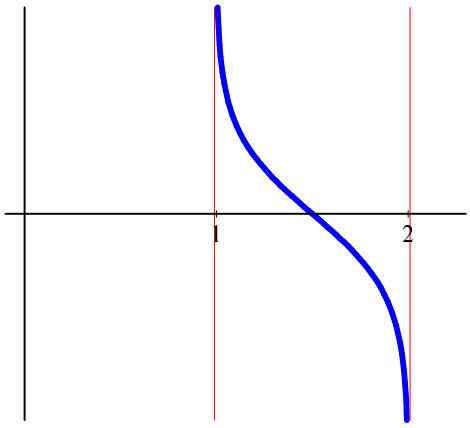
Sol. Ex. 7.30 $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \log(x-1)$



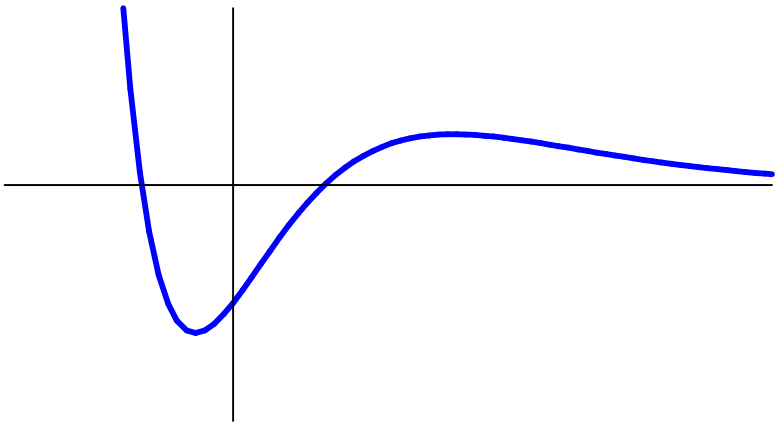
Sol. Ex. 7.31 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - x - 6}}$



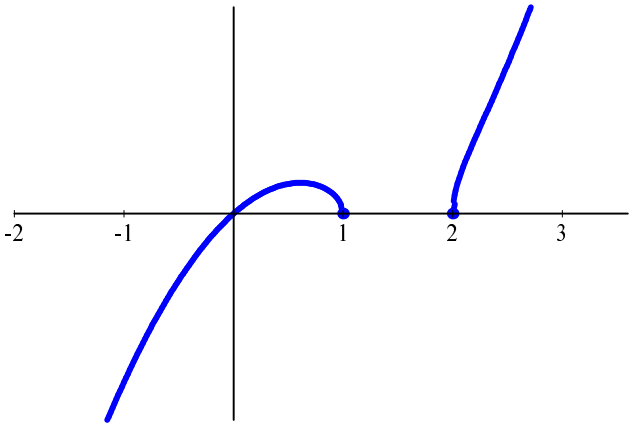
Sol. Ex. 7.32 $f(x) = \log \dfrac{x-2}{1-x}$



Sol. Ex. 7.33 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$



Sol. Ex. 7.34 $f(x) = x\sqrt{x^2-3x+2}$



Argomento 8
Integrali indefiniti

8.1 Integrale indefinito

Definizione 8.1 Assegnata la funzione f definita nell' intervallo I, diciamo che una funzione F con $F : I \to \mathbb{R}$ è **una primitiva di f in I** se

$$\begin{aligned} &i) \quad F \text{ è derivabile in } I; \\ &ii) \quad F'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in I. \end{aligned}$$

Per *verificare* se una data funzione F è una primitiva di f nell'intervallo I bisogna quindi controlllare che F sia derivabile in I e che la sua derivata coincida con f in tutti i punti di I.

Esempio 8.2 La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
Infatti, la funzione $\sin x$ è sempre derivabile e inoltre si ha che $(\sin x)' = \cos x$, per ogni x.

Data una funzione f, *cercare* una sua primitiva in I significa quindi cercare una funzione derivabile F la cui derivata coincida con f (ossia, la ricerca delle primitive è il procedimento "inverso" della derivazione).
Ci poniamo le seguenti domande:

1. data una funzione f esiste sempre una sua primitiva in I?
2. se una primitiva esiste, è unica?
3. come trovarla?

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (vedi Arg. 9) risponde alla prima di queste domande implicando che vale la seguente:

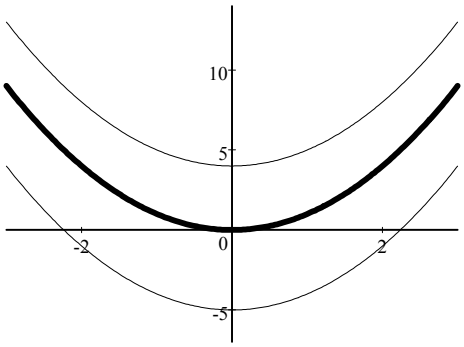
Proposizione 8.3 *Ogni funzione continua in un intervallo I ammette una primitiva in I.*

Quindi almeno per le funzioni *continue* siamo certi dell'esistenza di una primitiva.
In realtà, non solo di una. Infatti osserviamo che le funzioni $F(x) = \sin x$; $G(x) = \sin x + 2003$; $H(x) = \sin x - \pi$; ... sono tutte primitive di $f(x) = \cos x$.
In generale, vale:

Proposizione 8.4 *Se una funzione f ammette una primitiva F in un intervallo I, allora:*
i) ogni funzione della forma $F + c$ è anch'essa una primitiva di f, comunque si scelga la costante reale c;
ii) ogni altra primitiva G di f in I ha la forma $G = F + c$ per un'opportuna costante reale c.

In altre parole, se la funzione f ammette una primitiva F in I, ne ammette infinite che sono esattamente tutte quelle che si ottengono aggiungendo alla funzione F una qualunque costante[1]. Cioè, il grafico di ognuna di esse si ottiene da quello di F per mezzo di una traslazione verticale. Ad esempio, nella prossima figura sono evidenziati i grafici delle funzioni $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x^2 - 5$; queste tre funzioni sono primitive, in $\mathbb{R}$, della stessa $f(x) = 2x$.

[1] Questo è una conseguenza del Teorema di Lagrange (vedi Arg. 6).



Definizione 8.5 Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, l'insieme delle sue primitive si chiama **integrale indefinito** di f e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$.
Quindi,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \text{ derivabili in } I \text{ e tali che } F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I\}.}$$

La Proposizione 8.4 può essere riformulata dicendo che:
Se F è una primitiva di una data funzione f, allora

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.}$$

Nel seguito, con la lettera c indicheremo un'arbitraria costante reale.

Esempio 8.6 Derivando i termini a secondo membro possiamo verificare che:

- $\int \cos x\,dx = \sin x + c.$
- $\int 2x\,dx = x^2 + c.$
- $\int e^x\,dx = e^x + c.$
- Nell'intervallo $I_1 = (0, +\infty)$ una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log x$; invece nell'intervallo $I_2 = (-\infty, 0)$ una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log(-x)$. Per brevità si usa scrivere

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c,$$

e questa formula vale in ogni intervallo che non contiene $x = 0$.

Il calcolo esplicito delle primitive può, in generale, rappresentare un problema non banale.
Certamente conosciamo le primitive di molte funzioni elementari, utilizzando la tabella delle loro derivate (vedere Arg. 6).

8.2 Tabella delle primitive "immediate"

$\int 1 \, dx = x + c$	(1)
$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$	(2)
$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \log \lvert x \rvert + c$	(3)
$\int e^x dx = e^x + c$	(4)
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0, \, a \neq 1$	(5)
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	(6)
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	(7)
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$	(8)

Esempio 8.7 Utilizzando la formula (2) ricaviamo:

- $\int x^3 \, dx = \dfrac{x^4}{4} + c;$
- $\int \sqrt{x} \, dx = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} \, x^{1+\frac{1}{2}} + c = \dfrac{2}{3} \, x^{\frac{3}{2}} + c;$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \, x^{1-\frac{1}{2}} + c = 2 \, x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c;$
- $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} \, x^{1+\frac{1}{3}} + c = \dfrac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} + c$

Mentre con la formula (5) otteniamo:

- $\int 2^x \, dx = \dfrac{2^x}{\log 2} + c.$

Osservazione. Notiamo che:

- $\int \cos(x+5)\, dx = \sin(x+5) + c$
- $\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c.$

Dagli esempi precedenti possiamo dedurre che: se F è una primitiva della funzione f e a e b sono due numeri reali, con $a \neq 0$, si ha

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Questa formula è un caso particolare del metodo di integrazione per sostituzione.

Proprietà dell'integrale indefinito

Per determinare le primitive di funzioni che si ottengono sommando tra loro le funzioni elementari, e/o moltiplicandole per una costante, è utile la seguente

Proposizione 8.8 *Siano f e g continue in un intervallo I, allora*

1) $\int af(x)dx = a\int f(x)\, dx$, *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

2) $\int [f(x)+g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Esempio 8.9 Determiniamo l'integrale indefinito di:

- $f(x) = 3\cos x + \frac{5}{\sqrt{x}}$;

$$\int \left(3\cos x + \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\int \cos x\, dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\sin x + 10\sqrt{x} + c.$$

- $f(x) = \frac{4}{x} + 2x - \frac{1}{3}e^x$;

$$\int \left(\frac{4}{x} + 2x - \frac{1}{3}e^x\right) dx = 4\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int x\, dx - \frac{1}{3}\int e^x\, dx = 4\log|x| + x^2 - \frac{1}{3}e^x + c.$$

- $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}$;

$$\int \left(\frac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}\right) dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + 2\int x^{-3}\, dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + c.$$

- $f(x) = \frac{(x+2)^3}{x}$;

$$\int \frac{(x+2)^3}{x}\, dx = \int x^2\, dx + 6\int x\, dx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\log|x| + c.$$

- $f(x) = \frac{x}{x-1}$;

$$\int \frac{x}{x-1}\, dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}\, dx = \int dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx = x + \log|x-1| + c.$$

8.3 Integrazione per sostituzione

Date le funzioni f e g, ricordiamo (vedi Arg. 6) che la derivata della funzione composta $(g \circ f)$, quando ha senso, è data da:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Leggendo da destra a sinistra questa formula possiamo quindi ricavare che le primitive di una funzione che si presenta nella forma $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ sono le funzioni $(g \circ f)(x) + c = (g(f(x)) + c$, ossia

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = g(f(x)) + c.$$

Nella successiva tabella sono stati riportati alcuni esempi di integrazione di funzioni composte della forma $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ quando la funzione g è una particolare funzione elementare.

$\int [f(x)]^a \cdot f'(x)\, dx = \dfrac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1$	(9)
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log \lvert f(x) \rvert + c$	(10)
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$	(11)
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \qquad a > 0,\ a \neq 1$	(12)
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\, dx = \sin(f(x)) + c$	(13)
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + c$	(14)
$\int \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx = \arctan(f(x)) + c$	(15)

Esempio 8.10 Per determinare le primitive della funzione $h(x) = (e^x + 2x)\cos(e^x + x^2)$ riconosciamo inizialmente che $h(x)$ è della forma $f'(x)\cos(f(x))$ con $f(x) = e^x + x^2$.
Quindi, dalla (13) si ha

$$\int (e^x + 2x)\cos\left(e^x + x^2\right)\, dx = \sin\left(e^x + x^2\right) + c.$$

Esempio 8.11 Determiniamo le primitive delle seguenti funzioni.

- $h(x) = (\sin x)^3 \cdot \cos x$.

La funzione da integrare si può pensare come $f'(x)\,[f\,(x)]^3$ con $f\,(x) = \sin x$. Quindi per la (9) della tabella precedente (con $a = 3$)

$$\int (\sin x)^3 \cdot \cos x \; dx = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c.$$

- $h(x) = (3x^2 + 2)\, e^{x^3+2x}$.

La funzione da integrare è della forma $f'(x)e^{f(x)}$ con $f(x) = x^3 + 2x$. Quindi, per la (11) :

$$\int \left(3x^2 + 2\right) e^{x^3+2x} dx = e^{x^3+2x} + c.$$

- $h(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Qui la funzione integranda è della forma $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ con $f(x) = \sin x$. Quindi, dalla (10) otteniamo

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \;=\; \log|\sin x| + c.$$

Le formule della tabella precedente sono casi particolari della seguente formula generale che si ottiene ancora dalla regola di derivazione di una funzione composta:

Se G è una primitiva di g allora $\quad \int (g(f(x)) \cdot f'\,(x)\; dx = G\,(f\,(x)) + c$

Come utilizzare questa formula? Risulta conveniente operare il cambiamento di variabile $t = f\,(x)$, che permette di sostituire l'espressione $f'\,(x)\,dx$ con il termine dt. Quindi[2]

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\; dx \qquad \text{diventa} \qquad \int g(t)\, dt. \tag{$*$}$$

Una volta calcolato quest'ultimo integrale indefinito, occorre risostituire $f(x)$ al posto di t.

Esempio 8.12 Calcoliamo le primitive di:

- $h(x) = (x + 4)^{17}$.

In questo caso non occorre svolgere tutti i calcoli. Infatti ponendo $t = x + 4$, si ha $dt = dx$ e poichè $\int t^{17}\; dt = \frac{1}{18}t^{18} + c$ si ottiene:

$$\int (x + 4)^{17}\, dx = \frac{1}{18}\,(x + 4)^{18} + c.$$

- $h(x) = \cos\,(2x + 3)$.

Ponendo $t = 2x + 3$, si ha $dt = 2dx$, e poichè $\sin t$ è una primitiva di $\cos t$, abbiamo

$$\int \cos\,(2x + 3)\, dx = \frac{1}{2}\sin\,(2x + 3) + c.$$

[2]Mostrare in modo approfondito la relazione $dt = f'\,(x)\,dx$ esula dallo scopo di queste note. Ai fini del calcolo di primitive può però bastare la semplice regola "formale": $t = f\,(x) \implies dt = f'\,(x)\,dx$.

- $h(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}}$.

Posto $t = x^2+3x+5$, da cui $dt = (2x+3)\,dx$, si ottiene:

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+5}} + c$$

- $h(x) = xe^{x^2}dx$.

Ponendo $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, si perviene a:

$$\int xe^{x^2}dx \;=\; \frac{1}{2}\,e^{x^2} + c.$$

- $h(x) = \cos^2 x$.

Ricordando le identità trigonometriche $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$ e $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, e ponendo $t = 2x$ si ottiene

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(\cos x \sin x + x) + c.$$

In modo del tutto analogo si ha anche che

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(-\cos x \sin x + x) + c.$$

8.4 Integrazione per parti

Abbiamo visto (Arg. 6) che se f e g sono derivabili in I lo è anche il loro prodotto e

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Questa formula può essere riletta come:

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

e quindi

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx.} \qquad (\clubsuit)$$

La ($\clubsuit$) non risolve il problema di determinare una primitiva di $f(x)\cdot g'(x)$, ma lo trasforma nel problema di determinare una primitiva di $f'(x)\cdot g(x)$; talvolta, se siamo fortunati e operiamo attentamente, questo è più semplice.
(In ($\clubsuit$) il termine $f(x)$ si chiama *fattore finito*, mentre $g'(x)$ è detto *fattore differenziale*).

Esempio 8.13 $\displaystyle\int xe^x\,dx$

Applicando la formula di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ottiene

$$\int xe^x\,dx \;= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = (x-1)\,e^x + c.$$

Esempio 8.14 $\int \log x \, dx$

Applicando la formula di integrazione per parti con $f(x) = \log x$ e $g'(x) = 1$ si ha:

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + c$$

Esempio 8.15 $\int x \sin x \, dx$

In questo caso è molto facile ricavare una funzione $g(x)$ sia scegliendo $g'(x) = x$ che scegliendo $g'(x) = \sin x$. Nell'applicazione della formula (♣) con la scelta $g'(x) = x$ si ottiene

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x \, dx$$

ma purtroppo la nuova funzione da integrare ha un aspetto più ostile di quella di partenza. Invece la scelta di $g'(x) = \sin x$ porta a

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Può anche capitare di dover applicare la formula (♣) più di una volta come nel seguente

Esempio 8.16 $\int e^x \cos x \, dx$

In questo caso la scelta $f(x) = e^x$ porta a:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Dobbiamo ora determinare una primitiva di $e^x \sin x$. Riapplicando (♣), ancora con $f(x) = e^x$ si ottiene

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right) \\ &= e^x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Da cui

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

e quindi si ottiene

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}e^x (\sin x + \cos x) + c.$$

8.5 Integrazione delle funzioni razionali

Esiste un metodo generale che permette di calcolare l'integrale indefinito di funzioni razionali, ossia di funzioni che sono il rapporto di due polinomi $N(x)$ e $D(x)$

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

purché si riesca a scomporre il denominatore in fattori di primo grado e/o fattori irriducibili di secondo grado. Per polinomi reali questa scomposizione esiste sempre, e la sua determinazione richiede la conoscenza delle radici del polinomio (cosa che non è sempre realizzabile in modo concreto).
Ricordiamo che se il grado del numeratore $N(x)$ è maggiore o uguale al grado di $D(x)$ la divisione tra polinomi (vedi MiniMat, Lezione 3) porta a

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

dove $Q(x), R(x)$ sono polinomi, e il grado di $R(x)$ è inferiore a quello di $D(x)$. Perciò, poichè il calcolo di $\int Q(x)\,dx$ è immediato, ci occupiamo solo di frazioni del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ dove il grado di $N(x)$ è inferiore a quello di $D(x)$.
Non esponiamo il metodo in generale per il calcolo di

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

ma ci limitiamo ad illustrare alcuni esempi, in cui il denominatore $D(x)$ ha grado al più 2.

1. Se il denominatore è un polinomio di primo grado la funzione ha la forma

   $$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}$$

   con $\alpha \neq 0$. In questo caso l'integrazione è semplice e si ottiene

   $$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}\log|\alpha x + \beta| + c$$

2. Consideriamo il caso in cui il denominatore ha grado 2 (ossia $D(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$ con $\alpha \neq 0$); in questo caso il numeratore ha grado minore o uguale ad 1. Il procedimento da seguire per determinare l'integrale generale è diverso a seconda che il denominatore abbia discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ positivo, nullo o negativo.

   (a) Caso $\Delta > 0$. La frazione $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{mx+q}{x^2+\beta x+\gamma}$ può sempre essere scritta come somma di due frazioni con denominatori di I grado. Per farlo, è sufficiente trovare le due radici di $D(x)$. Ad esempio:

   $$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

   con A e B costanti opportune. Per determinare queste costanti, sviluppiamo i calcoli dell'ultima uguaglianza:

   $$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

da cui

$$x+1=(A+B)x-2A-B\,.$$

Ciò deve valere per ogni x, per cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx &= \int \frac{(-2)}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{x-2}\,dx= \\ &= -2\log|x-1|+3\log|x-2|+c\end{aligned}$$

(b) Caso $\Delta=0$. In questo caso $D(x)$ è il quadrato di un binomio di I grado. Analogamente a prima, cerchiamo due costanti A e B in modo che $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ si scriva come somma di due frazioni; ad esempio:

$$\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}.$$

Risolvendo il sistema che si ottiene ponendo che, per ogni x, valga l'uguaglianza

$$Ax-A+B=x+3$$

si ottiene $A=1$ e $B=4$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{4}{(x-1)^2}\,dx \\ &= \log|x-1|-\frac{4}{x-1}+c.\end{aligned}$$

(c) Caso $\Delta<0$. Il denominatore $D(x)$ non ha radici reali. Scriviamo $N(x)$ come $AD'(x)+B$ con A,B costanti opportune (e dove $D'(x)$ è la derivata del denominatore). Ad esempio:

$$\frac{6x+7}{x^2+4x+5}=\frac{A(2x+4)+B}{x^2+4x+5}.$$

da cui si ricava $A=3$ e $B=-5$.
Il termine $\dfrac{D'(x)}{D(x)}$ porta alla primitiva $\log|D(x)|$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{x^2+4x+5}\,dx &= 3\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx-5\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx \\ &= 3\log\left|x^2+4x+5\right|-5\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx\end{aligned}$$

Ora, conviene ricordare che un trinomio di II grado con discriminante negativo non cambia mai segno, per cui è sempre positivo, o sempre negativo, a seconda che lo sia il coefficiente di x^2 (o, se ci piace di più, a seconda che lo sia il termine noto). Se, come

nell'esempio, il trinomio è sempre positivo, possiamo innanzitutto eliminare il valore assoluto. Inoltre, scriviamo il trinomio come somma di quadrati nel modo seguente

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$$

da cui $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx.$
Mediante la sostituzione $x+2=t$ si ottiene

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c, \qquad \text{cioè} \quad \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} = \arctan(x+2) + c$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{x^2+4x+5}\,dx &= 3\log(x^2+4x+5) - 5\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx \\ &= 3\log(x^2+4x+5) - 5\arctan(x+2) + c.\end{aligned}$$

Illustriamo il procedimento da seguire in quest'ultimo caso con un altro esempio.

Esempio 8.17 Determinare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Il trinomio $D(x) = x^2+x+1$ ha discriminante $\Delta = -3 < 0$ e termine noto $1 > 0$, per cui assume sempre valori positivi. La sua derivata è $D'(x) = 2x+1$, per cui cerchiamo due costanti A e B tali che, per ogni x, valga

$$A(2x+1) + B = x.$$

Si trova che $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\end{aligned}$$

Inoltre, il denominatore può essere scritto come somma di quadrati nel seguente modo

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Infine con il cambio di variabile $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = t$ (e quindi $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$) ci si riporta ad un integrale di un arcotangente e si ottiene

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

In definitiva si ha quindi che

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c.\end{aligned}$$

Esempio 8.18 Determinare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{4x+5}{x^2+2x+1}.$$

Il trinomio $D\left(x\right) = x^2+2x+1 = \left(x+1\right)^2$ ha derivata $D'\left(x\right) = 2(x+1)$ e quindi $N(x) = 2D'\left(x\right)+1$. Perciò:

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+1}\,dx = 2\int \frac{D'\left(x\right)}{D\left(x\right)}\,dx + \int \frac{1}{\left(x+1\right)^2}\,dx = 4\log\left|x+1\right| - \frac{1}{x+1}+c.$$

Argomento 8
Esercizi

Ex. 8.1 Determinare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int \sqrt[5]{x}\, dx$ 2) $\int \frac{1}{6x^7}\, dx$ 3) $\int (\frac{2}{x} - x^3 + 4x^2)\, dx$

4) $\int (\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} + e^x)\, dx$ 5) $\int (4-x)(x+2)\, dx$ 6) $\int (\sqrt[3]{x} - 1)^3\, dx$

7) $\int \frac{x^3 - 4\sqrt{x} + 1}{x^2}\, dx$ 8) $\int \left(\cos x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\, dx$ 9) $\int \left(e^x + \frac{1}{x^2+1}\right)\, dx$

10) $\int \frac{7x+2}{x}\, dx$ 11) $\int \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)\, dx$ 12) $\int (2\sin x - \cos x)\, dx$

13) $\int e^{x-1}\, dx$ 14) $\int 4^x\, dx$ 15) $\int \frac{(x+1)^2}{3x}\, dx$

16) $\int \frac{x+5}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ 17) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx$ 18) $\int \frac{x - \sqrt{x} - 2}{1+\sqrt{x}}\, dx$

19) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ 20) $\int \frac{e^x + 2}{e^x}\, dx$ 21) $\int \frac{x^4 - 16}{x+2}\, dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 8.2 Determinare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int \frac{1}{(x+3)^2}\, dx$ 2) $\int (2x+5)^7\, dx$ 3) $\int \frac{1}{2-3x}\, dx$

4) $\int \sqrt[3]{4-x}\, dx$ 5) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$ 6) $\int 4^{2x}\, dx$

7) $\int \frac{1}{7x+5}\, dx$ 8) $\int (7x+5)^{13}\, dx$ 9) $\int \sin\left(\frac{x+4}{2}\right)\, dx$

10) $\int e^{3x-5}\, dx$ 11) $\int \frac{5}{\sqrt[3]{2-x}}\, dx$ 12) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x}}\, dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 8.3 Ricordando che $\int g'(f(x))\, f'(x)\, dx = g(f(x)) + c$, determinare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int (2x + e^x)\left(x^2 + e^x\right)^5\, dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ 3) $\displaystyle\int (6x+2)e^{3x^2+2x}\, dx$

4) $\displaystyle\int \sin x(1-\cos x)^2\, dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx$ 6) $\displaystyle\int 2xe^{x^2-1}\, dx$

7) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$ 9) $\displaystyle\int \sin x \sin(\cos x)\, dx$

10) $\displaystyle\int \frac{2\log(x-4)}{x-4}\, dx$ 11) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5+\log x}}{x} dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{2e^x}{1+e^x}\log\left(1+e^x\right)\, dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 8.4 Determinare i seguenti integrali indefiniti con la formula di integrazione per sostituzione $(*)$:

1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$ 2) $\displaystyle\int \tan x\, dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx$

4) $\displaystyle\int \frac{7x^2}{4+x^3}\, dx$ 5) $\displaystyle\int x\sin\left(x^2\right)\, dx$ 6) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$

7) $\displaystyle\int \left(\cos x + \cos^3 x + \cos^5 x\right)\sin x\, dx$ 8) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\, dx$ 9) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+5}\, dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 8.5 Mediante la regola di integrazione per parti (♣), determinare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int x\log x\, dx$ 2) $\displaystyle\int (x+1)e^x\, dx$ 3) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^3}\, dx$ 5) $\displaystyle\int \left(3x^2+2\right)\log\left(2+x^2\right)\, dx$ 6) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$

7) $\displaystyle\int x\log^2 x\, dx$ 8) $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx$ 9) $\displaystyle\int x^2\sin x\, dx$

10) $\displaystyle\int e^x\sin x\, dx$ 11) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}-1\right)^2\log x\, dx$ 12) $\displaystyle\int \sin(\log x)\, dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 8.6 Calcolare le primitive delle seguenti funzioni razionali:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+2x+2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-3x+2}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 8.7 Utilizzando una delle tecniche utilizzate negli esercizi precedenti, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int (x+2)\log x\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x-2)^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log^3 x}\,dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

7) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int e^x \log(1+e^x)\,dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

Suggerimento *Soluzione*

Ex. 8.8 Sia f la funzione tale che $f'(x) = \log(x+2)$ e $f(0) = \log 2$. Allora $f(e-2)$ vale:

A. $\log 2 - e$; **B**. $2 - \log 2$; **C**. $e + 2$; **D**. $e - 2 + \log 2$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Argomento 8
Esercizi: suggerimenti

Ex. 8.4.

2) $t = \cos x$; 6) $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x \left(1 - \sin^2 x\right)$, e usare $t = \sin x$;
7) $t = \cos x$; 8) $t = \sqrt{x-1}$; 9) $t = \sqrt[3]{x+5}$.

Ex. 8.5

1) Scegliere x come fattore differenziale e $\log x$ come fattore finito; in questo modo, nell'integrale al secondo membro della formula (♣) il logaritmo non compare più.

3) $\arctan x = 1 \cdot \arctan x$: scegliere 1 come fattor differenziale e $\arctan x$ come fattor finito. Poi, nel secondo integrale, al numeratore si ha quasi la derivata del denominatore.

4) Scegliere $\log x$ come fattore finito.

5) Scegliere $\log\left(2 + x^2\right)$ come fattore finito. Nel successivo integrale, osservare che $x^3 + 2x = x\left(2 + x^2\right)$.

6) Scegliere x come fattore finito. Con l'altra scelta, il successivo integrale è più difficile del primo (vd. Es. 8.16).

7) Scegliere $\log^2 x$ come fattore finito; poi, usare un'altra volta (♣).

9) Scegliere x^2 come fattore finito.

10) Il termine e^x può indifferentemente essere scelto come fattore finito o fattore differenziale; bisognerà applicare (♣), ripetendo la stessa scelta.

12) Scegliere $\sin(\log x)$ come fattore finito, e applicare (♣) due volte.

Ex. 8.7.

1) $t = e^x - 1$; 2) Scegliere $\log x$ come fattore finito; 3) Funzioni razionali, caso 2(b).
4) $t = \log x$; 5) $t = 1 + \sqrt{x}$; 6) Integrare per parti, scegliendo $(\log x)^2$ come fattore finito.
7) $t = \sqrt{x}$, e poi integrare per parti; 8) $t = 1 + e^x$;

9) $t = \sqrt{x-1}$, da cui $x = t^2 + 1$, $dx = 2t\, dt$.

Ex. 8.8.

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\ dt$$

Argomento 8

Soluzioni Esercizi

Sol. Ex. 8.1.

1) $\frac{5}{6}\left(\sqrt[5]{x}\right)^6 + c$
2) $-\frac{1}{36x^6} + c$
3) $2\log|x| - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$
4) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - \frac{2}{x} + e^x + c$
5) $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x + c$
6) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 + \frac{9}{4}\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 - x + c$
7) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + c$
8) $\sin x + 6\sqrt{x} + c$
9) $e^x + \arctan x + c$
10) $7x + 2\log|x| + c$
11) $\frac{1}{2}x^2 - x + c$
12) $-2\cos x - \sin x + c$
13) $e^{x-1} + c$
14) $\frac{1}{\ln 4}4^x + c$
15) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\log|x| + c$
16) $\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 + \frac{15}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + c$
17) $x + \arctan x + c$
18) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - 2x + c$
19) $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 + c$
20) $x - \frac{2}{e^x} + c$
21) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + c$

Sol. Ex. 8.2.

1) $-\frac{1}{x+3} + c$
2) $\frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$
3) $-\frac{1}{3}\log|2-3x| + c$
4) $-\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4-x}\right)^4 + c$
5) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$
6) $\frac{1}{2\log 4}4^{2x} + c$
7) $\frac{1}{7}\log|7x+5| + c$
8) $\frac{1}{98}(7x+5)^{14} + c$
9) $-2\cos\left(\frac{x+4}{2}\right) + c$
10) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + c$
11) $-\frac{15}{2}\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2 + c$
12) $\frac{5}{12}\left(\sqrt[5]{3x}\right)^4 + c$

Sol. Ex. 8.3.

1) $\frac{1}{6}\left(x^2+e^x\right)^6+c$ 2) $\log\left(1+x^2\right)+c$ 3) $e^{3x^2+2x}+c$

4) $\frac{1}{3}(1-\cos x)^3+c$ 5) $\frac{1}{2}\log^2 x+c$ 6) $e^{x^2-1}+c$

7) $2\sqrt{4+x^2}+c$ 8) $\log\left(e^x+1\right)+c$ 9) $\cos\left(\cos x\right)+c$

10) $\log^2\left(x-4\right)+c$ 11) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{5+\log x}\right)^3$ 12) $\log^2\left(1+e^x\right)$

Sol. Ex. 8.4.

1) $\sqrt{x^2-1}+c$ 2) $-\log\left|\cos x\right|+c$

3) $\frac{1}{2}\arctan 2x+c$ 4) $\frac{7}{3}\log\left|4+x^3\right|+c$

5) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)+c$ 6) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$

7) $-\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{4}\cos^4 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+c$ 8) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+c$

9) $\frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^7-\frac{15}{4}\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^4+c$

Sol. Ex.8.5.

1) $\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+c$ 2) xe^x+c

3) $x\arctan x-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c$ 4) $-\frac{\log x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$

5) $(x^3+2x)\log\left(2+x^2\right)-\frac{2}{3}x^3+c$ 6) $\cos x+x\sin x+c$

7) $\frac{1}{2}x^2\log^2 x-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+c$ 8) $-(x+1)e^{-x}+c$

9) $-x^2\cos x+2\cos x+2x\sin x+c$ 10) $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+c$

11) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3+x\right)\log x-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{8}{9}\left(\sqrt{x}\right)^3+x\right)+c$ 12) $\frac{1}{2}x\left[\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right]+c$

Sol. Ex. 8.6.

1) $-\frac{1}{3}\log|x+1|+\frac{1}{3}\log|x-2|+c$

2) $\frac{2}{x+1}+\log|x+1|+c$

3) $\frac{3}{2}\log(x^2+2\,x+2)-4\arctan(1+x)+c$

4) $2\,\log(x^2+9)+c$

5) $3\log|x-1|-2\log|x-2|+c$

6) $x-2\arctan x+c$

Sol. Ex. 8.7

1) $2\sqrt{(e^x-1)}+c$

2) $\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+2x\log x-2x+c$

3) $\frac{2}{x-2}+\log|x-2|+c$

4) $-\frac{1}{2\log^2 x}+c$

5) $2\,(1+\sqrt{x})\log\,(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}+c$

6) $x\log^2 x-2x\log x+2x+c$

7) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

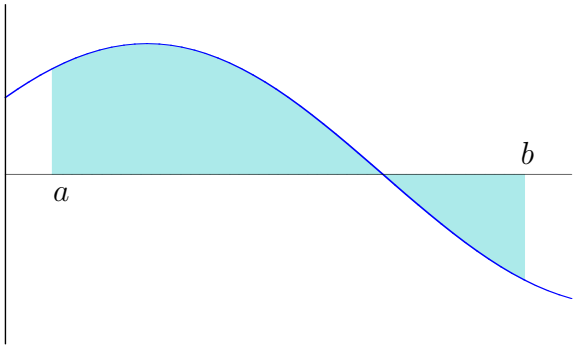
8) $(e^x+1)\log\,(e^x+1)-e^x+c$

9) $2\sqrt{x-1}-2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)+c$

Sol. Ex. 8.8: **B.**

Argomento 9
Integrali definiti

Premessa. Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$. La regione di piano compresa tra l'asse x, le due rette verticali di equazione $x=a$ e $x=b$, ed il grafico di f è detta *trapezoide* relativo ad f e ad $[a,b]$, ed è denotata con il simbolo $T(f,[a,b])$.



$T(f,[a,b])$

Nel semplice caso in cui $f(x)=C\,(\geq 0)$ il trapezoide è il rettangolo di vertici $(a,0)$, $(b,0)$, (b,C), (a,C), e la sua area vale $C(b-a)$. Per una generica funzione f continua in $[a,b]$ vogliamo costruire una procedura che ci permetta di *definire l'area* del trapezoide $T(f,[a,b])$ e che, nel caso f sia costante, fornisca lo stesso risultato.
Dovremo fare un po' di attenzione al linguaggio. La medesima procedura ci permetterà di definire, per il trapezoide $T(f,[a,b])$:

i) una nozione di **misura con segno**, legata sia all'estensione del trapezoide che alla sua posizione nel piano;

ii) una nozione di **area,** legata unicamente alla sua estensione, e svincolata dalla sua posizione nel piano.

Il numero che verrà indicato con il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ - l'**integrale definito** di f in $[a,b]$ - esprimerà la misura con segno del trapezoide; tuttavia, il procedimento per il suo calcolo sarà analogo a quello che ci permetterà anche di definire l'area del trapezoide[1].
Questi due concetti verranno a coincidere, quando la funzione assumerà solo valori ≥ 0.

9.1 Definizione di integrale definito

Per la funzione $f(x)=c$, costante in $[a,b]$, con c numero reale qualsiasi, il trapezoide $T(f,[a,b])$ è un rettangolo, con due vertici sull'asse x, contenuto nel semipiano superiore o inferiore a seconda che c sia positivo o negativo; la sua **misura con segno** è *definita* dal numero $c(b-a)$, mentre la sua area dal numero $|c|(b-a)$. Così, i due numeri coincidono se $c\geq 0$, mentre sono opposti nel caso $c<0$. La misura con segno risente del fatto che il rettangolo si possa trovare nel semipiano inferiore, mentre l'area dà peso all'effettiva estensione della regione.

[1] Il simbolo di integrale qui utilizzato non ha, per ora, legami con il simbolo utilizzato nell'Arg. 8. Nel Corollario 9.6 si chiarirà perchè si utilizza lo stesso simbolo.

Vogliamo utilizzare questo esempio per definire la nozione di misura con segno (e di area) anche per il trapezoide di una generica funzione f continua in un intervallo $[a,b]$.
Grazie al teorema di Weierstrass (vd. Arg. 5) la funzione f assume massimo assoluto M e minimo assoluto m in $[a,b]$. In Fig. 1 è rappresentato il caso in cui $0 \leq m \leq f(x) \leq M$, ed è immediato osservare che il trapezoide $T(f,[a,b])$ è contenuto in un rettangolo la cui misura con segno vale $M(b-a)$, e contiene un rettangolo avente misura con segno $m(b-a)$. In Fig. 2 invece abbiamo il caso $m \leq f(x) \leq M \leq 0$, ed il trapezoide è compreso tra due rettangoli aventi misura con segno $m(b-a)$ e $M(b-a)$.

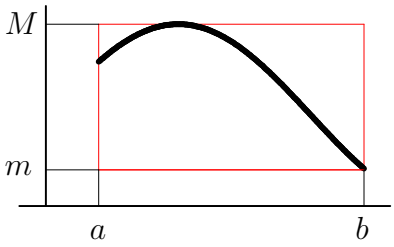


Fig. 1

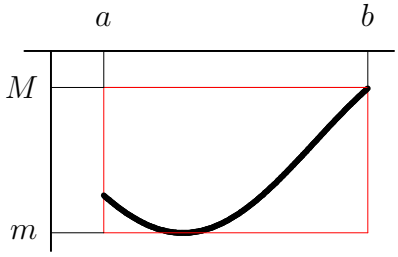


Fig. 2

Comunque, la relazione $m(b-a) \leq M(b-a)$ è sempre vera, ed intuitivamente vogliamo ottenere per la misura con segno di $T(f,[a,b])$ un valore compreso tra questi.

♦ Somme superiori ed inferiori

Per $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli uguali, tutti di ampiezza $\dfrac{b-a}{n}$, utilizzando i punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\,.$$

Se M_i ed m_i indicano il massimo ed il minimo di f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ (questi valori esistono, ancora grazie al teorema di Weierstrass), le quantità

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{M_i(b-a)}{n} \quad \text{e} \quad m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{m_i(b-a)}{n}$$

rappresentano le misure con segno di due rettangoli che, rispettivamente, contengono e sono contenuti in $T(f,[x_{i-1},x_i])$, cioè quella porzione di trapezoide $T(f,[a,b])$ relativa all'intervallo $[x_{i-1},x_i]$ (almeno per f di segno costante in $[x_{i-1},x_i]$ questo è evidente dalla Fig. 3).

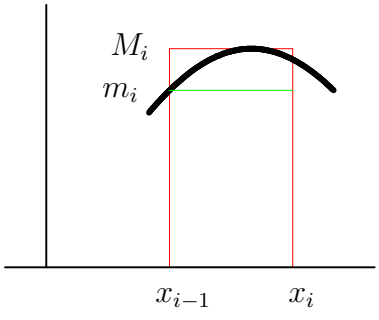


Fig. 3

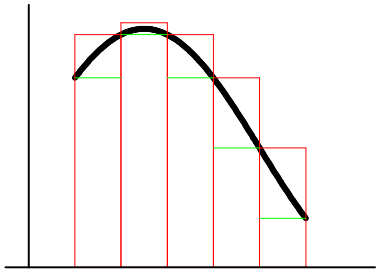


Fig. 4

Definizione 9.1 La somma delle misure con segno del primo gruppo di n rettangoli

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

è detta **somma superiore** $n-$sima di f relativa ad $[a,b]$.
Similmente, la

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

è detta **somma inferiore** $n-$sima.

Ovviamente $s_n \leq S_n$ per ogni n, e le due somme forniscono approssimazioni (rispettivamente per eccesso e per difetto) della misura con segno di $T(f,[a,b])$, che è la quantità che vogliamo definire (vd. Fig. 4).

♦ Integrale definito

Al crescere di n cresce il numero di intervalli e ne decresce l'ampiezza; non solo, ma accade che le sequenze numeriche $\{S_n\}$ ed $\{s_n\}$ soddisfino

$$m(b-a) = s_1 \leq s_n \leq S_n \leq S_1 = M(b-a) \ .$$

Così, esistono sia l'estremo inferiore dell'insieme $\{S_n\}$ che l'estremo superiore dell'insieme $\{s_n\}$. Inoltre, è possibile dimostrare che l'estremo superiore delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori, cioè

$$\inf_n S_n = \sup_n s_n \ .$$

Definizione 9.2 Questo numero viene detto **integrale definito di f in $[a,b]$**, o anche misura con segno di $T(f,[a,b])$ *e* viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad \left(= \inf_n S_n = \sup_n s_n\right) .$$

La funzione f è detta *funzione integranda*, mentre $[a,b]$ è l'*intervallo di integrazione*.

Nota: Per definire l'integrale, non è obbligatorio ricorrere alle somme superiori o a quelle inferiori. Un altro metodo, anch'esso equivalente a questi due, è presentato a fine capitolo.

♦ Area

Dopo aver costruito l'integrale definito di una funzione continua, utilizziamo questo concetto per la seguente

Definizione 9.3 L'**area** del trapezoide $T(f,[a,b])$ è definita come l'integrale definito della funzione $|f|$ (che è ancora una funzione continua) cioè

$$area\ \left(T(f,[a,b])\right) = \int_a^b |f(x)|\ dx \ .$$

Ovviamente, questo numero non è mai negativo.

♦ Un riepilogo

Fin qui non abbiamo introdotto restrizioni sul segno di f, ma è interessante analizzare come l'integrale definito può essere interpretato, a seconda delle informazioni che si hanno sui segni della funzione integranda.

• Se f è una funzione continua e *mai negativa* ($f \geq 0$) in $[a,b]$ (vd. Fig. 1) il trapezoide $T(f,[a,b])$ è contenuto nel semipiano superiore, e l'integrale definito $\int_a^b f(x)\ dx$ fornisce sia il valore della sua misura con segno, sia quello della sua area, che coincidono.

• Se invece $f \leq 0$ in $[a,b]$ (vd. Fig. 2) il trapezoide $T(f,[a,b])$ è contenuto nel semipiano inferiore, e tutti gli addendi presenti nelle somme superiori ed inferiori sono ≤ 0; perciò $\int_a^b f(x)\ dx \leq 0$. Questo numero rappresenta la misura con segno del trapezoide $T(f,[a,b])$, ed è uguale all'opposto del valore dell'area.

• Se c è un punto interno all'intervallo $[a,b]$, e se la funzione f, continua in $[a,b]$, assume valori ≥ 0 in $[a,c]$ e valori ≤ 0 in $[c,b]$ (vd. Fig. 5) l'integrale di f in $[a,b]$ coincide con la somma

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ . \qquad (\clubsuit)$$

Qui, il I addendo del termine di destra è il contributo (≥ 0) relativo all'intervallo $[a,c]$ (in cui $f(x) \geq 0$); il II addendo è invece il contributo (≤ 0) relativo all'intervallo $[c,b]$.
L'integrale rappresenta la misura con segno della regione compresa l'asse x ed il grafico di f; questa si ottiene sommando i contributi, di segno opposto, relativi agli intervalli in cui ha segno diverso. Equivalentemente, $\int_a^b f(x)\ dx$ si ottiene come differenza tra l'area del trapezoide $T(f,[a,c])$ e l'area del trapezoide $T(f,[c,b])$. In pratica, l'integrale di f è un "bilancio" tra i contributi di opposto segno della funzione.
Questo numero può perciò avere segno positivo, negativo, o anche nullo (in caso di bilancio "in pareggio"); si ottiene sommando le aree delle regioni che si trovano nel semipiano superiore, e sottraendo le aree delle regioni che si trovano nel semipiano inferiore
In modo del tutto analogo la formula ($\clubsuit$) permette di interpretare $\int_a^b f(x)\ dx$ quando f in $[a,b]$ è continua e cambia di segno un numero finito di volte (vd. Fig. 6).

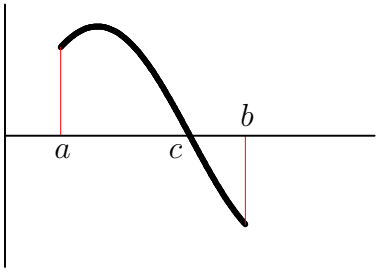


Fig. 5

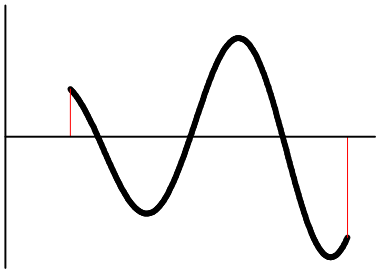


Fig. 6

• L'area del trapezoide $T(f,[a,b])$ si ottiene sommando tutte le aree coinvolte; queste hanno tutte valore ≥ 0, indipendemente dalla loro posizione rispetto all'asse x (vd. Fig. 7). Questo si riassume

nella formula

$$\boxed{area\ T\left(f,[a,b]\right)=\int_a^b |f\left(x\right)|\ dx} \qquad (\spadesuit)$$

che mostra, tra l'altro, che l'area e la misura con segno coincidono se e solo se $f \geq 0$. (N.B.: l'area ha valore nullo solo quando $f\left(x\right)=0$ per ogni $x \in [a,b]$).

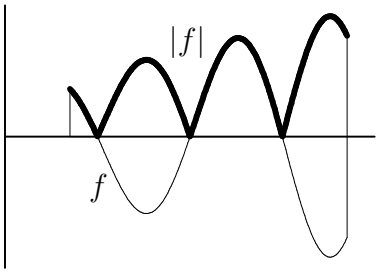


Fig. 7

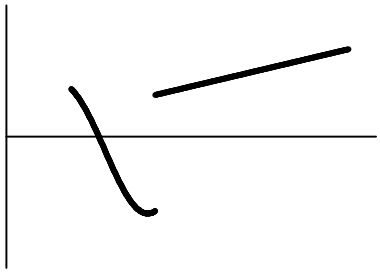


Fig. 8

• La formula (♣) ci permette di definire l'integrale $\int_a^b f\left(x\right)\ dx$ anche se la funzione f ha nel punto $c \in (a,b)$ una discontinuità di prima specie (vd. Fig. 8). Il discorso si può estendere facilmente anche a funzioni che presentano un numero finito di queste discontinuità. Così, le funzioni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ di cui è possibile calcolare l'integrale non devono necessariamente essere continue. [2]

• Con la formula (♠) possiamo anche calcolare l'area di una regione di piano delimitata dalle rette verticali $x=a$, $x=b$, e dai grafici di due funzioni continue $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$. Se sappiamo che in $[a,b]$ vale sempre $f\left(x\right) \geq g\left(x\right)$ (vd. Fig. 9) l'area della regione che ha il grafico di f come "tetto" e quello di g come "pavimento" si ottiene calcolando

$$\int_a^b \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\ dx.$$

Tuttavia, non è realmente importante sapere quale delle due funzioni assume il valore più grande, anzi i due grafici possono persino incrociarsi (vd. Fig. 10). Per il calcolo dell'area di questa regione è sufficiente calcolare

$$\int_a^b |f\left(x\right)-g\left(x\right)|\ dx.$$

La conoscenza di quale funzione ha il grafico che serve da "tetto" è semmai di utilità per il calcolo esplicito dell'area, come vedremo nell'Esempio 9.12.

[2] L'insieme delle funzioni per cui il simbolo $\int_a^b f\left(x\right)\ dx$ ha significato è molto ampio; una sua descrizione completa esula dagli scopi di queste note. Segnaliamo comunque che tutte le funzioni continue in $[a,b]$ ammettono integrale definito, anche se cambiano infinite volte di segno.

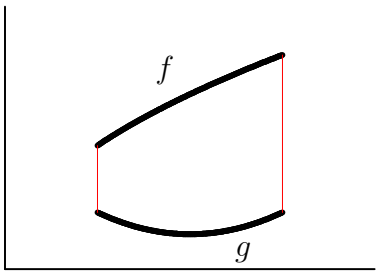


Fig. 9

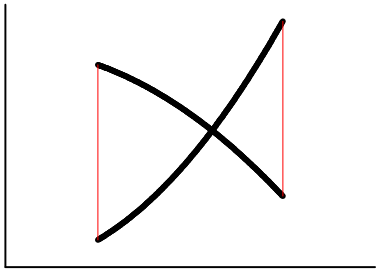


Fig. 10

9.2 Proprietà dell'integrale definito

• Dal significato di misura con segno dell'integrale definito è chiaro il comportamento che questo ha rispetto ad eventuali cambiamenti che si possono operare sull'intervallo di integrazione. Se $a < c < b$, ha senso parlare dell'integrale di f in $[a, c]$ e in $[c, b]$ se e solo se ha senso parlare dell'integrale di f in $[a, b]$, e i tre integrali sono legati dalla (♣), che richiamiamo:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ .$$

Questo comportamento viene descritto dicendo che l'integrale è **additivo rispetto agli intervalli.**

• Quando l'intervallo di integrazione ha la forma $[-b, b]$, eventuali simmetrie di f possono facilitare il calcolo di $\int_{-b}^{b} f(x)\ dx$. Infatti, se f è pari (vd. Arg. 1) i contributi degli intervalli $[-b, 0]$ e $[0, b]$ sono uguali, per cui

$$\int_{-b}^{b} f(x)\ dx = 2\int_0^b f(x)\ dx\ ;$$

se invece f è dispari, i due intervalli $[-b, 0]$ e $[0, b]$ contribuiscono in modo opposto, e quindi

$$\int_{-b}^{b} f(x)\ dx = 0\ .$$

Esempio 9.4 La funzione $f(x) = \sin x$ è dispari, per cui il suo integrale su ogni intervallo del tipo $[-b, b]$ vale 0.

• Per aumentare, ai fini del calcolo, la flessibilità della nozione di integrale è anche utile adottare le seguenti convenzioni:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\ dx = 0} \quad ; \quad \boxed{\text{per } a < b: \quad \int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx}$$

• Un'altra proprietà utile per il calcolo: l'integrale è **lineare** rispetto alla funzione integranda, cioè:

$$\int_a^b \alpha f(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

• Un'ultima segnalazione: il nome della variabile x nel simbolo $\int_a^b f(x)\ dx$ è puramente convenzionale; lo stesso numero è rappresentato dalle scritture $\int_a^b f(t)\ dt$, $\int_a^b f(y)\ dy, \ldots$ Questo fatto viene riassunto dicendo che la variabile di integrazione è "muta".

9.3 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ricordiamo che, data una funzione f, il suo integrale indefinito è un insieme di funzioni, mentre il suo integrale definito è un numero reale. Vogliamo ora mostrare che tra questi due concetti esiste un legame.

• Se f è una funzione continua in $[a,b]$, per ogni $x \in [a,b]$ possiamo calcolare l'integrale definito $\int_a^x f(t)\ dt$; questa è una quantità che dipende da $x \in [a,b]$. Abbiamo perciò costruito una funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, detta **funzione integrale di** f, definita come:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Il seguente teorema dà il legame tra una funzione continua f e la sua funzione integrale F.

Teorema 9.5 (teorema fondamentale del calcolo integrale)
Sia f continua in $[a,b]$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la funzione integrale di f. Allora:

$*)$ *F è derivabile in (a,b) ed è continua in $[a,b]$;*

$*)$ *$F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$.*

• Questa teorema completa, e precisa, quanto detto in Arg. 8 (vedi Propos. 8.3) relativamente all'esistenza di una primitiva per ogni funzione continua. Infatti, il risultato precedente può essere anche riformulato nel seguente modo:

Sia f continua in $[a,b]$ e sia F la sua funzione integrale. Allora F è una primitiva di f.

In particolare, osserviamo che la funzione integrale F è la primitiva di f che vale 0 in a (perchè abbiamo convenuto di porre $\int_a^a f(x)\ dx = 0$).

• Il seguente corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce un metodo per il calcolo esplicito degli integrali definiti (e un legame tra integrali indefiniti e integrali definiti, come preannunciato nella Nota iniziale).

Corollario 9.6 (formula fondamentale del calcolo integrale)
Sia f continua in $[a,b]$ e sia G una qualunque primitiva di f. Allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)\ .}$$

(Per comodità, la quantità $G(b) - G(a)$ viene solitamente indicata con la scrittura $[G(x)]_a^b$).

• Così, l'operazione di calcolo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\ dx$ comporta i seguenti due passi:

$$\begin{cases} i) & \text{si determina una primitiva } G \text{ della funzione } f \text{ (vd. Arg.8);} \\ ii) & \text{si calcola il numero } G(b) - G(a)\text{, che coincide con l'integrale cercato.} \end{cases}$$

Conviene osservare che il numero $\int_a^b f(x)\ dx$ non dipende dalla primitiva di f che abbiamo scelto. Infatti, tutte le primitive di f differiscono per costanti additive, e queste costanti vengono eliminate quando si calcola la differenza tra i valori assunti dalla primitiva scelta nei punti $x = a$ e $x = b$.

♦ **Esempi**

9.7 Calcoliamo $\int_0^\pi \sin x\, dx$.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \text{quindi} \qquad \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Poichè $\sin x \geq 0$ per $0 \leq x \leq \pi$ (vd. Fig. 11), l'integrale trovato rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione, e le rette $x = 0$ e $x = \pi$.
Utilizzando questo risultato e quanto visto nell'Esempio 9.4, possiamo anche dedurre che il trapezoide $T(\sin x, [-\pi, \pi])$ ha misura con segno nulla (perchè $\sin x$ è dispari) ed area 4 (perchè $|\sin x|$ è pari).

9.8 Calcoliamo $\int_1^e \frac{1}{x}\ dx$ (vd. Fig. 12).

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c \qquad \text{quindi} \qquad \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_1^e = \log e - \log 1 = 1\ .$$

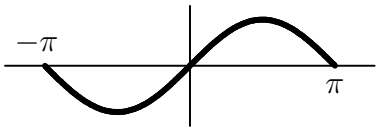


Fig. 11

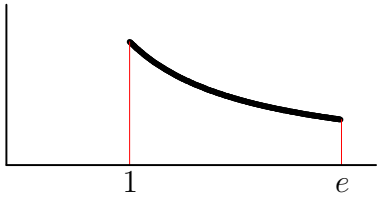


Fig. 12

9.9 Calcolare l'area della regione piana A compresa tra le rette verticali di equazioni $x = -1/2$, $x = 3/2$, l'asse x ed il grafico della funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
La regione può essere descritta come $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2},\ 0 \le y \le 3x^2 - 2x + 1\right\}$. La funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ non assume mai valori negativi (vd. Fig. 13), per cui l'area di A si ottiene come

$$\int_{-1/2}^{3/2} \left(3x^2 - 2x + 1\right)\ dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_{-1/2}^{3/2} = \left(\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}\,.$$

9.10 Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\ dx$, dove $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 6 - x & \text{se } 1 < x \le 3 \end{cases}$.
La funzione è continua in $[-1,1) \cup (1,3]$, e in $x = 1$ ha una discontinuità di I specie (vd. Fig. 14). Perciò

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f(x)\ dx &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 2x\right)\ dx + \int_{1}^{3} (6 - x)\ dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{1} + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} \\ &= \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] + \left[\left(18 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{26}{3}\,.\end{aligned}$$

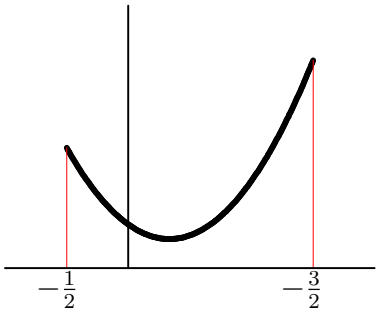


Fig. 13

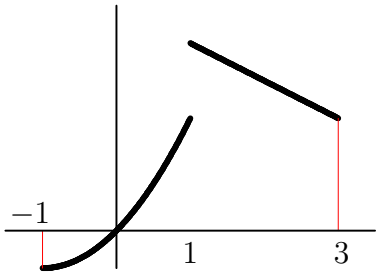


Fig. 14

9.11 Calcolare l'area della regione C racchiusa dalle curve $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = -1$ e $y = 5 - x$.
Le tre curve si intersecano, a due a due, nei punti $(1,-1)$, $(6,-1)$ e $(4,1)$ (vd. Fig. 15). La regione C, di cui vogliamo calcolare l'area, si ottiene come unione delle regioni $A = \{1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2\sqrt{x} - 3\}$ e $B = \{4 \le x \le 6,\ -1 \le y \le 5 - x\}$. Così, per la regione A il "tetto" è rappresentato dal grafico di $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$, mentre per B questo ruolo è ricoperto dal grafico di $h(x) = 5 - x$. In entrambi i casi il grafico di $g(x) = -1$ è il "pavimento". Quindi

$$\begin{aligned}area\ (A) &= \int_{1}^{4} \left[\left(2\sqrt{x} - 3\right) - (-1)\right]\ dx = \int_{1}^{4} 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\ dx \\ &= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_{1}^{4} = \frac{10}{3}\,.\end{aligned}$$

Per la regione B possiamo ancora impostare il calcolo dell'integrale

$$area\ (B) = \int_{4}^{6} \left[(5 - x) - (-1)\right]\ dx\,,$$

ma è forse più semplice osservare che si tratta di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno entrambi lunghezza 2, per cui l'area di B vale 2. In totale,

$$area\ (C) = area\ (A) + area\ (B) = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}\ .$$

9.12 Calcolare l'area della regione C racchiusa dalle due rette verticali $x = 1$, $x = 3$, e dalle due curve $y = x^2$, $y = 6 - \dfrac{x^2}{2}$. La formula

$$area\ (C) = \int_1^3 |f(x) - g(x)|\ dx$$

è difficilmente utilizzabile per il calcolo dell'integrale; conviene capire dove i grafici delle due curve si intersecano. Ciò avviene nel punto $(2, 4)$, ed osservando la Fig.16 abbiamo

$$\begin{aligned} area\ (C) &= \int_1^2 \left[\left(6 - \frac{x^2}{2}\right) - x^2\right]\ dx + \int_2^3 \left[x^2 - \left(6 - \frac{x^2}{2}\right)\right]\ dx \\ &= \int_1^2 \left(6 - \frac{3x^2}{2}\right)\ dx + \int_2^3 \left(\frac{3x^2}{2} - 6\right)\ dx \\ &= \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 6x\right]_2^3 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6\ . \end{aligned}$$

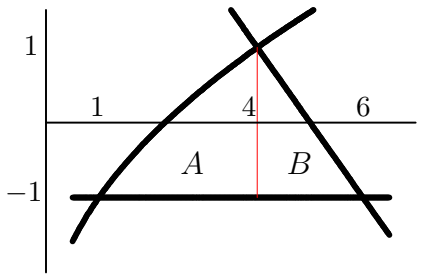


Fig. 15

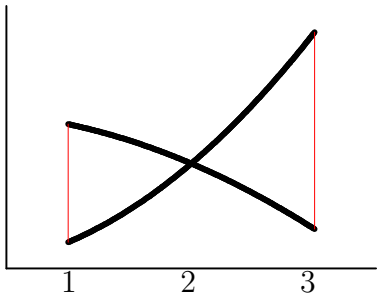


Fig. 16

♦ Il teorema della media integrale

Definizione 9.13 Se la funzione f ammette integrale in $[a, b]$ la sua **media integrale** è il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Teorema 9.14 (della media)
Se f è continua in $[a,b]$ allora esiste almeno un punto x_0 nell'intervallo (a,b) tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0).$$

Se f è positiva nell'intervallo $[a,b]$ il teorema della media afferma l'esistenza di almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che: l'area della regione compresa tra l'asse x, il grafico di f e le rette verticali $x=a$ e $x=b$ è uguale all'area del rettangolo di base $(b-a)$ e altezza $f(x_0)$. Non sono, in generale, date informazioni più precise sulla posizione di questo punto, nè sul fatto che sia o meno unico (vedi. Fig. 17).

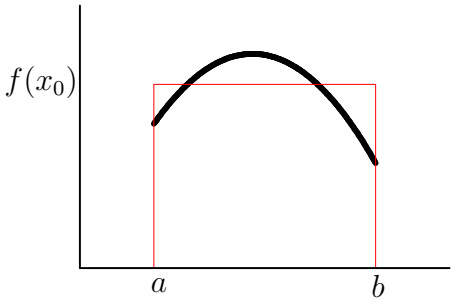


Fig. 17

Nota**:** Esistono costruzioni equivalenti dell'integrale definito, che non usano le somme superiori e inferiori. Una di queste utilizza, a partire da una funzione f continua in $[a,b]$, le somme di Riemann; queste sono definite scegliendo in ciascuno degli intervalli $[x_{i-1},x_i]$ un punto arbitrario t_i e ponendo

$$\mathbb{S}_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

Si può dimostrare che, per $n \to +\infty$, tali somme convergono all'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$, indipendentemente dalla scelta fatta per i punti t_i. L'arbitrarietà di queste scelte non permette però di stabilire se i valori $\mathbb{S}_n$ sono approssimazioni per eccesso o per difetto del valore dell'integrale.

Argomento 9
Esercizi

Ex. 9.1 Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^9 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(7x+\frac{1}{x}\right)\,dx$

6) $\displaystyle\int_3^4 \frac{3+x}{\sqrt{x}}\,dx$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^4+2\sqrt{x}-3}{x}\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^2 (e^x+2)\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^\pi (1+\cos x)\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

11) $\displaystyle\int_{-1}^3 e^x\,dx$

12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

13) $\displaystyle\int_1^e \frac{7x+2}{x}\,dx$

14) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\cos x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

15) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^4-16}{x+2}\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 9.2 Calcolare i seguenti integrali definiti

1) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2-x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-4}$

3) $\displaystyle\int_\pi^{3\pi} \sin\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 e^{3-2x}\,dx$

6) $\displaystyle\int_1^2 (3x-4)^5\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sin\left[2\pi\,(x-1)\right]\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right)\,dx$

9) $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} x^5\left(\frac{3}{x}+2\right)^5\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 9.3 Calcolare i seguenti integrali definiti

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x^3\,dx$ 3) $\displaystyle\int_{-5}^{-4} \frac{-2x}{9-x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(x^2)\,dx$ 5) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{-3}^{0} (2x+3)\,e^{x^2+3x}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt[3]{\cos x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{2e^x}{1+e^x}\log\left(1+e^x\right)\,dx$ 9) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x+3}\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 9.4 Calcolare i seguenti integrali definiti

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^2 e^x\,(x+2)\,\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\log(x+1))}{x+1}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^3}$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 9) $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{x^2-2x}\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\,dx$ 11) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ 12) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\log\left(x+1\right)}{x+1}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 9.5 Calcolare l'area della regione di piano :

1) Delimitata da $y=\dfrac{1}{x}$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$.

2) Sopra $y=x^2-4x$ e sotto l'asse x.

3) Sotto $y=\sqrt{x}$, sopra $y=\dfrac{2}{x}$ e a sinistra di $x=3$.

4) Sopra $y = |x|$ e sotto $y = 12 - x^2$.

5) Sotto $y = e^{-x}$ e sopra $y = 0$, da $x = -9$ a $x = 0$.

6) Delimitata da $y = |2x - 6|$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$, $x = 0$, $x = 3$.

7) Delimitata da $y = \sqrt[3]{-x}$, $y = \dfrac{1}{x+1} + 2$, $x = 0$, $x = 1$.

8) Compresa tra il grafico di $f(x) = -x(x+2)$ e le rette $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

9) Delimitata dal grafico di $f(x) = x^2 - 3x$ e dalle rette $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$.

10) Compresa tra le rette $x = 0$ e $x = 1$, e tra i grafici di $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ e $g(x) = -x$.

11) Compresa tra le rette $x = \pm 1$ e i grafici di $y = 2(1 - x^2)$ e di $y = (x-1)^2$.

12) Sotto $y = \cos x$, con $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$, e sopra alla retta passante per $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

13) $\left\{(x,y) : 1 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x-1} \leq y \leq \sqrt{3(x-1)}\right\}$.

14) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ \min(x, x^2) \leq y \leq \max(x, x^2)\}$.

15) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 4,\ (2y + x - 4)(2y - 3\sqrt{x}) \leq 0\}$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 9.6 La retta tangente al grafico della funzione $F(x) = 2e^2 + \displaystyle\int_1^x e^{3t^2 - t^3} dt$ nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione:

A. $y = e^2(x-1)$; B. $y = e^2(x-2)$; C. $y = e^2(x+1)$; D. $y = e^2(x+2)$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 9.7 La media integrale nell'intervallo $[1, e]$ della funzione $f(x) = 4x \log x$ vale:

A. $e + 1$; B. $\dfrac{e}{e-1}$; C. $\dfrac{1}{e-1}$; D. $\dfrac{e^2+1}{e-1}$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Argomento 9
Suggerimenti

Ex. 9.4

1) Integrare per parti scegliendo $\log x$ come fattore finito.
2) Se D indica la derivata, osservare che $D\left(e^x - 1\right) = e^x$.
3) Integrare per parti scegliendo e^x come fattore differenziale.
4) Osservare che $D\left(\log\left(x+1\right)\right) = \dfrac{1}{x+1}$.
5) Osservare che $D\left(x - \cos x\right) = 1 + \sin x$
6) Integrare per parti scegliendo x come fattore finito.
7) Osservare che $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.
8) Osservare che $D\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
9) Osservare che $\dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x}$.
10) Per sostituzione ponendo $t = e^x$.
11) Per sostituzione ponendo $t = \sqrt{x+1}$.
12) Osservare che $D\left(\log\left(x+1\right)\right) = \dfrac{1}{x+1}$.

Ex. 9.5

3) I grafici di $y = \sqrt{x}$ e di $y = \dfrac{2}{x}$ si intersecano nel punto di ascissa $\sqrt[3]{4}$.
4) I grafici di $y = |x|$ e di $y = 12 - x^2$ si intersecano nei punti di ascissa -3 e 3.
   Quindi $A = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(12 - x^2 - |x|\right)\, dx$. Poichè la regione è simmetrica rispetto all'asse y si ha che $A = 2\displaystyle\int_{0}^{3} \left(12 - x^2 - x\right)\, dx$.
8) La funzione $f\left(x\right) = -x\left(x+2\right)$ cambia segno in $x = 0$.
9) La regione è simmetrica rispetto ad $x = \dfrac{3}{2}$, e la funzione $f\left(x\right) = x^3 - 3x$ cambia segno in $x = 0$ e in $x = 3$.
11) I grafici delle curve $y = 2\left(1 - x^2\right)$ e $y = \left(x-1\right)^2$ si intersecano in $x = -\dfrac{1}{3}$ e $x = 1$.

14) $\min(x, x^2) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$, e quindi $\max(x, x^2) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$, per cui $|\max(x, x^2) - \min(x, x^2)| = \begin{cases} x - x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

15) $(2y + x - 4)(2y - 3\sqrt{x}) = 4\left(y - \dfrac{4-x}{2}\right)\left(y - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)$ ed il prodotto è negativo quando i segni dei due fattori sono discordi, cioè quando il punto (x, y) sta contemporaneamente sopra alla retta $y = \dfrac{4-x}{2}$ e sotto alla curva $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, o viceversa. Le curve si incontrano in $x = 1$. Perciò la regione si può anche descrivere come

$$\left\{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ \frac{3}{2}\sqrt{x} \le y \le \frac{4-x}{2}\right\} \cup \left\{(x, y) : 1 \le x \le 4,\ \frac{4-x}{2} \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{x}\right\}.$$

Ex. 9.6
La retta tangente al grafico della funzione $F(x)$ nel punto di ascissa x_0 ha equazione

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Quindi occorre calcolare $F(1)$ e $F'(1)$. Per calcolare la derivata può essere utile ricordare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Ex. 9.7
Occorre calcolare: $\dfrac{1}{\mathrm{e} - 1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 4x \log x \, dx$. Per determinare una primitiva di $4x \log x$ integrare per parti scegliendo $\log x$ come fattore finito.

Soluzioni Esercizi

Sol. Ex. 9.1

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

2) $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,dx = 2\left(\sqrt{x}\right)^3 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^9 3\sqrt{x}\,dx = 52$

3) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - 2\sqrt{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \frac{40}{3}$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = x - \frac{1}{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-2}^{-1} \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = \frac{3}{2}$

5) $\displaystyle\int \left(7x + \frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{7}{2}x^2 + \log|x| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-2}^{-1} \left(7x + \frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{21}{2} - \log 2$

6) $\displaystyle\int \frac{3+x}{\sqrt{x}}\,dx = 6\sqrt{x} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_3^4 \frac{3+x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{52}{3} - 8\sqrt{3}$

7) $\displaystyle\int \frac{2x^4 + 2\sqrt{x} - 3}{x}\,dx = \frac{x^4}{2} + 4\sqrt{x} - 3\log x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^2 \frac{2x^4 + 2\sqrt{x} - 3}{x}\,dx = \frac{7}{2} + 4\sqrt{2} - 3\log 2$

8) $\displaystyle\int (e^x + 2)\,dx = e^x + 2x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^2 (e^x + 2)\,dx = e^2 + 3$

9) $\displaystyle\int (1 + \cos x)\,dx = x + \sin x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\pi (1 + \cos x)\,dx = \pi$

10) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x} - 2}{1 + \sqrt{x}}\,dx = -2x + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x - \sqrt{x} - 2}{1 + \sqrt{x}}\,dx = -\frac{4}{3}$

11) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-1}^3 e^x\,dx = e^3 - \frac{1}{e}$

12) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = x + \arctan x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = 1 + \frac{\pi}{4}$

13) $\displaystyle\int \frac{7x+2}{x}\,dx = 7x + 2\log|x| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^e \frac{7x+2}{x}\,dx = 7e - 5$

14) $\displaystyle\int \left(\cos x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \sin x + 6\sqrt{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\pi \left(\cos x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\,dx = 6\sqrt{\pi}$

15) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 16}{x+2}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-1}^1 \frac{x^4 - 16}{x+2}\,dx = -\frac{52}{3}$

Sol. Ex. 9.2

1) $\displaystyle\int \sqrt{2-x}\,dx = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-x}\right)^3 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^2 \sqrt{2-x}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-4} = \log|x-4| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^3 \frac{dx}{x-4} = -2\log 2$

3) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_\pi^{3\pi} \sin\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = \frac{9}{2}$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(2x+1)} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}$

5) $\displaystyle\int e^{3-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{3-2x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 e^{3-2x}\,dx = \frac{e^3-e}{2}$

6) $\displaystyle\int (3x-4)^5\,dx = \frac{1}{18}(3x-4)^6 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^2 (3x-4)^5\,dx = \frac{7}{2}$

7) $\displaystyle\int \sin\left[2\pi(x-1)\right]\,dx = -\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{1/2} \sin\left[2\pi(x-1)\right]\,dx = \frac{1}{\pi}$

8) $\displaystyle\int \left(e^{x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right)\,dx = e^{x-1} + \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \left(e^{x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{e}$

9) $\displaystyle\int x^5\left(\frac{3}{x}+2\right)^5\,dx = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-1}^{-1/2} x^5\left(\frac{3}{x}+2\right)^5\,dx = \frac{21}{4}$

Sol. Ex. 9.3

1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log 2$

2) $\displaystyle\int x^2 \sin x^3\,dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x^3\,dx = 0$

3) $\displaystyle\int \frac{-2x}{9-x^2}\,dx = \log\left|x^2-9\right| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-5}^{-4} \frac{-2x}{9-x^2}\,dx = \log 7 - 4\log 2$

4) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin x^2 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(x^2)\,dx = 0$

5) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \sqrt{x^2+2x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$

6) $\displaystyle\int (2x+3)\, e^{x^2+3x}\, dx = e^{x^2+3x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-3}^{0} (2x+3)\, e^{x^2+3x}\, dx = 0$

7) $\displaystyle\int \sin x \sqrt[3]{\cos x}\, dx = -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)^4 + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\pi/2} \sin x \sqrt[3]{\cos x}\, dx = \frac{3}{4}$

8) $\displaystyle\int \frac{2e^x}{1+e^x} \log\left(1+e^x\right)\, dx = \log^2\left(1+e^x\right) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\log 2} \frac{2e^x}{1+e^x} \log\left(1+e^x\right)\, dx = \log^2 3 - \log^2 2$

9) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+3}\, dx = 2x - 6\log|x+3| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{-1}^{1} \frac{2x}{x+3}\, dx = 4 - 6\log 2$

Sol. Ex. 9.4

1) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{1}^{e} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx = 4 - 2\sqrt{e}$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\, dx = 2\sqrt{e^x-1} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\log 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\, dx = 2\sqrt{3}$

3) $\displaystyle\int e^x\,(x+2)\; dx = e^x(x+1) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{2} e^x\,(x+2)\; dx = 3e^2 - 1$

4) $\displaystyle\int \frac{\sin(\log(x+1))}{x+1}\, dx = -\cos\left(\log\left(x+1\right)\right) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{1} \frac{\sin(\log(x+1))}{x+1}\, dx = 1 - \cos\left(\log 2\right)$

5) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^3}\, dx = -\frac{1}{2\left(x-\cos x\right)^2} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\pi} \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^3}\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(\pi+1)^2}\right)$

6) $\displaystyle\int x\cos x\; dx = \cos x + x\sin x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\; dx = \frac{1}{2}\pi - 1$

7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + \arctan x + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\pi$

8) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 4$

9) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-2x}\, dx = \log|x-2| - \log|x| + c \quad \Longrightarrow \quad \int_{3}^{4} \frac{2}{x^2-2x}\, dx = \log 3 - \log 2$

10) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\, dx = e^x + \log\left(e^x+1\right) + c \qquad \int_{0}^{1} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}\, dx = e - 1 + \log\left(\frac{e+1}{2}\right)$

11) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + c \qquad \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$

12) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log^2(x+1) + c \qquad \Longrightarrow \quad \int_0^3 \frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx = 2(\log 2)^2$

Sol. Ex. 9.5

1) $\displaystyle A = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = 1$

2) $\displaystyle A = -\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = \frac{32}{3}$

3) $\displaystyle A = \int_{\sqrt[3]{4}}^3 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)dx = 2\sqrt{3} - 2\,\log 3 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\,\log 2$

4) $\displaystyle A = 2\int_0^3 (-x^2 + 12 - x)dx = 45$

5) $\displaystyle A = \int_{-9}^0 e^{-x}dx = e^9 - 1$

6) $\displaystyle A = \int_0^3 \left[(6-2x) - \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1\right)\right]dx = 10$

7) $\displaystyle A = \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{x+1} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{11}{4} + \log 2$

8) $\displaystyle A = \int_{-2}^1 |-x(x+2)|\,dx = \frac{8}{3}$

9) $\displaystyle A = \int_{-1}^4 \left|x^2 - 3x\right|dx = \frac{49}{6}$

10) $\displaystyle A = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + x\right)dx = \frac{1+\log 3}{2}$

11) $\displaystyle A = \int_{-1}^1 \left|3x^2 - 2x - 1\right|dx = \frac{64}{27}$

12) $\displaystyle A = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left[\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]dx = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi$

13) $A = \left(\sqrt{3} - 1\right) \int_1^4 \sqrt{x-1}\, dx = 6 - 2\sqrt{3}$

14) $A = \int_0^2 \left|x^2 - x\right| \, dx = 1$

15) $A = \int_0^4 \left|2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right| \, dx = \frac{11}{2}$

Sol. Ex. 9.6 C.

Sol. Ex. 9.7 D.

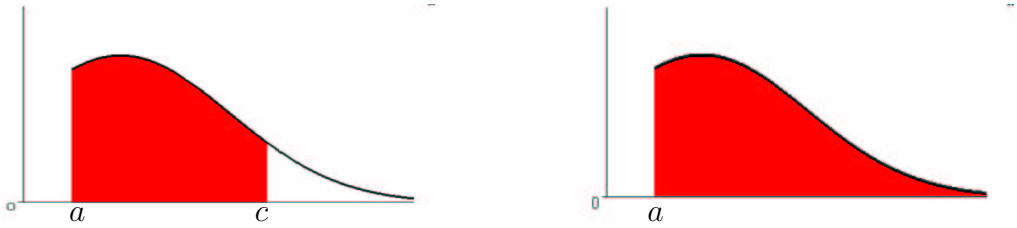
Argomento 10
Integrali impropri

Premessa

Nell'Arg. 9 è stata introdotta la nozione di integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ per funzioni continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una deroga alla continuità di f è anche stata introdotta, ma solo per considerare funzioni con un numero finito di punti di discontinuità di I specie. Così, la limitatezza della funzione integranda f ed il fatto che l'intervallo di integrazione $[a,b]$ fosse chiuso e limitato non sono mai stati messi in discussione. In questo capitolo ci occupiamo di estendere il concetto di integrale ad alcune situazioni in cui l'intervallo di integrazione e/o la funzione integranda non sono limitati.

I. Intervalli illimitati

Sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $c \geq a$ la funzione f è continua in $[a,c]$: quindi possiamo calcolare l'integrale definito $\int_a^c f(x)\,dx$.



Vogliamo esaminare cosa accade a questi valori quando $c \to +\infty$, cioè studiare il $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$.[1]

Definizione 10.1 Sia f continua in $[a,+\infty)$; il limite

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx\,, \qquad (\blacklozenge)$$

se esiste, si chiama **integrale improprio di f in** $[a,+\infty)$, e si indica con il simbolo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Più in particolare, diciamo che l'integrale improprio è **convergente**, e che f è **integrabile in senso improprio** in $[a,+\infty)$, se il limite $(\blacklozenge)$ è finito.
Se invece $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty$ (oppure $-\infty$) l'integrale improprio di f in $[a,+\infty)$ è detto **divergente**.

Quindi

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \text{quando il limite esiste.}}$$

Se $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f in $[a,+\infty)$ **non esiste**. [2]

[1] Abbiamo già incontrato l'espressione $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$ nell'Arg.9, con il nome di funzione integrale di f. Chiaramente, per $c \to +\infty$, la funzione F può convergere, divergere o non ammettere limite.

[2] Se la funzione f è sempre ≥ 0 (oppure sempre ≤ 0) ogni integrale improprio può essere convergente oppure divergente a $+\infty$ $(-\infty)$, ma comunque esiste.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 10.2 Sia $f(x) = e^{-x}$ per $x \in [2, +\infty)$. Allora

$$\int_2^c e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_2^c = e^{-2} - e^{-c}$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_2^c e^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(e^{-2} - e^{-c}\right) = e^{-2}.$$

Dunque f è integrabile in senso improprio in $[2, +\infty)$ e l'integrale improprio vale e^{-2}.

Esempio 10.3 Sia $f(x) = 1$ per $x \in [5, +\infty)$. Allora $\int_5^c f(x)\,dx = c - 5$ e quindi

$$\lim_{c\to+\infty} \int_5^c f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} (c-5) = +\infty.$$

Dunque f non è integrabile in senso improprio in $[5, +\infty)$ e l'integrale improprio è divergente.

Esempio 10.4 Sia $f(x) = \cos x$ per $x \in [\pi, +\infty)$. Allora $\int_\pi^c \cos x\,dx = [\sin x]_\pi^c = \sin c$ e quindi

$$\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \cos x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \sin c \quad \text{non esiste.}$$

Dunque f non è integrabile in senso improprio in $[\pi, +\infty)$ e l'integrale improprio non esiste.

Esempio 10.5

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1\right) = 1.$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} [\log x]_1^c = \lim_{c\to+\infty} (\log c) = +\infty.$

Osservazione 10.6 Se $a < b < c$, l'additività dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione (vd. Arg.9, formula ♣) garantisce che

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\ ,$$

e poichè $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero deduciamo, studiando il limite per $c \to +\infty$, che f è integrabile (in senso improprio) in $[a, +\infty)$ se e solo se lo è in $[b, +\infty)$. Quindi, l'esistenza e la convergenza di $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ dipendono solo dal comportamento di f per valori "molto grandi" di x, cioè dalla natura di f in un intorno di $+\infty$.

II. Intervalli limitati

Ora consideriamo il caso di una funzione $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo limitato, ma non chiuso, $(a, b]$. Per $x \to a^+$ varie cose possono accadere.

- Se f ha limite finito L per $x \to a^+$ (ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $(0, 1]$) f è prolungabile con continuità in $x = a$ definendo $f(a) = L$. La funzione così ottenuta è continua in $[a, b]$ e si ricade nella situazione degli integrali definiti.
- Se f rimane limitata in $(a, b]$ (ad esempio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $(0, 1]$) si può estendere la definizione di integrale definito (non ce ne occupiamo qui).
- Se f è continua in $(a, b]$, ma non limitata in un intorno destro di a (ad esempio se ha asintoto verticale $x = a$) diamo la seguente la seguente:

Definizione 10.7 Sia f continua in $(a, b]$; il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx\,, \tag{♦♦}$$

se esiste, si chiama **integrale improprio di f in** $(a, b]$, e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Più in particolare, diciamo che l'integrale improprio è **convergente**, e che f è **integrabile in senso improprio** in $(a, b]$, se il limite (♦♦) è finito.

Se invece $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx = +\infty$ (oppure $-\infty$) l'integrale improprio di f in $(a, b]$ è detto **divergente**.

Quindi

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx, \qquad \text{quando il limite esiste.}}$$

Se $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$ non esiste, diciamo che l'integrale improprio di f in $(a, b]$ **non esiste**. [3]

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 10.8

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to 0^+} [\log x]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (-\log c) = +\infty.$

Quindi la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$ e l'integrale improprio vale 2; mentre la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in senso improprio in $(0, 1]$ e l'integrale improprio diverge.

Osservazione 10.9 Analogamente a quanto detto nell'Osservazione 10.6, è solo il comportamento di f "vicino" al punto $x = a$ (cioè in un suo intorno destro) ad influenzare l'esistenza, e la convergenza, di $\int_a^b f(x)\, dx$.

[3] Anche in questo caso, se la funzione f è sempre ≥ 0 (oppure sempre ≤ 0) ogni integrale improprio può essere convergente oppure divergente a $+\infty$ $(-\infty)$, ma comunque esiste.

III. Caso generale

Le precedenti definizioni possono facilmente essere estese ai casi in cui la funzione è continua in un intervallo del tipo $(-\infty, a]$, oppure del tipo $[a, b)$ e non è limitata in un intorno sinistro di b (ad esempio se l'asintoto verticale è $x = b$).
Se invece il dominio sul quale si vuole integrare la funzione f è unione di un numero finito di intervalli del tipo considerato nelle Definizioni 10.1 e 10.7, l'integrale improprio su questo dominio è detto convergente se e solo se lo è in ognuno di essi, ed il suo valore è la somma dei valori sui vari intervalli.

Esempio 10.10 La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è definita e continua nell'insieme $[-1, 0) \cup (0, 2]$, e non è limitata per $x \to 0$. Gli integrali impropri $\int_{-1}^{0} f(x)\ dx$ e $\int_{0}^{2} f(x)\ dx$ sono entrambi convergenti. Infatti

$$\int_{-1}^{0} f(x)\ dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \lim_{c\to 0^-} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0^-} \frac{3}{2}\left(c^{2/3} - 1\right) = -\frac{3}{2}$$

e, analogamente,

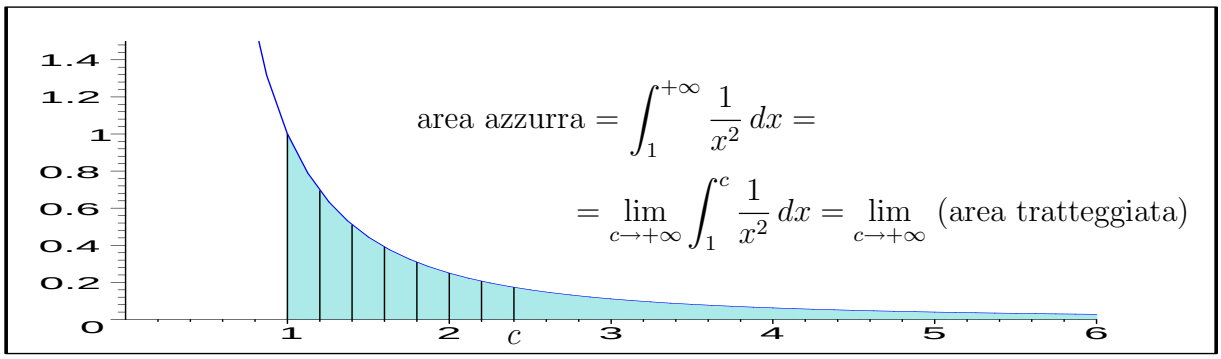
$$\int_{0}^{2} f(x)\ dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\,.$$

Perciò, l'integrale improprio $\int_{-1}^{2} f(x)\ dx$ converge, e vale $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

Ulteriori chiarimenti relativi a questo caso generale si possono trovare nell'Esempio 10.19.

Interpretazione geometrica

Dalla teoria dell'integrale definito sappiamo che, se f è continua e positiva in $[a, b]$, il numero $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse x, il grafico di f e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$. Tale regione è sicuramente limitata (cioè racchiudibile in un opportuno cerchio centrato nell'origine) e di conseguenza ha area finita.
Anche agli integrali impropri di funzioni positive è associabile la nozione di area di una regione.
Nel caso della Definizione 10.1, con f positiva, la regione a destra della retta $x = a$ e compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse non è limitata. Diciamo che questa regione ha **area finita** se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, e ha **area infinita** se questo integrale diverge.
In questo modo l'area della regione considerata (ossia l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$) viene vista come il limite, per $c \to +\infty$, delle aree delle regioni comprese tra l'asse x, il grafico di f e le due rette verticali $x = a$ e $x = c$ (ossia $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$).



L'Esempio 10.5 si interpreta dicendo che la regione a destra della retta verticale $x = 1$ e compresa fra il grafico di $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e l'asse x ha area finita di valore 1, anche se la regione è chiaramente illimitata.

Un discorso analogo si può fare nel caso della Definizione 10.7. L'Esempio 10.8 mostra che la regione compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{1}{x}$, il semiasse positivo delle y (che è l'asintoto verticale), l'asse orizzontale e la retta verticale $x = 1$ ha area infinita.

Il teorema del confronto

Può accadere che sia molto difficile determinare, direttamente attraverso la definizione, l'esistenza o meno di un integrale improprio di una funzione f, perché questo comporta il calcolo esplicito di una sua primitiva. In tal caso, per stabilire se un integrale improprio è convergente o divergente, possono essere utili il seguente teorema e le sue conseguenze.

Teorema 10.11

Siano f e g continue e positive in $[a, +\infty)$ con $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$.

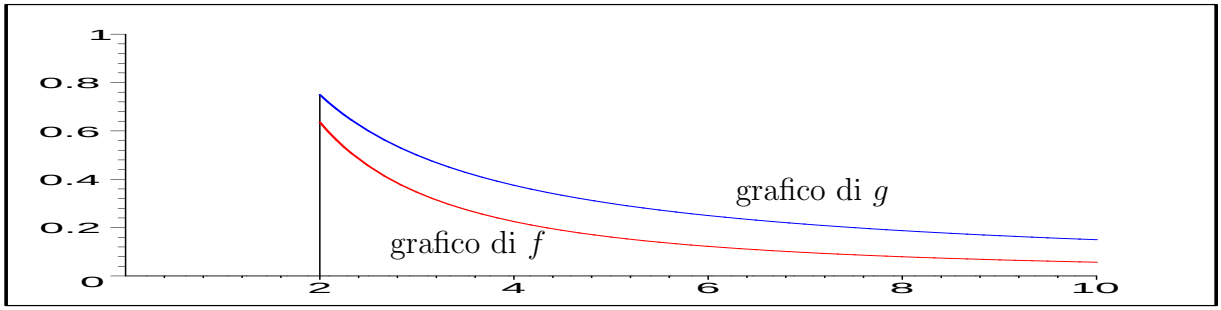
Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, allora diverge anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora converge anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Analoghi enunciati valgono per integrali impropri su intervalli del tipo: $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a]$.

L'interpretazione geometrica è immediata (vedi figura):

- se l'area sottesa alla funzione f è infinita, lo è a maggior ragione quella sottesa alla g;
- se l'area sottesa alla funzione g è finita, lo è a maggior ragione quella sottesa alla f.



Esempio 10.12 Sia $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2 + x^2}$. Allora posto $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $0 \le f(x) \le g(x)$ e inoltre

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \lim_{c \to +\infty} [\arctan x]_0^c = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

Quindi anche $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{2 + x^2}\,dx$ è convergente.

Esempio 10.13 Per $x \to +\infty$, e^{-x^2} è infinitesima di ordine superiore ad ogni potenza (negativa) di x, quindi per ogni x abbastanza grande vale sicuramente: $0 < \mathrm{e}^{-x^2} < \dfrac{1}{x^2}$.

Dall'Es. 10.5 sappiamo che l'integrale improprio di $\dfrac{1}{x^2}$ in un intorno di $+\infty$ (ossia in ogni intervallo della forma $[a, +\infty)$, $a > 0$) è convergente. Quindi anche quello di e^{-x^2} lo è.

Osserviamo che nell'esempio precedente una primitiva di e^{-x^2} non può essere calcolata esplicitamente in termini finiti e quindi non si può applicare in modo diretto la definizione di integrale improprio.

Esempio 10.14 Poiché $0 < \log x < x, \quad \forall x > 1$ allora $\dfrac{1}{\log x} > \dfrac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 1$

Dall'Es. 10.5 sappiamo che l'integrale improprio di $\dfrac{1}{x}$ in un intorno di $+\infty$ è divergente. Quindi anche quello di $\dfrac{1}{\log x}$ lo è.

Nelle applicazioni può essere talvolta utile applicare il seguente

Corollario 10.15 (Criterio del confronto asintotico)
Siano f e g due funzioni positive e continue in $[a, +\infty)$ e, per $x \to +\infty$, si abbia $f(x) \sim g(x)$. Allora gli integrali impropri in $[a, +\infty)$ delle funzioni f e g hanno lo stesso tipo di comportamento: convergono entrambi, o divergono entrambi.

Il risultato precedente vale anche per integrali impropri su intervalli del tipo $(a, b]$ se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$; e, in maniera analoga, per integrali impropri su intervalli della forma $[a, b)$, $(-\infty, a]$.

Esempio 10.16 L'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x} + x}\, dx \qquad \text{è convergente.}$$

Infatti, per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x} + x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; inoltre l'integrale improprio di $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in un intorno destro di 0 è convergente (vedi Es. 10.8), quindi è convergente anche l'integrale considerato.

Esempio 10.17 Sia

$$f(x) = \frac{e^{-x} + \arctan x}{(x-1)^2}.$$

Determiniamo il comportamento degli integrali impropri

$$1) \quad \int_4^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad 2) \quad \int_1^7 f(x)\, dx.$$

La funzione f è definita e continua in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e non si mantiene limitata in un intorno destro (anche sinistro) di 1.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^2}$; l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\, dx$ è convergente (vedi Es. 10.5) e quindi anche l'integrale improprio 1) è convergente.

Per $x \to 1^+$, $f(x) \sim \dfrac{\frac{1}{e} + \frac{\pi}{4}}{(x-1)^2}$; inoltre poichè

$$\int_1^7 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \lim_{c \to 1^+} \int_c^7 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \lim_{c \to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_c^7 = \lim_{c \to 1^+} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{c-1} \right) = +\infty$$

anche l'integrale improprio 2) è divergente.

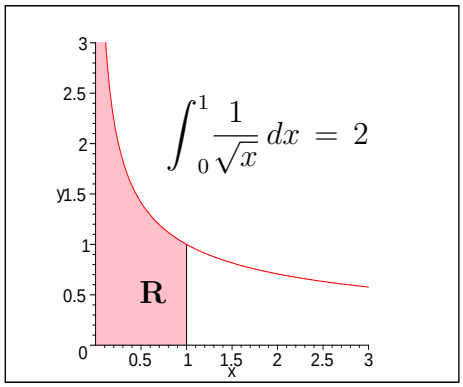
Funzioni "test"

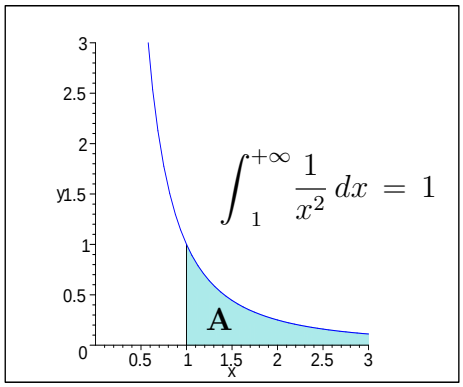
Il teorema del confronto è comodo da applicare se conosciamo il carattere dell'integrale improprio di una famiglia di funzioni "semplici" con le quali confrontare funzioni più complicate, come abbiamo già fatto negli Esempi 10.12, 10.13, 10.14, 10.16 e 10.17. Tra le più comode funzioni test con cui confrontare l'assegnata funzione vi sono le potenze. Nelle seguenti tabelle sono riassunti i comportamenti degli integrali impropri delle potenze.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & per \quad \alpha \geq 1 \quad (diverge) \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & per \quad \alpha < 1 \quad (converge) \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{per} \quad \alpha \leq 1 \quad (diverge) \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{per} \quad \alpha > 1 \quad (converge) \end{cases}$$

L'interpretazione geometrica è la seguente: le funzioni del tipo $\dfrac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha < 1$, (come ad esempio $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$) "vanno all'infinito" lentamente per $x \to 0^+$, quindi il loro grafico è "vicino" all'asse verticale, e delimita una regione illimitata e tuttavia di area finita (in **R**osa nella prima figura).
Le stesse funzioni vanno lentamente a zero per $x \to +\infty$, e quindi il loro grafico è "meno vicino" all'asse orizzontale, e delimita una regione di area infinita.
Al contrario, le funzioni dello stesso tipo, ma con $\alpha > 1$ (come ad esempio $\dfrac{1}{x^2}$) "vanno a zero" velocemente per $x \to +\infty$; quindi il loro grafico è "vicino" all'asse orizzontale e delimita una regione illimitata ma di area finita (in **A**zzurro nella seconda figura).
Le stesse funzioni vanno velocemente all'infinito per $x \to 0^+$, e quindi il loro grafico è "meno vicino" all'asse verticale e delimita una regione di area infinita.





Esempio 10.18 Stabiliamo il comportamento dei seguenti integrali impropri.

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}\,dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $(0, 2]$. Inoltre per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale improprio converge.

• $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}\,dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $[4,+\infty)$. Inoltre per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale improprio converge.

Esempio 10.19 Studiamo il comportamento di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{3x^3+x^2}\,dx.$

La funzione integranda f è positiva e continua in $(0,+\infty)$ e non è limitata in un intorno destro di 0.
Per ogni $0 < x_0 < +\infty$ lo spezzamento $(0,+\infty) = (0,x_0] \cup [x_0,+\infty)$ ci porta a considerare singolarmente i due integrali impropri

$$\int_0^{x_0} f(x)\ dx \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Il secondo integrale è convergente, in quanto, per $x \to +\infty$, si ha $f(x) \sim \dfrac{1}{3x^2\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{1}{3x^{11/4}}$.

Invece,

$$\text{per } x \to 0^+ \text{ si ha } f(x) = \frac{(1+x)^{1/4}-1}{x^2(3x+1)} \sim \frac{x/4}{x^2} = \frac{1}{4x}$$

e quindi l'integrale improprio $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ diverge

In conclusione, l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{3x^3+x^2}\,dx$ non converge.

È utile osservare che la scelta del punto x_0 è totalmente ininfluente, ai fini della determinazione del comportamento dell'integrale assegnato. Questo comportamento dipende esclusivamente dai valori assunti da f in un intorno destro di $x = 0$ e in un intorno di $+\infty$.

• Un'altra famiglia di funzioni "test" delle quali è noto il comportamento è:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\,dx \qquad \text{converge solo nei casi } \begin{cases} \alpha > 1,\ \beta \text{ qualunque} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{cases}$$

e diverge negli altri casi.

Esempio 10.20 Studiamo il comportamento, al variare di $a > 0$, di $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x+5}{x^a \log(1+x^2)}\,dx.$

Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{x+5}{x^a\log(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{2x^{a-1}\log x}$ e quindi l'integrale è convergente se e solo se $a > 2$.

Argomento 10

Esercizi

Ex. 10.1 Stabilire quali tra i seguenti integrali sono impropri, nel senso della Definizione 10.7

1) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sin x}{x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x+4}}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_0^7 \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^5 \frac{e^{2x}-1}{x(x+1)}\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 10.2 Applicando le definizioni, calcolare i seguenti integrali impropri, se esistono,

1) $\displaystyle\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^7 e^x\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 10.3 Applicando le definizioni, calcolare i seguenti integrali impropri, se esistono,

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

Argomento *Soluzione*

Ex. 10.4 Applicando le definizioni, stabilire per quale valore del parametro $a > 0$ i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^a}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^a}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^a}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 10.5 Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4+x}{2+x^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\,(2+x^2)}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+3}\,dx$

4) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\sin x}}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin x}{x\,(1+3x)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{e^{-x}+\sqrt{x}}{x+3}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 10.6 Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\,(2-x)}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos^2 x}{x\,(5-\sqrt{x})}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x\,(1-2x)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 10.7. Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt[4]{x\,(1+x)}}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{2+x}{x\sqrt{3-x}}dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\cos(\pi x)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{\log(1+x^2)}{x\sqrt{1+x}}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Ex. 10.8. Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x+1}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+\sqrt{x}}{x+x^3\log(1+2x)}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2e^x\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)\log(1+x)}\,dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{x}}{x+3}\,dx$ 9) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1+\cos^2 x}{x^2+3}\,dx$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Argomento 10
Suggerimenti

Ex. 10.4.

1) La funzione integranda è continua in $[2, +\infty)$. Quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa in un intorno di $+\infty$. Poichè per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{(x-1)^a} \sim \frac{1}{x^a}$, si ottiene ....

2) La funzione integranda è continua in $(1, 2]$, ed è illimitata in un intorno destro del punto $x = 1$, per ogni $a > 0$. Quindi la convergenza dell'integrale va studiata in tale intorno. Con la sostituzione $t = x - 1$ si ottiene: $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^a}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{t^a}\, dt$, e quindi .....

3) L'integranda è continua in $(1, +\infty)$, ed è illimitata in un intorno destro del punto $x = 1$ per ogni $a > 0$. Quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa in tale intorno e in un intorno di $+\infty$. Per ogni $1 < x_0 < +\infty$ l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge solo se convergono i due integrali $\int_1^{x_0} f(x)\, dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx$. Ma per quanto visto nei due punti precedenti ....

Ex. 10.5 In tutti questi esercizi la funzione integranda è continua nell'intervallo $[x_0, +\infty)$ indicato, e quindi la convergenza dell'integrale improprio va discussa per gli intorni di $+\infty$.

Ex. 10.6 In tutti questi esercizi, eccetto il 5), la funzione integranda è continua nell'intervallo $(0, b]$ indicato, ed è illimitata per $x \to 0^+$. La convergenza dell'integrale improprio va discussa per gli intorni destri di $x = 0$. Nell'esercizio 5) la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 1$; è invece illimitata se $x \to (1/2)^-$.

Ex. 10.7

1) La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è continua in $[-2, 0) \cup (0, 1]$, ed illimitata se $x \to 0$. Per la convergenza di $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$ debbono convergere sia $\int_{-2}^{0} f(x)\ dx$ che $\int_{0}^{1} f(x)\ dx$.

2) L'integranda $f(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)}$ è continua in $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$, e non è limitata in un intorno di 0. Per ogni $0 < x_0 < +\infty$, l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\ dx$ è convergente solo se sono convergenti i tre integrali $\int_{-1}^{0} f(x)\ dx$, $\int_{0}^{x_0} f(x)\ dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\ dx$.

3) L'integranda $f(x)$ è continua in $(0, +\infty)$ e non è limitata in un intorno destro di 0. Per ogni $0 < x_0 < +\infty$ l'integrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ è convergente solo se sono convergenti i due integrali $\int_{0}^{x_0} f(x)\ dx$ e $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\ dx$.

4) La funzione $f(x) = \dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}}$ è continua in $[-1, 0) \cup (0, 3)$, e l'integrale converge solo se convergono contemporaneamente gli integrali $\int_{-1}^{0} f(x)\ dx$, $\int_{0}^{x_0} f(x)\ dx$ e $\int_{x_0}^{3} f(x)\ dx$, con $0 < x_0 < 3$.

5) La funzione integranda $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)}$ è continua in $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, ed è illimitata per $x \to \dfrac{1}{2}$.

6) Funzione integranda continua in $(-1,0) \cup (0,2]$, illimitata per $x \to (-1)^+$, ma per $x \to 0$ ...

Ex. 10.8. Utilizzare il teorema del confronto (Teor. 10.11)

Argomento 10
Soluzioni

Sol. Ex. 10.1

1) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = 1$.

2) No, la funzione integranda è continua (e quindi limitata) in $[2, 10]$.

3) No, la funzione integranda è prolungabile con continuità in $[0, 3]$, ponendo $f(0) = 1$.

4) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = -4$.

5) Sì, la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x = 0$.

6) No, la funzione integranda è prolungabile con continuità in $[0, 5]$, ponendo $f(0) = 2$.

Sol. Ex. 10.2

1) $\displaystyle\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{c\to 3^+} \left[2\sqrt{x-3}\right]_c^{12} = 6$

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right]_2^c = \frac{1}{2}$

3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \left[-\frac{1}{2(x-1)^2}\right]_c^3 = +\infty$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}}\,dx = \left[2\sqrt{x+4}\right]_1^c = +\infty$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^7 e^x\,dx = \lim_{c\to-\infty} \left[e^x\right]_c^7 = e^7$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\arctan x\right]_0^c = \frac{\pi}{2}$

Sol. Ex. 10.3

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{c\to-\infty} \left[(x-1)e^x\right]_c^0 = -1$

2) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[\log|\log\ x|\right]_e^c = +\infty$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x^2+3x}\right]_1^c = \frac{1}{4}$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\,(\log x)^3\right]_2^c = +\infty$

5) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[x\ \log x - x\right]_c^1 = -1$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{c\to\pi/2}\left[-\log(\cos x)\right]_0^c = +\infty$

Sol. Ex. 10.4

1) $a > 1$; 2) $a < 1$; 3) nessun a.

Sol. Ex. 10.5

1) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{4+x}{2+x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, quindi l'integrale diverge.

2) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(2+x^2)}} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$, quindi l'integrale converge.

3) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

4) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

5) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sin x}{x\,(1+3x)} \sim \dfrac{1}{3x^{5/3}}$,quindi l'integrale converge.

6) Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{e^{-x}+\sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale diverge.

Sol. Ex. 10.6

1) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(2-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, quindi l'integrale converge.

2) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{\sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$, quindi l'integrale diverge.

3) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{x\sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, quindi l'integrale converge.

4) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{\cos^2 x}{x\,(5-\sqrt{x})} \sim \dfrac{1}{5x}$, quindi l'integrale diverge.

5) Per $x \to (1/2)^-$ si ha $\dfrac{\sin x}{x\,(1-2x)} \sim \dfrac{\sin(1/2)}{\left(\dfrac{1}{2}-x\right)}$, quindi l'integrale diverge.

6) Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{(\sin x)^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$, quindi l'integrale diverge.

Sol. Ex. 10.7

1) Entrambi gli integrali $\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ e $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ convergono. Quindi l'integrale $\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ converge.

2) Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)} \sim \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, quindi entrambi gli integrali $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{0}^{x_0} f(x)\,dx$ convergono, qualunque sia $x_0 > 0$.

Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$, quindi l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, $\forall\ x_0 > 0$.

Di conseguenza l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

3) Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt[4]{x\,(1+x)}} \sim \dfrac{x/2}{x\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}$, quindi l'integrale $\int_{0}^{x_0} f(x)\,dx$ converge, $\forall\ x_0 > 0$.

Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt[4]{x\,(1+x)}} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}$, quindi l'integrale$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, $\forall$ $x_0 > 0$.

Di conseguenza l'integrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

4) Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{2+x}{x\sqrt{3-x}} \sim \dfrac{2}{x\sqrt{3}}$, quindi l'integrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ diverge. Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ non converge.

5) Per $x \to \dfrac{1}{2}$ si ha $\cos(\pi x) = \cos\left[\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right] \sim -\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, per cui $f(x) = \dfrac{1}{\cos(\pi x)} \sim \dfrac{-1}{\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$, e quindi gli integrali $\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$ e $\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ divergono. Di conseguenza, l'integrale $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ non converge.

6) Per $x \to -1^+$ si ha $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{x\sqrt{1+x}} \sim -\dfrac{\log 2}{\sqrt{x+1}}$, e quindi l'integrale $\int_{-1}^{x_0} f(x)\,dx$, con $-1 < x_0 < 0$, converge. Osserviamo poi che per $x \to 0$ si ha $f(x) \sim x$, e quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 0$. Così, f è continua nell'intervallo $[x_0, 2]$, e $\int_{x_0}^{2} f(x)\,dx$ è un normale integrale definito.

Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ converge.

Sol. Ex. 10.8

1) Si ha $\sqrt{x}e^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$ (almeno) per ogni x abbastanza grande. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, per il teorema del confronto converge anche $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$.

2) Per ogni x abbastanza grande si ha $\log x \leq \sqrt{x}$, per cui $\dfrac{\log x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ converge, per il teorema del confronto converge anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$.

3) Si ha $\dfrac{2+\sin x}{1+x} \geq \dfrac{1}{1+x}$ per ogni x. Poichè $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ diverge, per il teorema del confronto diverge anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{1+x}\,dx$.

4) Per $x \to 0^+$ si ha $\left(\sqrt{1+x^2} - 1 + \sqrt{x}\right) \sim \sqrt{x}$ e $[x + x^3 \log(1+2x)] \sim x$, per cui $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.
Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \dfrac{x}{x^3 \log x} = \dfrac{1}{x^2 \log x} \leq \dfrac{1}{x^2}$, e anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
Di conseguenza, l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

5) Per $x \to -1^+$ si ha $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x}} \sim \dfrac{\log 2}{\sqrt{x+1}}$, e quindi l'integrale $\int_{-1}^{x_0} f(x)\,dx$ converge, per ogni $x_0 > -1$. Se $x \to +\infty$, $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, e per il teorema del confronto $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. Di conseguenza, l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

6) Per x abbastanza grande in valore assoluto, ma negativo, si ha $e^x \leq \dfrac{1}{x^4}$, per cui $f(x) = x^2 e^x \leq \dfrac{1}{x^2}$, e l'integrale $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ converge.

7) Per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)\log(1+x)} \sim \dfrac{1}{x}$, per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

8) Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) = \dfrac{e^{-x} + \sqrt{x}}{x+3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, e l'integrale non converge.

9) Per ogni x si ha $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{x^2+3} \leq \dfrac{2}{x^2+3}$, e l'integrale converge.

Argomento 11

Vettori e loro applicazioni

Parte A - Vettori e operazioni su di essi

Vettori e vettori applicati in un punto

Ci sono situazioni in cui un numero e un'unità di misura non danno informazioni sufficienti. Ad esempio

1) nel piano, dire che il punto B dista 10 cm da un punto A fissato non è sufficiente ad individuare B;

2) dire che un corpo è sottoposto all'accelerazione costante di $1g$ (cioè circa 9.8 m/s^2) non è sufficiente a garantire che sia sottoposto all'accelerazione di gravità (la direzione dell'accelerazione potrebbe non essere verticale o anche essere verticale ma diretta verso l'alto e in tal caso il corpo in esame galleggerebbe nell'aria);

3) dire che un corpo - in moto uniforme su una rotaia rettilinea e priva di attrito - viene frenato applicando costantemente una forza di 1 N (nella direzione del moto) non è sufficiente per stabilire dopo quanto tempo e dove il corpo si ferma [1].

In questi casi, anche se apparentemente diversi, risulta utile far ricorso alla nozione di vettore. Cominciamo ad illustrarla prendendo spunto dall'esempio 2. Si è detto che per sapere come agisce l'accelerazione è necessario conoscere oltre alla sua intensità anche la direzione e il verso in cui è applicata: questi tre sono gli elementi che descrivono esaurientemente ogni grandezza "vettoriale". Diamo dunque la seguente

Definizione 11.1 Un **vettore** è individuato assegnando

- un numero reale ≥ 0 detto **modulo** (o lunghezza) del vettore [2]
- una retta che ne dà la **direzione**
- un **verso** sulla retta.

Denoteremo i vettori con lettere minuscole in grassetto: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$... e i corrispondenti moduli con $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$... Se $|\mathbf{u}| = 1$ diremo che $\mathbf{u}$ è un **versore**.

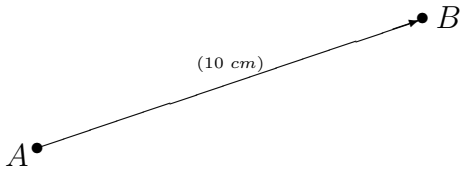
---

[1] Per capire in che senso questo è un problema vettoriale, si veda il paragrafo "Spunti per una generalizzazione del concetto di vettore".

[2] Attenzione: nelle applicazioni concrete il modulo spesso non è dato come numero puro, bensì come numero con unità di misura. Per intendersi, nell'esempio 2, l'intensità dell'accelerazione è di 9.8 m/s^2.

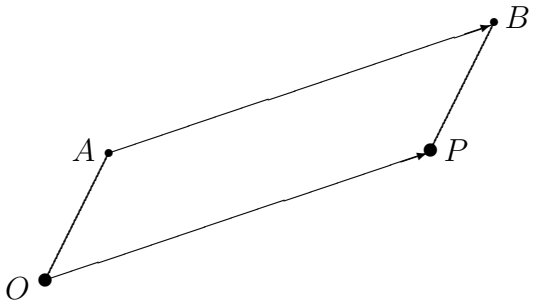
Se nel problema compaiono due o più grandezze vettoriali dello stesso tipo (ad es. accelerazioni) è sottointeso che, per poter applicare gli strumenti che svilupperemo nel seguito, il modulo di tutte deve essere espresso rispetto alla stessa unità di misura.

Esempio 11.2 Il problema proposto nel primo esempio è risolto assegnando il vettore avente modulo 10 (cm), direzione data dalla retta che congiunge A con B e verso da A verso B. In sostanza si considera il segmento AB con l'orientazione da A a B.
Si può quindi riassumere tutta l'informazione disegnando il segmento AB con una freccia nell'estremo di arrivo (B) e denotare il vettore con il simbolo $\overrightarrow{AB}$: diremo in questo caso che il **vettore** è **rappresentato come segmento orientato** (o anche: come freccia).



Questo esempio geometrico spiega perché, anche quando il vettore non rappresenta uno spostamento ma un'altra grandezza vettoriale (come ad esempio una forza o un'accelerazione o una velocità), si usa rappresentare il vettore come una freccia uscente dal punto in cui si pensa di applicarlo [3].
Visto però che il punto di applicazione non rientra nella definizione di vettore, si può rappresentare il vettore denotato con $\overrightarrow{AB}$ con qualunque altro segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ che

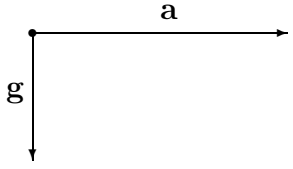
- abbia la stessa lunghezza di $\overrightarrow{AB}$
- sia parallelo ad $\overrightarrow{AB}$
- abbia lo stesso verso di $\overrightarrow{AB}$ (il che significa che $ABPO$ è un parallelogramma).



Questo implica che si possono rappresentare tutti i vettori come frecce uscenti da un unico punto O e (quando serve) identificare ciascuno di essi con il punto di arrivo della freccia.

---

3) Nel caso in cui non si rappresentino spostamenti, la lunghezza da attribuire alla freccia è in un certo senso arbitraria: l'unico vincolo è che se nella rappresentazione grafica compaiono due (o più) vettori dello stesso tipo (ad esempio due accelerazioni), la lunghezza delle frecce corrispondenti deve essere proporzionale al modulo dei vettori. Ad esempio, se $|\mathbf{a}| = 2\,|\mathbf{g}|$ e $\mathbf{a}$ ha direzione ortogonale a $\mathbf{g}$, i due vettori possono essere rappresentati così:



Prime operazioni sui vettori

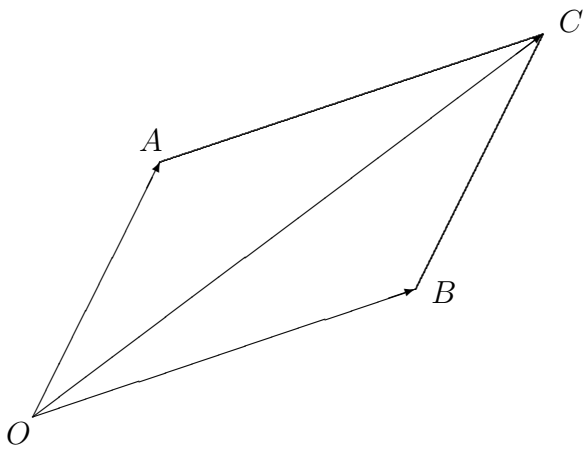
In questo paragrafo consideriamo sempre vettori che rappresentano grandezze dello stesso tipo.

Osservazione 11.3 C'è un solo vettore avente modulo 0: se si cerca di rappresentarlo come freccia uscente da O si vede che anche il secondo estremo coincide con O e quindi a tale vettore non può essere associata una direzione. Chiameremo **vettore nullo** il vettore avente modulo 0 e lo denoteremo con $\mathbf{0}$.

Somma di vettori

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori: la loro somma può essere agevolmente definita pur di rappresentarli come frecce.

Definizione 11.4 Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$, si definisce **somma** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ il vettore $\overrightarrow{OC}$ che ha come punto di arrivo il quarto vertice (C) del parallelogramma avente due lati coincidenti rispettivamente con OA e OB (regola del parallelogramma).

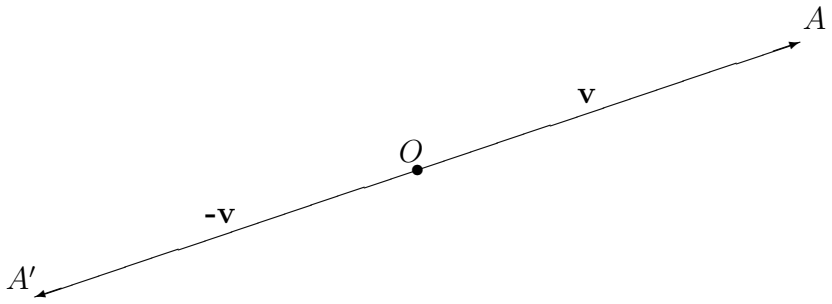


La definizione è ragionevole: se interpretiamo i vettori come spostamenti e teniamo presente che $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{AC}$ rappresentano lo stesso vettore $\mathbf{w}$, si vede che $\overrightarrow{OC}$ è il risultato della somma degli spostamenti da O ad A tramite il vettore $\mathbf{v}$ e da A ad C tramite il vettore $\mathbf{w}$.
D'altra parte, in maniera del tutto analoga, $\overrightarrow{OC}$ è il risultato della somma degli spostamenti da O a B tramite il vettore $\mathbf{w}$ e da B a C tramite il vettore $\mathbf{v}$: questo dice che la somma di vettori è commutativa. Più in generale, per la somma di vettori valgono le seguenti proprietà che permettono di trattare le somme di vettori esattamente come si trattano le somme di numeri reali.

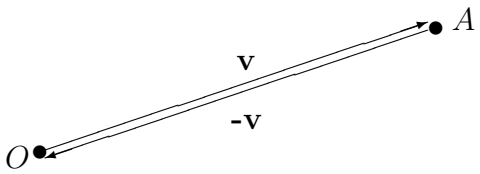
Proprietà

- commutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
- associativa: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- il vettore nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma, cioè per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- per ogni vettore $\mathbf{v}$ esiste un vettore $\mathbf{w}$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Tale vettore viene detto **vettore opposto di** $\mathbf{v}$ e denotato con $-\mathbf{v}$.

Se il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato come una freccia $\overrightarrow{OA}$ uscente da O, il vettore $-\mathbf{v}$ è una freccia $\overrightarrow{OA'}$ con la stessa direzione e lo stesso modulo di $\overrightarrow{OA}$ ma verso opposto.



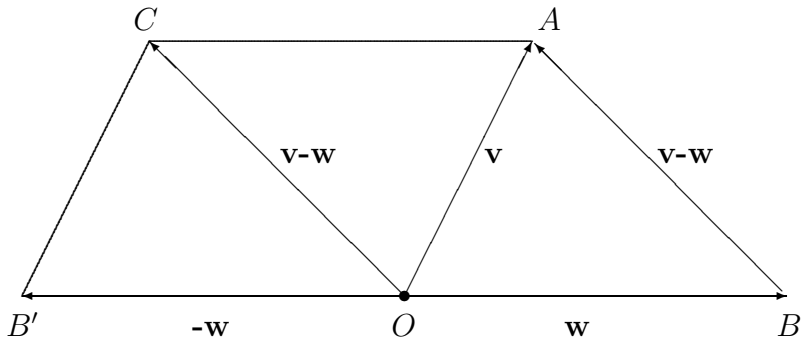
Un'altra possibile rappresentazione di $-\mathbf{v}$ è data dalla freccia $\overrightarrow{AO}$ (punto di arrivo scambiato con quello di partenza; interpretazione: spostandosi da O ad A e di nuovo da A ad O si ottiene uno spostamento nullo).



È allora possibile definire la **differenza di due vettori** come segue.

Definizione 11.5 Per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si definisce $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.

Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$ si vede che $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.



Prodotto di un vettore per un numero

Definizione 11.6 Dati un vettore $\mathbf{v}$ e un numero reale s, si definisce **prodotto del vettore v per lo scalare** [4] s (e si indica con $s\mathbf{v}$) il vettore che ha

[4] In fisica le grandezze che possono essere descritte semplicemente attraverso un numero (con unità di misura) sono dette grandezze scalari, per distinguerle da quelle vettoriali. Traccia di questa terminologia resta in questa definizione, in cui il numero viene chiamato "scalare" proprio per sottolineare la diversità della natura dei due oggetti di cui si fa il prodotto.

– modulo uguale al prodotto $|s| \cdot |\mathbf{v}|$

– direzione [5] uguale a quella di $\mathbf{v}$

– verso coincidente con quello di $\mathbf{v}$ se $s > 0$; verso opposto a quello di $\mathbf{v}$ se $s < 0$.

Nella pratica si usa dire che $s\mathbf{v}$ è un multiplo di $\mathbf{v}$ o anche che $s\mathbf{v}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$.

La somma e il prodotto ora definiti sono legati da due

Proprietà distributive

- per ogni scalare s e ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha $s(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = s\mathbf{v} + s\mathbf{w}$
- per ogni coppia di scalari s e t e ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$ [6].

Rappresentazione dei vettori per componenti

Ci sono diversi motivi per passare dalla rappresentazione "geometrica" dei vettori alla loro rappresentazione "analitica": uno è quello di rendere più semplici i conti.

Arriveremo a questa nuova rappresentazione gradualmente. Pensiamo ai vettori come frecce uscenti dal punto O; per semplicità cominciamo a prendere in esame solo i vettori che giacciono in uno stesso piano passante per O.

Caso piano

Nel piano possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico [7] con origine in O.

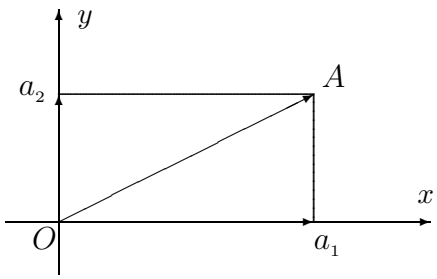
Ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1, a_2); quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla coppia ordinata (a_1, a_2).

---

5) Si noti che se $\mathbf{v}$ o s sono nulli, il prodotto $s\mathbf{v}$ è il vettore nullo e quindi non ha senso parlare di direzione e verso.

6) Le proprietà elencate per la somma, queste due proprietà distributive, insieme alle (ovvie) proprietà:
– $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
– $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
si riassumono dicendo che l'insieme dei vettori con le operazioni di somma e "prodotto vettore per scalare" costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

7) Monometrico significa che si sceglie la stessa unità di misura su entrambi gli assi. Noi useremo solo sistemi ortogonali monometrici e quindi ci limiteremo a scrivere "sistema di riferimento cartesiano", sottointendendo tutto il resto.



Scriviamo allora $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e chiamiamo i numeri reali a_1 e a_2 **componenti scalari del vettore** [8]: più precisamente
a_1 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse x
a_2 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse y.

Definizione 11.7 Quando si assegna il vettore $\mathbf{v}$ del piano tramite la coppia ordinata (a_1, a_2) si dice che **il vettore è rappresentato per componenti**.

A questo punto si possono tradurre analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s date in precedenza.

Proposizione 11.8 *Se* $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ *e* $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ *si ha* [9]

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$s\mathbf{v} = (sa_1, sa_2).$$

Sappiamo che il vettore v può essere rappresentato oltre che da $\overrightarrow{OA}$, anche da una qualunque altra freccia $\overrightarrow{BC}$, purché $OACB$ sia un parallelogramma. L'enunciato precedente mostra che, se le coordinate del punto B sono (b_1, b_2) e quelle del punto C sono (c_1, c_2), le componenti del vettore v rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{BC}$ sono [10]

$$(c_1 - b_1, c_2 - b_2).$$

---

[8] Se nel piano (con riferimento cartesiano ortogonale) si considerano il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e i punti
A_1: proiezione ortogonale di A sull'asse x e A_2: proiezione ortogonale di A sull'asse y,
si vede che $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. I due vettori $\overrightarrow{OA_1}$ e $\overrightarrow{OA_2}$ vengono talora detti le **componenti vettoriali** di $\mathbf{v}$. Ovviamente la nozione di componente vettoriale è correlata con quella di componente scalare, poiché $\overrightarrow{OA_1} = (a_1, 0)$ e $\overrightarrow{OA_2} = (0, a_2)$, ma attenzione a non confonderle!

[9] Per convincerci che queste formule sono corrette osserviamo che, con la simbologia della precedente nota si ha: $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}$ e quindi

$$s\mathbf{v} = s\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) = s\left(\overrightarrow{OA_1}\right) + s\left(\overrightarrow{OA_2}\right);$$

inoltre la somma può essere fatta separatamente lungo la direzione dei due assi, poiché

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}\right) = \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2}\right).$$

[10] Infatti, visto che $OACB$ è un parallelogramma, risulta $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, cioè $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ e quindi, applicando la Proposizione 11.8,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} + (-1)\,\overrightarrow{OB} = (c_1, c_2) + (-1)\,(b_1, b_2) = (c_1, c_2) + (-b_1, -b_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2).$$

Se il vettore è rappresentato attraverso le sue componenti, cioè se $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$, il suo modulo si calcola utilizzando il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Osservazione 11.9 Applicando la proposizione 11.8 si vede che per ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ si ha

$$\mathbf{v} = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1\,(1, 0) + a_2\,(0, 1).$$

I due vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ hanno entrambi modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei due assi x e y: per questo verranno detti **versori fondamentali**. Come in Fisica porremo

$$\mathbf{i} = (1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{j} = (0, 1).$$

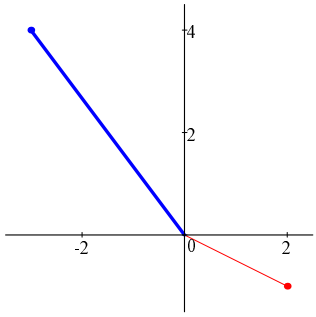
Quindi ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$ del piano (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

e si dirà in questo caso che **v è espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali**. Si noti che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $a_1 = a_2 = 0$.

Esempi 11.10 [11]

1) Rappresentiamo come frecce uscenti dall'origine O del piano i vettori $\mathbf{v} = (2, -1)$ e $\mathbf{w} = (-3, 4)$.

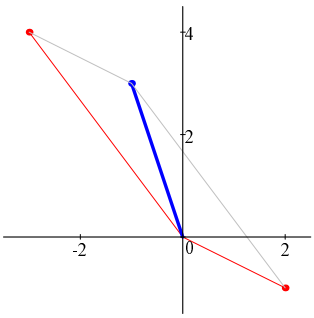


(**v** sottile e rosso, **w** spesso e blu)

2) Sommiamo i vettori dell'esempio (1) usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2, -1) + (-3, 4) = (2 - 3, -1 + 4) = (-1, 3)$$

3) Sommiamo i vettori dell'esempio (1) usando la rappresentazione dei vettori come frecce uscenti dall'origine O del piano e la regola del parallelogramma.



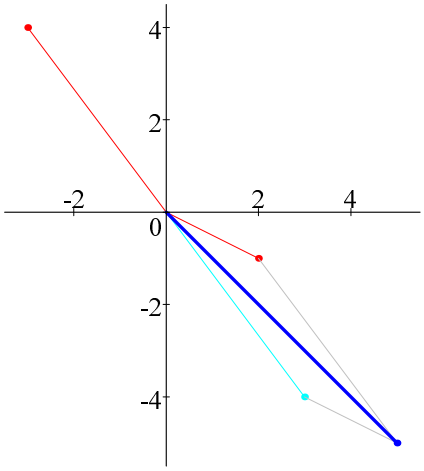
(**v** e **w** sottili e rossi, **v** + **w** spesso e blu)

[11] Di qui in avanti, per motivi tecnici, la freccia nel disegno dei vettori sarà indicata con un pallino.

4) Calcoliamo $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (2, -1) - (-3, 4) = (2 - (-3), -1 - 4) = (5, -5)$$

5) Calcoliamo $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ usando la rappresentazione dei vettori come frecce uscenti dall'origine O del piano.



($\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sottili e rossi,
$-\mathbf{w}$ sottile e azzurro,
$\mathbf{v} - \mathbf{w}$ spesso e blu)

6) Calcoliamo $\frac{2}{3}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$ usando la rappresentazione dei vettori per componenti.

$$\tfrac{2}{3}\mathbf{w} - \tfrac{1}{2}\mathbf{v} = \tfrac{2}{3}(-3, 4) - \tfrac{1}{2}(2, -1) = \left(-\tfrac{6}{3}, \tfrac{8}{3}\right) - \left(\tfrac{2}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \left(-2 - 1, \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{2}\right) = \left(-3, \tfrac{17}{6}\right).$$

7) Calcoliamo $\frac{2}{3}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$ esprimendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come combinazione lineare dei versori fondamentali.

$$\mathbf{v} = (2, -1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \mathbf{w} = (-3, 4) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\tfrac{2}{3}\mathbf{w} - \tfrac{1}{2}\mathbf{v} = \tfrac{2}{3}(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - \tfrac{1}{2}(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -\tfrac{6}{3}\mathbf{i} + \tfrac{8}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\mathbf{j} = (-2 - 1)\,\mathbf{i} + \left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{2}\right)\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + \tfrac{17}{6}\mathbf{j}.$$

Caso spaziale

Nello spazio possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con orientamento destrorso [12] avente origine nel punto O in cui si pensano applicati tutti i vettori.
Ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1, a_2, a_3): quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla terna ordinata (a_1, a_2, a_3).
Scriviamo allora $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ e diciamo che il vettore **v è rappresentato per componenti**, poiché (anche nel caso spaziale) chiamiamo i numeri reali a_1, a_2 e a_3 **componenti scalari del vettore**: più precisamente
a_1 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse x
a_2 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse y
a_3 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse z.

[12] Questo significa che i tre assi cartesiani ortogonali x, y, z sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra. O, se si preferisce, che se disegnamo su un foglio gli assi x e y nella posizione e con l'orientamento consueti, l'asse z deve essere ortogonale al foglio e il semiasse positivo deve essere quello al di sopra del foglio.

Traducendo analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s si ha la

Proposizione 11.11 *Se* $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ *si ha*

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\\ s\mathbf{v} &= (sa_1, sa_2, sa_3).\end{aligned}$$

Se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, il suo modulo si calcola utilizzando (due volte) il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

Osservazione 11.12 Applicando la proposizione 11.11 si vede che per ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ si ha

$$\mathbf{v} = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1\,(1, 0, 0) + a_2\,(0, 1, 0) + a_3\,(0, 0, 1).$$

I tre vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ hanno modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei tre assi x, y e z: per questo verranno detti **versori fondamentali**. Come in Fisica porremo [13]

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Quindi ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$ dello spazio (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

e si dirà in questo caso che **v è espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali**. Si noti che, nello spazio, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Prodotto scalare di due vettori

Torniamo a considerare vettori del piano o dello spazio ordinario. Due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, pensati come segmenti orientati applicati in uno stesso punto, individuano due angoli, uno convesso (cioè non più ampio di un angolo piatto) ed uno concavo: ma quando ci si riferisce all'angolo compreso tra i due vettori si intende parlare dell'angolo convesso. Inoltre non si distingue tra l'angolo compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e quello compreso tra $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$: si dirà perciò che tale angolo è non orientato. Denotiamo con θ la sua misura: se la misura è in radianti, risulta $\theta \in [0, \pi]$ mentre, se la misura è in gradi, θ può variare tra 0° e 180°.

[13] Attenzione: nel piano, $\mathbf{i}$ denota il vettore di componenti $(1, 0)$; nello spazio denota invece un vettore con tre componenti! Si tratta comunque del vettore di modulo 1 che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x. Analogamente $\mathbf{j}$ indica in ogni situazione il vettore di modulo 1 che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse y.

Definizione 11.13 Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, chiamiamo **prodotto scalare** (o prodotto interno) dei due vettori il numero reale $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta$. Scriveremo

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta.$$

Proprietà del prodotto scalare

- commutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$;
- distributiva: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$;
- di omogeneità: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(s\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = \mathbf{v}\bullet(s\mathbf{w}) = s(\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}).$$

Inoltre è chiaro che

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cos 0 = |\mathbf{v}|^2$$

e che $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0$ se e solo se uno dei tre fattori è nullo, cioè

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0 \iff |\mathbf{v}| = 0 \text{ oppure } |\mathbf{w}| = 0 \text{ oppure } \cos\theta = 0 \iff$$
$$\iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ oppure } \theta = \pi/2$$

Dunque

Proposizione 11.14 *Il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.*

In particolare sono a due a due ortogonali i versori fondamentali e quindi

$$\boxed{\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0.}$$

Per calcolare il prodotto scalare attraverso le componenti scalari dei vettori osserviamo che, se $\mathbf{v} = (a_1, a_2) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, applicando la proprietà distributiva e quella di omogeneità si trova

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \bullet (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i}\bullet\mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j}\bullet\mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j}\bullet\mathbf{j}$$

e, tenendo conto che i due versori fondamentali sono ortogonali e che $\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$ e $\mathbf{j}\bullet\mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, si ricava

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Analogamente se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si trova

$$\boxed{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Osservazione 11.15 Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori sono rappresentati per componenti. Allora il prodotto scalare può essere utilizzato per:

1) individuare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra i due.

Ad esempio, se $\mathbf{v} = (4, -3)$ e $\mathbf{w} = (5, 12)$, si ha

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 12 = -16$$

e d'altro lato, usando la definizione,

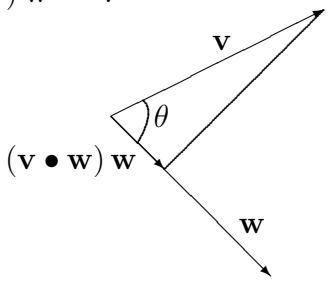
$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} \cos\theta = 5 \cdot 13 \cos\theta$$

e, uguagliando, $\cos\theta = -\dfrac{16}{65}$, cioè $\theta = \arccos\left(-\dfrac{16}{65}\right) \simeq 1.819$ radianti.

In generale, per risolvere il problema di trovare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si può usare la formula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}\right).$$

2) determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{w}$ (senza calcolare l'angolo tra i due vettori). Se $\mathbf{w}$ è un versore [14], tale proiezione è data da $(|\mathbf{v}| \cos\theta)\,\mathbf{w} = (|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta)\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w}$ [15].



Ad esempio, la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ nella direzione di $\mathbf{w} = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ è il vettore $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w} = \left(0 - \frac{8}{5} - \frac{3}{5}\right)\mathbf{w} = -\frac{11}{5}\mathbf{w} = (0, \frac{44}{25}, -\frac{33}{25})$.

Esempi 11.16

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ del piano ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (2, -1)$.

  Esso deve verificare la condizione $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$; quindi, se $\mathbf{u} = (x, y)$, deve risultare $2x - y = 0$ cioè $y = 2x$: dunque ogni vettore $\mathbf{u} = (x, 2x)$, con x numero reale qualunque, verifica la condizione. Osserviamo che tale vettore si può anche riscrivere $\mathbf{u} = x\,(1, 2)$: quindi le soluzioni sono infinite, ma sono tutte multiple [16] del vettore (soluzione particolare) $(1, 2)$.

---

[14] Se $\mathbf{w}$ non è un versore, basta dividerlo per il suo modulo per ottenere un versore.

[15] In particolare se $\mathbf{w} = \mathbf{i}$ si trova che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione dell'asse x è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{i})\,\mathbf{i}$ (e analogamente se $\mathbf{w} = \mathbf{j}$ oppure $\mathbf{w} = \mathbf{k}$).

[16] Si poteva immaginare che si dovesse arrivare a una conclusione di questo genere, poiché il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ individua una retta (quella passante per O ed A) e nel piano c'è una sola direzione ortogonale ad una retta: quindi i vettori soluzione possono differire solo per il modulo o per il verso.

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ dello spazio che risulta contemporaneamente ortogonale ai vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{w} = (0, 2, 1)$.

  Esso deve verificare le condizioni $\begin{cases} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = 0 \end{cases}$; quindi, se $\mathbf{u} = (x, y, z)$, deve risultare

  $$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = z \\ z = -2y \end{cases} :$$

  dunque ogni vettore $\mathbf{u} = (-2y, y, -2y)$, con y numero reale qualunque, verifica le condizioni. Osserviamo che tale vettore si può anche riscrivere $\mathbf{u} = y\,(-2, 1, -2)$: quindi le soluzioni sono infinite, ma sono tutte multiple [17] del vettore (soluzione particolare) $(-2, 1, -2)$.

- Cerchiamo i versori del piano che formano un angolo di $\pi/3$ con il versore $\mathbf{i}$.

  Essi sono i vettori della forma $x\mathbf{i}+y\mathbf{j} = \mathbf{v}$ tali che

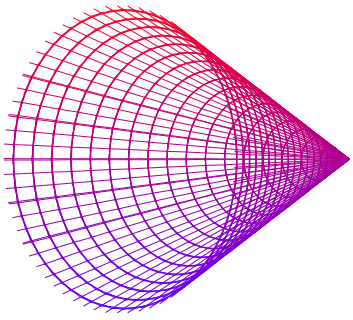
  $$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}|} = \cos(\pi/3) \\ |\mathbf{v}| = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) \bullet \mathbf{i} = 1/2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases}$$

  Ci sono due vettori [18] di questo tipo: $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

- Se cerchiamo i versori dello spazio che verificano la stessa condizione, troviamo infiniti vettori: infatti sono tutti i vettori della forma $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = \mathbf{v}$ tali che

  $$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{i}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}|} = \cos(\pi/3) \\ |\mathbf{v}| = 1 \end{cases} \quad \text{cioè (come sopra)} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y^2 + z^2 = 3/4 \end{cases}$$

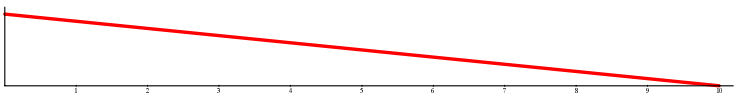
  In figura i segmenti rappresentano alcuni dei vettori soluzione (pensati come frecce uscenti da un unico punto O): si vede che essi stanno su un cono che ha l'asse x come asse di rotazione.



[17] Si poteva immaginare che si dovesse arrivare a una conclusione di questo genere, poiché i due vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$ individuano un piano (quello passante per O, A e B) e nello spazio c'è una sola direzione ortogonale ad un piano: quindi i vettori soluzione possono differire solo per il modulo o per il verso.

[18] Ciò conferma che l'angolo che si individua con il prodotto scalare non è orientato: in caso contrario si troverebbe $\widehat{\mathbf{iv}} = \pi/3$, $\widehat{\mathbf{iw}} = -\pi/3$.

- Il lavoro di una forza $\mathbf{F}$ che sposta il suo punto di applicazione da un punto A a un punto B dipende oltre che dall'intensità della forza e dallo spostamento anche dall'angolo θ tra il vettore $\overrightarrow{AB}$ che rappresenta lo spostamento e quello che rappresenta la forza, secondo la formula: $L = |\mathbf{F}| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\theta$, cioè $L = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Allora il lavoro della forza peso su una biglia di massa $5 \cdot 10^{-2}\ kg$ che scorre lungo la rotaia inclinata rappresentata in figura (che ha una pendenza del 10%)



(unità di misura: 1m)

è pari a $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, ove $\mathbf{F}$ è la forza peso: $\mathbf{F} = (5 \cdot 10^{-2} kg) \cdot (9.8 m/s^2)\,\mathbf{j}$ e $\overrightarrow{AB} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j}$, cioè

$$L = (10 \cdot 0 + 0.49 \cdot 1)\, N = 0.49 N.$$

Prodotto vettoriale di due vettori

Nello spazio ordinario (e solo in esso!) è possibile definire un altro prodotto tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Definizione 11.17 Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dello spazio vettoriale di dimensione 3, chiamiamo **prodotto vettoriale** di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ che ha

- per modulo il prodotto $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \sin\theta$, ove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo convesso compreso tra i due vettori
- per direzione quella ortogonale al piano individuato dai due vettori
- per verso quello che rende destrorsa [19] la terna ordinata di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

Notiamo che il modulo $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha due lati coincidenti con i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e quindi $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = 0$ se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori hanno la stessa direzione.
Dunque

Proposizione 11.18 *Il prodotto vettoriale di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione.*

[19] Questo significa che i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra. O, se si preferisce: quando pensiamo i tre vettori come segmenti orientati applicati in uno stesso punto e disegnamo su un foglio i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in modo che $\mathbf{w}$ segua $\mathbf{v}$ nel verso antiorario, il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ risulta ortogonale al foglio e al di sopra di esso.

Proprietà del prodotto vettoriale

- anticommutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$
- distributive: per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u};$$

- di omogeneità: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(s\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (s\mathbf{w}) = s\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w});$$

- di annullamento [20]: per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (vettore nullo).

Ricordando che $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono i versori aventi la direzione e il verso degli assi x, y e z risulta chiaro che

$$\boxed{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},}$$

e per la proprietà anticommutativa

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Utilizzando queste proprietà si verifica che se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si può formulare il prodotto vettoriale in termini di componenti scalari come segue [21]:

$$\boxed{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}.}$$

Si vede che la prima componente del prodotto vettoriale è costruita solo con le seconde e le terze componenti dei due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (e analogamente per le altre componenti).
Per ricordarsi questa formula è comodo far uso della terminologia dei determinanti (vedi Argomento 12). Si osserva che $a_2b_3 - a_3b_2$ è proprio il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, che viene rappresentato brevemente come $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Proseguendo allo stesso modo sulle altre componenti si trova:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

---

[20] Si tratta solo di un caso particolare, anche se importante, dell'enunciato della proposizione 11.18.

[21] Infatti per le proprietà distributive si ha
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \wedge \mathbf{w} = a_1\mathbf{i} \wedge \mathbf{w} + a_2\mathbf{j} \wedge \mathbf{w} + a_3\mathbf{k} \wedge \mathbf{w} =$
$= a_1\mathbf{i} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) =$
$= (a_1\mathbf{i} \wedge b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \wedge b_2\mathbf{j} + a_1\mathbf{i} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{j} \wedge b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \wedge b_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{j} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{k} \wedge b_1\mathbf{i} + a_3\mathbf{k} \wedge b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \wedge b_3\mathbf{k})$.
Per la proprietà di annullamento $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$.
Quindi utilizzando la proprietà di omogeneità si ottiene:
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1b_2\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + (a_2b_1\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + a_2b_3\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + (a_3b_1\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \wedge \mathbf{j})$,
cioè, per la proprietà anticommutativa,
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} =$
$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}.$

Si compatta ancor di più questa formula scrivendo

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

che si può leggere dicendo che il vettore $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ si ottiene formalmente come il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 (a elementi vettoriali e numerici) la cui prima riga è formata dai versori fondamentali, la seconda dal vettore delle componenti di $\mathbf{v}$, la terza dal vettore delle componenti di $\mathbf{w}$.

Esempi 11.19

- Determiniamo un vettore $\mathbf{u}$ dello spazio che risulta contemporaneamente ortogonale [22] ai vettori $\mathbf{v}=(1,0,-1)$ e $\mathbf{w}=(0,2,1)$. Visto che per definizione il prodotto vettoriale ha direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori, sicuramente il vettore $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ verifica la condizione. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&0&-1\\ 0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\mathbf{k}=2\mathbf{i}-1\mathbf{j}+2\mathbf{k}=(2,-1,2).$$

  Il vettore evidenziato come soluzione particolare negli esempi 11.16 è quindi $-\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}$.

- Consideriamo una forza $\mathbf{F}$ applicata in un punto A: il momento di $\mathbf{F}$ rispetto ad un altro punto O è proprio $\mathbf{F}\wedge\overrightarrow{OA}$.

Attenzione. Al contrario del prodotto scalare, il prodotto vettoriale può essere applicato ripetutamente visto che il risultato del prodotto vettoriale è ancora un vettore. Ma per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa. Ad esempio

$$\mathbf{i}\wedge(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})=\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}=-\mathbf{j}\qquad\text{mentre}\qquad(\mathbf{i}\wedge\mathbf{i})\wedge\mathbf{j}=\mathbf{0}\wedge\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$

Prodotto misto

Anche questo prodotto è definito solo nello spazio tridimensionale e coinvolge tre vettori.

Definizione 11.20 Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dello spazio vettoriale di dimensione 3, chiamiamo **prodotto misto** di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$.

Il prodotto misto ha un significato geometrico: il suo modulo $|\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})|$ rappresenta il volume del parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori $\mathbf{v}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{w}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{u}=\overrightarrow{OC}$ [23].

[22] Questo problema è già stato affrontato in precedenza utilizzando solo la definizione di ortogonalità (e tale metodo risulta valido in spazi di qualunque dimensione).

[23] Infatti, la faccia individuata da $\overrightarrow{OA}$ e da $\overrightarrow{OB}$ ha area $|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|$. Inoltre $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ è ortogonale al piano individuato da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e quindi ha la stessa direzione dell'altezza del parallelepipedo relativa a tale faccia. Dunque detto θ l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$, tale altezza vale: $|\mathbf{u}|\cdot|\cos\theta|$ e quindi il volume del parallelepipedo è

$$|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot|\cos\theta|=||\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}|\cdot|\mathbf{u}|\cdot\cos\theta|=|\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})|.$$

Questo dice che, salvo eventualmente per il segno, è indifferente considerare, invece di $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$, uno degli altri 5 prodotti misti che si possono ottenere permutando i tre vettori:

$$\begin{array}{lll} & \mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) & \mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) \\ \mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}) & \mathbf{v}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) & \mathbf{w}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) \end{array}$$

Inoltre dice che il prodotto misto si annulla se e solo se uno dei tre vettori è nullo oppure i tre spigoli sono complanari, cioè O, A, B, C stanno sullo stesso piano.

In termini di componenti, se $\mathbf{u}=(c_1,c_2,c_3)=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, utilizzando le formule viste sopra per i prodotti scalare e vettoriale, si trova

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1) \quad (24)$$

o anche (vedi Argomento 12)

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Spunti per una generalizzazione della definizione di vettore

Tra i motivi per passare dalla rappresentazione "geometrica" dei vettori alla loro rappresentazione "analitica" c'è il fatto che la rappresentazione mediante componenti facilita la ricerca di generalizzazioni all'interno delle quali si può capire in che senso il terzo problema proposto nell'introduzione sia un problema di natura vettoriale.

Abbiamo visto che i vettori nel piano possono essere rappresentati con coppie ordinate, nello spazio con terne ordinate e che le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare possono essere facilmente espresse per componenti. È allora naturale chiamare vettore ogni n-upla ordinata di numeri reali

$$\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n), \qquad \text{ove } n\geq 1$$

e definire nell'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali l'operazione di somma ponendo, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n)$ e $\mathbf{w}=(b_1,b_2,...,b_n)$,

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

e l'operazione di prodotto per uno scalare $s\in\mathbb{R}$ ponendo

$$s\mathbf{v}=(sa_1,sa_2,...,sa_n).$$

Per le operazioni così definite valgono le proprietà già enunciate per i vettori applicati in un punto. $\mathbb{R}^n$ con queste operazioni viene detto **spazio vettoriale reale n-dimensionale** o anche spazio dei vettori reali a n componenti.
Sempre generalizzando quanto visto nei casi $n=2$ ed $n=3$, dato $\mathbf{v}=(a_1,a_2,...,a_n)$ in $\mathbb{R}^n$, si può definire il suo modulo ponendo

24) Utilizzando questa formula si può verificare che $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{v}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})=\mathbf{w}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$, mentre gli altri tre prodotti misti hanno segno opposto, per l'anticommutatività del prodotto vettoriale).

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + ... + (a_n)^2}.$$

Inoltre, si è visto come in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare può essere espresso attraverso le sue componenti; generalizzando si estende il concetto di prodotto scalare al caso dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$, ponendo, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, ..., b_n)$,

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n.$$

Per il prodotto così definito valgono le proprietà del prodotto scalare. Si trova che $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|$ e questo motiva la definizione di angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come arccos $\frac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}|}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}$; in particolare due vettori non nulli saranno detti ortogonali se $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Torniamo, per finire, al terzo problema proposto nell'introduzione. Per descrivere completamente la situazione bisogna conoscere (oltre alla forza frenante che si era supposta di $1N$) anche la massa m del corpo, la velocità v_0 all'istante $t = 0$ in cui ha inizio la frenata e la posizione s_0 all'istante $t = 0$. Dunque l'insieme di dati necessari per risolvere il problema può essere descritto da una quaterna $(-1, m, v_0, s_0)$ di numeri reali (il primo dei quali negativo, poiché la forza frenante agisce in verso opposto a quello del moto), cioè da un vettore di $\mathbb{R}^4$, anche se val la pena di osservare che le grandezze contenute nelle quattro componenti non sono omogenee e quindi sono rappresentate rispetto ad unità di misura diverse.

Argomento 11

Vettori e loro applicazioni

Parte B - Applicazioni geometriche

Utilizzando la nozione di vettore si possono agevolmente rappresentare analiticamente distanze, rette e piani nello spazio.
Supponiamo di aver introdotto nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico destrorso con origine O.
Innanzitutto è ovvio che la **distanza tra due punti** A e B è il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quindi se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ si ha:

$$\text{dist}(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Equazioni della retta

Una retta passante per O e per un punto A diverso da O è formata dai punti P tali che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha la stessa direzione del vettore $\overrightarrow{OA}$ cioè

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Dunque se $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ si deve avere $(x, y, z) = t\,(a_1, a_2, a_3)$, cioè

$$(x, y, z) = (ta_1, ta_2, ta_3).$$

Più in generale una retta passante per due punti diversi A e B è formata dai punti P tali che il vettore $\overrightarrow{BP}$ ha la stessa direzione del vettore $\overrightarrow{BA}$ cioè

$$\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BA} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Dunque se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $P = (x, y, z)$ si ha $\overrightarrow{BP} = (x - b_1, y - b_2, z - b_3)$ e $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ e quindi

$$(x - b_1, y - b_2, z - b_3) = t\,(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

cioè

$$(x - b_1, y - b_2, z - b_3) = (t\,(a_1 - b_1)\,, t\,(a_2 - b_2)\,, t\,(a_3 - b_3)).$$

Perché due vettori siano uguali devono essere uguali le loro componenti scalari: quindi le equazioni della retta passante per A e B sono

$$\begin{cases} x - b_1 = t\,(a_1 - b_1) \\ y - b_2 = t\,(a_2 - b_2) \\ z - b_3 = t\,(a_3 - b_3) \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi}$$

o mettendo in evidenza le coordinate del punto P variabile sulla retta:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = b_1 + t\,(a_1 - b_1) \\ y = b_2 + t\,(a_2 - b_2) \\ z = b_3 + t\,(a_3 - b_3) \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Una retta può anche essere assegnata dando un punto B per cui essa passa e la sua direzione $\mathbf{v}$. Con ragionamento analogo al precedente si trova che, se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, le equazioni della retta sono

$$(**) \qquad \begin{cases} x = b_1 + tv_1 \\ y = b_2 + tv_2 \\ z = b_3 + tv_3 \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Tanto le equazioni $(*)$ che le $(**)$ vengono dette **equazioni parametriche della retta**: al variare del parametro t, esse rappresentano tutti i punti della retta.
Il vettore $\overrightarrow{BA}$ e il vettore $\mathbf{v}$, che nelle formule $(*)$ e $(**)$ indicano la direzione della retta, sono detti **vettori direttori della retta**.

Supponiamo di avere due rette r e s nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- r e s hanno più di un punto in comune: allora hanno in comune tutti i punti e vengono dette **coincidenti**;
- r e s hanno uno e un solo punto in comune: allora vengono dette **incidenti**;
- r e s non hanno punti in comune, ma hanno la stessa direzione: allora vengono dette **parallele**;
- r e s non hanno punti in comune e hanno direzioni diverse: allora vengono dette **sghembe**.

Vedremo negli esempi 11.22 come stabilire qual è la posizione reciproca di due rette assegnate in forma parametrica.
Due rette incidenti formano quattro angoli convessi a due a due uguali: si usa comunque parlare "angolo tra le due rette" come se fosse uno solo (l'altro è il suo supplementare) e la sua misura viene assunta come misura dell'angolo tra le due rette.
Più in generale si può parlare anche di angolo tra rette non incidenti, definendolo come l'angolo tra i vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ delle due rette. In particolare le due rette saranno

- parallele se i corrispondenti vettori direttori sono proporzionali (l'angolo tra i due vettori può essere di 0 o π radianti): $\mathbf{v} = h\mathbf{w}$ con $h \in \mathbb{R}$ non nullo
- perpendicolari se il prodotto scalare dei due vettori direttori è nullo: $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Se il vettore direttore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ha modulo 1, le sue componenti rappresentano i coseni degli angoli formati dalla retta rispettivamente con gli assi x, y, z (e si chiameranno coseni direttori della retta): infatti, detto θ l'angolo formato tra la retta e l'asse x, si ha $v_1 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{i} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}| \cos\theta = \cos\theta$ e similmente per gli altri assi.

Esempio 11.21

- Scriviamo le equazioni della retta passante per $A = (1, 2, -1)$ e $B = (0, 3, 0)$.

  Applicando la formula $(*)$ si trova $\begin{cases} x = 0 + t\,(1 - 0) \\ y = 3 + t\,(2 - 3) \\ z = 0 + t\,(-1 - 0) \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases}$.

- Ponendo nelle equazioni appena trovate $t = -1$ troviamo un altro punto della retta: $A' = (-1, 4, 1)$; analogamente, ponendo $t = 3$ troviamo il punto $B' = (3, 0, -3)$ che pure appartiene alla retta. Tutti i punti della retta si ottengono in questo modo.

- Anche il sistema $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ rappresenta la stessa retta, visto che si può prendere come vettore direttore un qualunque multiplo di $\overrightarrow{BA}$ e in particolare $\overrightarrow{AB}$.

- Se si scambia il ruolo di A con quello di B si ottiene un'altra rappresentazione della retta per $A = (1, 2, -1)$ e $B = (0, 3, 0)$: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

- Se si scelgono altri due punti sulla retta, ad esempio $A' = (-1, 4, 1)$ e $B' = (3, 0, -3)$, si ottiene ancora una rappresentazione diversa: $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

Questo esempio dice che ci sono infiniti modi diversi - ma equivalenti! - di rappresentare una retta nello spazio: per verificare se due sistemi di equazioni rappresentano la stessa retta basta controllare se

- i vettori direttori sono proporzionali (cioè le due rette hanno la stessa direzione)
- uno dei punti appartenenti alla retta rappresentata dal primo sistema (ad esempio quello ottenuto per $t = 0$) appartiene anche alla retta rappresentata dal secondo.

Nell'esempio precedente, $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ rappresentano la stessa retta poiché i due vettori direttori $(1, -1, -1)$ e $(-4, 4, 4)$ (che si ottengono prendendo ordinatamente i coefficienti del parametro t in ciascuno dei due sistemi) sono proporzionali e il punto $B = (0, 3, 0)$ appartiene anche alla retta rappresentata dal secondo sistema, come si vede ponendovi $t = 3/4$.

Esempi 11.22

- Troviamo le equazioni della retta r parallela a quella dell'esempio 11.21 e passante per il punto $C = (3, 1, 2)$.

  Il vettore direttore di r deve essere proporzionale a $(1, -1, -1)$: in particolare si può scegliere $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$. Quindi r ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

- Vogliamo ora stabilire se la retta r ha punti in comune con la retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

  Per capire il problema conviene pensare alle due rette come alle traiettorie di due aerei in volo: non ci stiamo chiedendo se i due aerei collideranno, cioè se passeranno allo stesso istante t per lo stesso punto $P = (x, y, z)$, bensì se passeranno per lo stesso punto $P = (x, y, z)$, eventualmente in due istanti diversi t e t'. Dobbiamo cioè riscrivere la retta s come

$$\begin{cases} x = 6 - t' \\ y = -3 + 2t' \\ z = 3 - 3t' \end{cases}$$

  e risolvere il sistema in t e t'

$$\begin{cases} 3 + t = 6 - t' \\ 1 - t = -3 + 2t' \\ 2 - t = 3 - 3t' \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} t + t' = 3 \\ t + 2t' = 4 \\ t - 3t' = -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2 \\ t - 3t' = -1 \end{cases}$$

  Notiamo che $t = 2$ e $t' = 1$ verificano anche l'ultima equazione: quindi le due rette hanno uno e un sol punto in comune, che si ottiene sostituendo (ad esempio) $t' = 1$ nelle equazioni di s: $P = (5, -1, 0)$. Tornando all'esempio dei due aerei, essi hanno toccato terra nello stesso punto, il primo dopo un lasso di tempo doppio rispetto al secondo.

- Se invece la retta s ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

  la stessa procedura porta a risolvere il sistema

$$\begin{cases} t + t' = 4 \\ t + 2t' = 4 \\ t - 3t' = -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} t' = 0 \\ t = 3 \\ t - 3t' = -1 \end{cases}$$

  che risulta però non risolubile poiché sostituendo nell'ultima uguaglianza $t = 3$ e $t' = 0$ si ottiene l'equazione impossibile $3 = -1$. Dunque r e s non hanno punti in comune: visto che i due vettori direttori: $(1, -1, -1)$ e $(-1, 2, -3)$ non sono proporzionali e quindi le due rette non sono parallele, le due rette sono sghembe.

Osservazione 11.23 Quando si rappresenta una retta nello spazio tridimensionale usando le equazioni parametriche sono necessarie tre equazioni. Eliminando il parametro t si può eliminare un'equazione.
Ad esempio ricavando t dalla prima equazione del sistema

$$(\blacklozenge) \qquad \begin{cases} x = t/2 \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

e sostituendo nelle altre equazioni si ottiene

$$\begin{cases} t = 2x \\ 2x + y = 3 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$$

e quindi le coordinate dei punti che stanno sulla retta avente equazioni parametriche ($\blacklozenge$) sono legate dalle due condizioni

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$$

che rappresentano dunque la retta in forma non parametrica.
Un altro modo di procedere è quello di ricavare t da ciascuna delle equazioni parametriche ed uguagliare i risultati ottenuti:

$$\begin{cases} t = 2x \\ t = 3 - y \\ t = \dfrac{z-1}{3} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x = 3 - y = \frac{z-1}{3},$$

che si può anche riscrivere

$$\frac{x}{1/2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

evidenziando al numeratore di ogni frazione le coordinate del punto di passaggio e al denominatore le componenti del vettore direttore [1].
Anche in questo modo si sono individuate due equazioni in x, y, z che rappresentano la retta.
Comunque, nello spazio non basta una sola equazione in x, y, z per rappresentare una retta [2].

Equazione del piano

Ricordando che ci sono infiniti piani ortogonali ad una retta data (tutti paralleli tra loro), si vede che un piano può essere individuato assegnando la direzione $\mathbf{v}$ di una retta ad esso ortogonale e un punto A per cui esso passa.
Se P è un punto appartenente al piano, la retta AP appartiene al piano ed è quindi ortogonale a $\mathbf{v}$: dunque i punti appartenenti al piano sono descritti dall'equazione:

$$\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

[1] Attenzione: questo modo di procedere non può essere utilizzato quando il vettore direttore contiene delle componenti nulle.
[2] Vedere anche la successiva osservazione 11.26

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $P = (x, y, z)$ si ottiene l'equazione

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$

cioè

(★)	$v_1 (x - a_1) + v_2 (y - a_2) + v_3 (z - a_3) = 0.$

La (★) è detta **equazione cartesiana del piano** mentre il vettore $\mathbf{v}$ è detto **vettore direttore del piano** [3]: si noti che esso non può essere nullo, poiché rappresenta la direzione di una retta e quindi almeno uno dei coefficienti di x, y, z deve essere diverso da zero.
Viceversa ogni equazione di primo grado in x, y, z a coefficienti a, b, c non tutti nulli

$$ax + by + cz = d$$

rappresenta un piano.

Esempio 11.24 L'equazione

$$3x - 4y + 2z = 1$$

rappresenta un piano ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (3, -4, 2)$ e passante (ad esempio) per il punto $A = (1, 1, 1)$: il vettore direttore è stato ottenuto prendendo ordinatamente i coefficienti di x, y, z, mentre il punto A è stato ottenuto assegnando il valore 1 a due variabili (ad esempio x e y) e ricavando la terza. Naturalmente se avessimo dato valori diversi alle due variabili, ad esempio $x = 1$ e $y = 0$, avremmo ottenuto un altro punto dello stesso piano: $B = (1, 0, -1)$.

Se $a = b = 0$ il piano $cz = d$ è ortogonale all'asse z (infatti un suo vettore direttore è $\mathbf{k}$) e similmente se si annullano altre due coppie di coefficienti.
Invece se è solo $a = 0$ il piano è parallelo all'asse x (e similmente per gli altri coefficienti) poiché il punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ appartiene al piano $by + cz = d$ se e solo se $ba_2 + ca_3 = d$, ma in questo caso il piano contiene anche tutti i punti $A_t = (t, a_2, a_3)$ con t reale qualunque, cioè tutta la retta passante per A e parallela all'asse x.
Se $d = 0$ il piano passa per l'origine.

Supponiamo di avere due piani α e β nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- α e β hanno in comune tutti i punti: allora vengono detti **coincidenti**;
- α e β si intersecano esattamente lungo una retta: allora vengono detti **incidenti**;
- α e β non hanno punti in comune: allora vengono detti **paralleli**.

[3] Visto che ogni vettore della forma $h\mathbf{v}$, con $h \in \mathbb{R}$ non nullo, individua la stessa direzione di $\mathbf{v}$, ogni vettore non nullo proporzionale a $\mathbf{v}$ può essere interpretato come vettore direttore del piano.

Due piani incidenti formano quattro angoli diedri a due a due uguali: si usa comunque parlare "angolo tra i due piani" come se fosse uno solo (l'altro è il suo supplementare) e la sua misura viene assunta come misura dell'angolo tra i due piani.
Fissato un vettore direttore per ciascun piano, si vede che l'angolo tra i due piani è uguale all'angolo tra i due vettori (o ad esso supplementare: dipende dall'orientamento dei vettori). Ciò suggerisce di definire in ogni caso l'angolo tra due piani (anche non incidenti) come l'angolo tra i loro vettori direttori. In particolare:

- due piani sono paralleli se e solo se hanno vettori direttori proporzionali
- due piani sono ortogonali se e solo se hanno vettori direttori ortogonali.

Supponiamo di avere un piano α e una retta r nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- tutti i punti di r appartengono ad α: allora si dice che r giace in α;
- r interseca α esattamente in un punto A: allora retta e piano vengono detti **incidenti**;
- r e α non hanno punti in comune: allora retta e piano vengono detti **paralleli**.

Se r e α sono incidenti, tra i tanti angoli formati da r con le rette del piano passanti per A, il minore è quello formato con la retta s proiezione ortogonale di r sul piano: quest'angolo acuto viene chiamato angolo tra r e α.
Visto che il vettore direttore del piano è ortogonale a s, l'angolo tra r e α è il complementare dell'angolo acuto formato tra un vettore direttore di r e uno di α (bisogna stare attenti nella scelta dei vettori direttori: potremmo trovare due vettori che formano un angolo ottuso).
In particolare:

- un piano e una retta sono paralleli se e solo se hanno vettori direttori ortogonali
- un piano e una retta sono ortogonali se e solo se hanno vettori direttori proporzionali.

Esempi 11.25

- Utilizzando questi enunciati si riscopre che il piano di equazione $by + cz = d$ che ha vettore direttore $(0, b, c)$ è parallelo all'asse x che ha vettore direttore $(1, 0, 0)$, poiché
$$(0, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0.$$
- Un'angolo tra i due piani di equazioni: $x+2y-3z = 0$ e $-3x+y+2z = 4$ è l'angolo θ formato dai vettori $(1, 2, -3)$ e $(-3, 1, 2)$, cioè $\cos\theta = \dfrac{(1, 2, -3) \bullet (-3, 1, 2)}{|(1, 2, -3)| \cdot |(-3, 1, 2)|} = \dfrac{-7}{14} = -\dfrac{1}{2}$ e quindi $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$. L'angolo acuto tra i due piani è il suo supplementare $\theta' = \dfrac{\pi}{3}$

- L'angolo tra il piano di equazione: $x + 2y - 3z = 0$ e la retta di equazioni $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

  è ancora legato ai due vettori direttori dell'esempio precedente: ma l'angolo tra quei due vettori è ottuso, quindi occorre cambiare il verso ad uno dei due vettori direttori, ad esempio a quello della retta. L'angolo tra i vettori $(1, 2, -3)$ e $(3, -1, -2)$ è $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ e quindi l'angolo tra retta e piano è $\frac{\pi}{6}$. Per le note relazioni tra il seno e il coseno di angoli complementari, lo stesso risultato può essere ottenuto calcolando $\arcsin \left| \frac{(1, 2, -3) \bullet (-3, 1, 2)}{|(1, 2, -3)| \cdot |(-3, 1, 2)|} \right| = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

- Cerchiamo l'equazione del piano passante per l'origine e parallelo alle due rette aventi equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad 2x = y = 3z - 6.$$

  Poiché il piano passa per l'origine, ha equazione della forma $ax + by + cz = 0$: bisogna trovarne il vettore direttore (a, b, c) sapendo che esso è ortogonale ai vettori direttori delle due rette. Un vettore direttore della prima retta è $(-3, 1, 2)$; la seconda si può riscrivere $\frac{x}{1/2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{1/3}$ e quindi un suo vettore direttore è $(1/2, 1, 1/3)$, ma è più comodo scegliere come vettore direttore il suo multiplo: $6\,(1/2, 1, 1/3) = (3, 6, 2)$. Un vettore ortogonale tanto a $(-3, 1, 2)$ che a $(3, 6, 2)$ è $(-3, 1, 2) \wedge (3, 6, 2) = (-10, 12, -21)$ e quindi il piano richiesto ha equazione $10x - 12y + 21z = 0$.

- Cerchiamo le equazioni della retta passante per l'origine, parallela al piano avente equazione $x - 3z = 1$ e perpendicolare alla retta avente equazioni $2x = y = 3z - 6$.

  – Poiché la retta passa per l'origine, ha equazioni della forma $\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$

  – poiché è parallela a un piano avente vettore direttore $(1, 0, -3)$, il suo vettore direttore (a, b, c) verifica la condizione $(1, 0, -3) \bullet (a, b, c) = 0$

  – poiché è perpendicolare a una retta avente vettore direttore $(3, 6, 2)$, il suo vettore direttore (a, b, c) verifica la condizione $(3, 6, 2) \bullet (a, b, c) = 0$.

  Resta quindi da risolvere [4] il sistema $\begin{cases} a - 3c = 0 \\ 3a + 6b + 2c = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a = 3c \\ 6b + 11c = 0 \end{cases}$: una possibile soluzione è $(18, -11, 6)$ e quindi la retta ha equazioni $\begin{cases} x = 18t \\ y = -11t \\ z = 6t \end{cases}$.

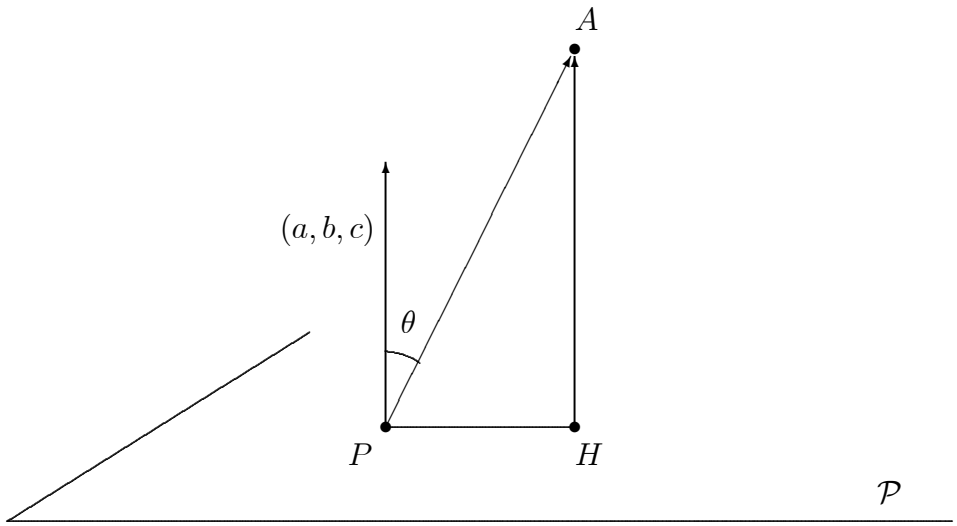
[4] Anche in questo caso si potrebbe semplicemente calcolare $(1, 0, -3) \wedge (3, 6, 2) = (18, -11, 6)$.

Osservazione 11.26 L'intersezione di due piani non paralleli è una retta: quindi in generale un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

rappresenta una retta, purché non ci sia un numero reale h tale che $(a', b', c') = h\,(a, b, c)$.
Se invece esiste un numero reale h tale che $(a', b', c') = h\,(a, b, c)$, il sistema equivale all'unica equazione $ax + by + cz = d$ (e quindi rappresenta un piano) se $d' = hd$, mentre se $d' \neq hd$ il sistema non ha soluzioni e quindi non può rappresentare un insieme di punti.

Osservazione 11.27 Vogliamo calcolare la **distanza di un punto** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **da un piano** $\mathcal{P}$ di equazione $ax + by + cz = d$.



Detta H la proiezione ortogonale di A sul piano, tale distanza è la lunghezza del segmento HA [5].
Osserviamo che, scelto comunque un punto P del piano:
1) il vettore $\overrightarrow{HA}$ è la proiezione del vettore $\overrightarrow{PA}$ sulla direzione ortogonale al piano $\mathcal{P}$,
2) tale direzione è individuata dal vettore direttore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ di $\mathcal{P}$,
3) $\mathbf{v} \bullet \overrightarrow{PA} = |\mathbf{v}| \cdot \left|\overrightarrow{PA}\right| \cos\theta = |\mathbf{v}| \cdot \left|\overrightarrow{HA}\right|$ e quindi

$$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \frac{\overrightarrow{PA} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Se $P = (x, y, z)$, risulta $\overrightarrow{PA} = (a_1 - x, a_2 - y, a_3 - z)$. Allora, sostituendo e calcolando il prodotto scalare e il modulo, si ha

$$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \left|\frac{(a_1 - x, a_2 - y, a_3 - z) \bullet (a, b, c)}{|(a, b, c)|}\right| = \frac{|a\,(a_1 - x) + b\,(a_2 - y) + c\,(a_3 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ricordiamo che P appartiene al piano e quindi nella formula si può sostituire $ax + by + cz = d$. Dunque la distanza tra A e il piano è data da

$$\boxed{\left|\overrightarrow{HA}\right| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

[5] Se si preferisce, il problema può essere risolto, invece che come indicato di seguito, trovando le equazioni della retta passante per A e ortogonale al piano $\mathcal{P}$, determinandone l'intersezione H con $\mathcal{P}$ e calcolando la distanza tra A e H.

Argomento 11 - Esercizi

ESERCIZIO 11.1 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (3, -4)$ e $B = (-2, 0)$. Disegnare il vettore $\overrightarrow{AB}$ e trovare il punto P tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$; calcolare infine le componenti del vettore.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.2 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (3, -4)$, $B = (-2, 0)$, $C = (-1, 1)$ e $D = (2, 4)$. Calcolare la somma dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ con la regola del parallelogramma. Verificare il risultato calcolando la somma per componenti.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.3 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (-2, -1)$ e $D = (6, 5)$. Quali tra i seguenti vettori sono uguali a $-2\overrightarrow{AB}$?

A) $\overrightarrow{AC}$ **B)** $\overrightarrow{CD}$ **C)** $\overrightarrow{BC}$ **D)** $\overrightarrow{CB}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.4 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (2a_1, 2a_2)$ e $D = (2b_1, 2b_2)$. L'affermazione $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ è

A) sempre vera **B)** mai vera **C)** vera solo per particolari valori di a_1, a_2, b_1, b_2

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.5 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (2b_1, 2b_2)$. L'affermazione $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ è

A) sempre vera **B)** mai vera **C)** vera solo per particolari valori di a_1, a_2, b_1, b_2

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.6 Nel piano si considerino: un vettore $\mathbf{v}$ di modulo 4 avente la direzione e il verso dell'asse x, una retta r tale che $\widehat{xr} = \pi/4$ e una retta s tale che $\widehat{xs} = -\pi/3$. Si determinino geometricamente i vettori componenti di $\mathbf{v}$ secondo le direzioni delle due rette e si calcoli il valore dei loro moduli.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 11.7 Nello spazio si considerino il vettore $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$ ed il punto $A = (1, 0, 2)$. Quali sono le coordinate del punto B tale che $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.8 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$. È vero che $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$? Qualunque sia la risposta, si spieghi che cosa significa.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.9 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$. Si calcoli il modulo di $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.10 A che cosa è uguale il prodotto scalare $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4)$?

A) $(3, -2, -8)$ **B)** -7 **C)** $(6, 10, 7)$ **D)** 13

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.11 Nel piano si considerino i vettori $\mathbf{u} = (4, 3)$ e $\mathbf{v} = (-1, 2)$. Si calcoli il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 11.12 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = \left(2, -\sqrt{5}, -1\right)$ e $\mathbf{v} = \left(1, \sqrt{5}, 2\right)$. Si dica se l'angolo da essi formato vale (in radianti)

A) $-\pi/3$ **B)** $2\pi/3$ **C)** $\pi/3$ **D)** $\pi/6$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.13 Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-1, 1, 2).$$

Si dica se $\mathbf{u}$ forma con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ angoli (non orientati) uguali.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.14 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 2 - 1)$. Si trovi un vettore $\mathbf{w}$ non nullo ortogonale ad entrambi. È unico?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.15 A che cosa è uguale il prodotto vettoriale $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1)$?

A) $(3, -2, 0)$ **B)** 1 **C)** $(2, 1, 7)$ **D)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.16 Come devono essere fatti i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}?$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.17 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (-2, -4, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 2)$. Si stabilisca se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.18 Si stabilisca per quali valori reali di h i vettori

$$\mathbf{u} = (h, -1, h) \text{ e } \mathbf{v} = (2 - h, 1, 0)$$

sono ortogonali e per tali valori si trovi il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.19 Si trovi un vettore $\mathbf{w}$ di modulo 1 che sia contemporaneamente ortogonale a $\mathbf{u} = (2, 1, -4)$ e a $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$. È unico?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.20 Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (-2, -4, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (1, -1, 2).$$

Si stabilisca se sono complanari.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.21 Come devono essere fatti i vettori $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})?$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.22 Spiegare perché per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ si ha $\mathbf{u}\bullet(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=0$ mentre, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono proporzionali, il vettore $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ è sempre non nullo.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.23 Mostrare che per ogni numero reale h risulta

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u})=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=(\mathbf{u}+h\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}$$
$$(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u}))\bullet\mathbf{w}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet(\mathbf{w}+h\mathbf{u}).$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.24 Quali delle seguenti scritture hanno senso?

A) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge(\mathbf{w}\bullet\mathbf{u})$ **B)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})$ **C)** $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w})\wedge\mathbf{u}$ **D)** $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.25 Quali delle seguenti scritture hanno senso?

A) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$ **B)** $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$ **C)** $(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}))\bullet\mathbf{u}$

Argomento *Soluzione*

Applicazioni geometriche

ESERCIZIO 11.26 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A=(1,-2,1)$ e $B=(0,1,-1)$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.27 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A=(1,0,1)$ e avente la direzione del vettore $\mathbf{v}=(4,1,2)$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.28 Nello spazio di dimensione 3 il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta? In caso affermativo se ne trovi un vettore direttore e i coseni degli angoli formati con gli assi.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.29 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, 1, -1)$ e parallela alla retta di equazioni $x + z = 3x - y + 1 = 0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.30 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (3, -2, 1)$ e ortogonale al piano di equazione $2x + y - 4z = 0$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.31 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, 2, 3)$ e ortogonale alle due rette di equazioni rispettivamente $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{2-y}{2} = 2z + 1$ e $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.32 Stabilire se le rette trovate nei due esercizi precedenti sono diverse e in caso affermativo se sono parallele, incidenti o sghembe.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.33 Calcolare la misura dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $\dfrac{x-3}{2} = y + 2 = \dfrac{1-z}{4}$ e $x = -y = z$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.34 Trovare le equazioni della retta passante per $A = (1, 0, 0)$, ortogonale alla retta di equazioni $2 - x = 3y = z$ e parallela al piano di equazione $x + y + z = 0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.35 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (0, 1, 1)$ e parallelo al piano di equazione: $3x - 2y - z = 0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.36 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (1, 0, 1)$ e ortogonale alla retta di equazioni: $1 - x = y = 3z$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.37 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ e $C = (1, 0, 2)$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.38 Si verifichi che il punto $C = (1, 0, 2)$ non appartiene alla retta di equazioni $2 - x = y = 2z$ e si calcoli l'equazione del piano contenente tanto la retta che il punto.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.39 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e parallelo alla retta di equazioni: $x = y = 2z - 1$ e si calcoli la sua distanza dall'origine.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.40 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (0, 1, 0)$, parallelo alla retta di equazioni: $x - 1 = 2y = -z$ e ortogonale al piano di equazione $x - y - z = 0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.41 Calcolare la misura dell'angolo ottuso formato dai piani trovati nei due esercizi precedenti.

Argomento *Soluzione*

Applicazioni fisiche

ESERCIZIO 11.42 Una renna trascina una slitta mediante una bretella con una forza di $20N$. La bretella forma un angolo $30°$ con il suolo. Determinare il valore della forza che fa muovere la slitta ed il valore della forza che tende a sollevarla.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.43 La renna dell'esercizio precedente trascina la slitta in linea retta lungo il suolo per $16m$. Trovare il lavoro effettuato dalla forza applicata alla slitta.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 11.44 Un battello che si muove con una velocità di $16km/h$ deve attraversare un fiume la cui corrente, costante in ogni suo punto, è di $8km/h$. Quale angolo rispetto alla riva deve mantenere il battello per raggiungere la riva opposta compiendo il tragitto minimo?

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

Argomento 11
Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

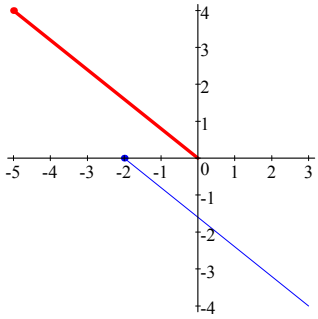
ESERCIZIO 11.6 Si ricordi che dire che $\widehat{xs} = -\pi/3$ significa che la retta s forma con l'asse x un angolo di $\pi/3$ in verso orario.

ESERCIZIO 11.11 Se $\mathbf{w}$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$ il vettore componente di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w}$.

ESERCIZIO 11.44 Schematizzando le due rive del fiume come due rette parallele, il tragitto minimo è quello ortogonale alle due rette.

SOLUZIONI [1]

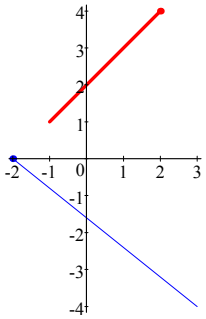
Sol. Ex. 11.1



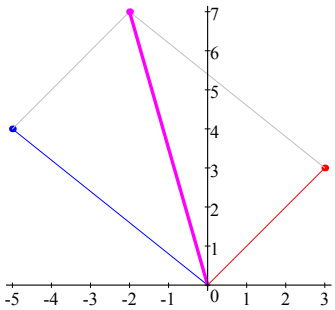
$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu, $\overrightarrow{OP}$ spesso e rosso.

$\overrightarrow{OP} = (-2-3, 0-(-4)) = (-5, 4)$

Sol. Ex. 11.2



A sinistra sono rappresentati i vettori da sommare.
A destra sono rappresentati i vettori ad essi equivalenti applicati nell'origine e se ne calcola la somma con la regola del parallelogramma.



$\overrightarrow{AB}$ sottile e blu; $\overrightarrow{CD}$ spesso e rosso

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ spesso e violetto

$\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$; $\overrightarrow{CD} = (3, 3)$: quindi la somma per componenti è $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (-2, 7)$.

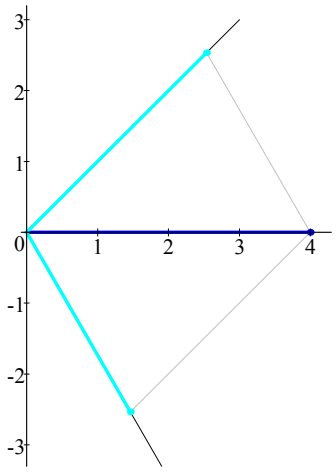
Sol. Ex. 11.3
C). Infatti $\overrightarrow{AB} = (4-1, 7-3) = (3, 4)$ e quindi $-2\overrightarrow{AB} = (-6, -8)$. Si ha
$\overrightarrow{AC} = (-2-1, -1-3) = (-3, -4) = -\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CD} = (6-(-2), 5-(-1)) = (8, 6)$
$\overrightarrow{BC} = (-2-4, -1-7) = (-6, -8) = -2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

Sol. Ex. 11.4
A). Infatti $\overrightarrow{CD} = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2) = (2(b_1 - a_1), 2(b_2 - a_2)) = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2\overrightarrow{AB}$

Sol. Ex. 11.5
C). Infatti $\overrightarrow{AC} = (2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2)$ mentre $2\overrightarrow{AB} = 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2)$: quindi i due vettori sono uguali se e solo se $2a_1 = a_1$ e $2a_2 = a_2$ cioè se e solo se $a_1 = a_2 = 0$.

[1] Anche in questi svolgimenti, come già nella seconda parte della teoria, la freccia che denota il verso del vettore è rappresentata con un pallino (per motivi puramente tecnici).

Sol. Ex. 11.6



Per comodità disegnamo $\mathbf{v}$ come il vettore $\overrightarrow{OP} = (4, 0)$ e pensiamo le rette r ed s passanti per O: quindi anche i vettori componenti di $\overrightarrow{OP}$ saranno rappresentati come frecce $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ uscenti da O.
Quanto al modulo di $\overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OS}$ osserviamo che:
R appartiene alla retta di equazione $y = x$ e quindi ha coordinate (a, a)
S appartiene alla retta di equazione $y = -\sqrt{3}x$ e quindi ha coordinate $\left(b, -\sqrt{3}b\right)$:
dunque $\overrightarrow{OR} = (a, a)$ e $\overrightarrow{OS} = \left(b, -\sqrt{3}b\right)$
Ora $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP}$ se e solo se $(a, a) + \left(b, -\sqrt{3}b\right) = (4, 0)$
cioè per $a = 6 - 2\sqrt{3}$ e $b = 2\sqrt{3} - 2$.
Dunque $\left|\overrightarrow{OR}\right| = |(a, a)| = |a|\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$
e $\left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|\left(b, -\sqrt{3}b\right)\right| = |b|\sqrt{4} = 4\sqrt{3} - 4.$

Attenzione: qui non è lecito usare il prodotto scalare per trovare i vettori componenti. Infatti tali vettori sono ottenuti scomponendo $\mathbf{v}$ con la regola del parallelogramma, che qui non è un rettangolo, poiché s non è ortogonale a r. Invece con il prodotto scalare si può solo trovare la proiezione ortogonale di un vettore su una retta!

Sol. Ex. 11.7
Se $B = (x, y, z)$, si deve avere $\overrightarrow{AB} = (x - 1, y, z - 2) = (4, -2, 1)$: uguagliando le componenti si trova $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$; dunque $B = (5, -2, 3)$.

Sol. Ex. 11.8
Sì: $(1, 2, 1) - (2, 1, -1) - (-1, 1, 2) = (1 - 2 + 1, 2 - 1 - 1, 1 + 1 - 2) = (0, 0, 0)$. Si può riscrivere l'uguaglianza come $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, quindi il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ sta nel piano individuato da $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$.

Sol. Ex. 11.9
$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 1) - (-1, 1, 3) = (1 + 1, 3 - 1, 1 - 3) = (2, 2, -2)$. Quindi $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.

Sol. Ex. 11.10
B). Infatti $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4) = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -7$. Attenzione: le risposte **A)** e **C)** sono da escludere a priori, poiché il prodotto scalare è un numero, non un vettore!

Sol. Ex. 11.11
$\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ è un versore con la stessa direzione di $\mathbf{u}$. Dunque il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{u}$ è $(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\,\mathbf{w} = \left(-1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5}\right)\mathbf{w} = \frac{2}{5}\mathbf{w} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{8}{25}, \frac{6}{25}\right)$.

Sol. Ex. 11.12
B). Infatti da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 1 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + (-1) \cdot 2}{\sqrt{4+5+1} \cdot \sqrt{1+5+4}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$. Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dai due vettori è $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$.

Sol. Ex. 11.13
Da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ si ricava $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2}$.

Similmente da $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta'$ si ricava $\cos\theta' = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{w}|} = \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{2}$.

Dunque, a meno dell'orientazione, l'angolo formato dalle due coppie di vettori è lo stesso e vale $\pi/3$.

Sol. Ex. 11.14
Se $\mathbf{w} = (x, y, z)$, si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = x + y = 0$ e $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 2y - z = 0$. Dunque, un vettore soluzione è $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$. Ci sono però infiniti vettori con questa proprietà, quelli della forma $(-t, t, 2t)$, con t reale non nullo.

Sol. Ex. 11.15
C). Infatti $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1) = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, 7)$. Attenzione: le risposte **B)** e **D)** sono da escludere a priori, poiché il prodotto vettoriale è un vettore, non un numero!

Sol. Ex. 11.16
$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere proporzionali (ciò non esclude che uno o entrambi siano nulli). Infatti

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \Longleftrightarrow 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

e il prodotto vettoriale si annulla se e solo se i due vettori sono proporzionali.

Sol. Ex. 11.17
Invece di calcolare direttamente i due prodotti vettoriali, usiamo le proprietà di tale prodotto: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \Longleftrightarrow \mathbf{u}$ e $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ hanno la stessa direzione. Risulta $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1, 2, -1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}$. Quindi la risposta è affermativa

Sol. Ex. 11.18
Si deve avere $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (h, -1, h) \bullet (2 - h, 1, 0) = 0$, cioè $h(2 - h) - 1 = 0$, che ha la sola soluzione $h = 1$. Per tale valore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 2)$.

Sol. Ex. 11.19
Si può procedere come nell'esercizio 11.14. Oppure: un vettore contemporaneamente ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è proporzionale a $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (2, 1, -4) \wedge (3, -2, 1) = (-7, -14, -7) = -7(1, 2, 1)$.
Se h è un numero reale non nullo, il modulo $|h(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})| = |-7h(1, 2, 1)| = 7|h| \cdot \sqrt{1 + 4 + 1} = 7\sqrt{6}|h|$ vale 1 se e solo se $h = 1/7\sqrt{6}$ o $h = -1/7\sqrt{6}$.
Ci sono dunque due possibili soluzioni: $\left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)$ e $\left(-1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\right)$.

Sol. Ex. 11.20
I vettori sono quelli dell'esercizio 11.17. Poiché $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, c'è un vettore che è ortogonale a tutti e tre i vettori e quindi essi sono complanari. Un altro modo di procedere è quello di chiedersi se $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = 0$:

$$((-2, -4, 2) \wedge (2, 1, 1)) \bullet (1, -1, 2) = (-6, 6, 6) \bullet (1, -1, 2) = -6 - 6 + 12 = 0.$$

Sol. Ex. 11.21
$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ devono essere complanari (ciò non esclude che qualcuno sia nullo). Infatti
$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})\Longleftrightarrow\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{u}\bullet(-\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\Longleftrightarrow\mathbf{u}\bullet(2\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=0\Longleftrightarrow\mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=0$
e il prodotto misto si annulla se e solo se i tre vettori sono complanari.

Sol. Ex. 11.22
Il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ o è nullo oppure, per definizione, è ortogonale a $\mathbf{u}$: in entrambi i casi il loro prodotto scalare è nullo. Invece, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono proporzionali (e, in particolare, nessuno dei due è nullo), il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ non è nullo e quindi non può essere proporzionale a $\mathbf{u}$ avendo direzione ad esso ortogonale: quindi il vettore $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ non può essere nullo.

Sol. Ex. 11.23
Usando le proprietà del prodotto vettoriale si ha
$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u})=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}=\mathbf{0}$,
$(\mathbf{u}+h\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+h\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, poiché $\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
Come conseguenza della prima si ha $(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+h\mathbf{u}))\bullet\mathbf{w}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$.
Invece, usando le proprietà dei prodotti scalare e vettoriale si ha
$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet(\mathbf{w}+h\mathbf{u})=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{u}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}+h\cdot 0$, poiché $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{u}$.
Queste proprietà hanno ben noti corrispettivi geometrici: l'area di un parallelogrammo non varia facendo slittare un lato, se la distanza dal lato opposto rimane costante; similmente il volume di un parallelepipedo non varia facendo slittare una faccia, se la distanza dalla faccia opposta rimane costante.

Sol. Ex. 11.24
Ha senso solo la **B)** che rappresenta il prodotto scalare di due vettori. Invece:
in **A)** $\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ e un numero,
in **C)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto vettoriale tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$,
in **D)** $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ è un numero e non si può fare il prodotto scalare tra un numero e il vettore $\mathbf{u}$.

Sol. Ex. 11.25
Hanno senso la **B)** e la **C)**, mentre la **A)** non ha senso poiché il prodotto vettoriale non è associativo e quindi non si possono "togliere le parentesi". Notiamo tra l'altro che, visto che $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\bullet\mathbf{b}$, si ha:
$(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}))\bullet\mathbf{u}=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{u})\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{0}\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=0$,
mentre non è detto che $((\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}$ sia nullo: ad esempio per $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ e $\mathbf{v}=\mathbf{w}=\mathbf{j}$ si ha
$((\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i}=(\mathbf{k}\wedge\mathbf{j})\bullet\mathbf{i}=-\mathbf{i}\bullet\mathbf{i}=-\mathbf{1}$.

Applicazioni geometriche

Attenzione Come osservato nella teoria, una retta può essere rappresentata in forma parametrica in infiniti modi, tra di loro equivalenti. Inoltre, ci sono infiniti modi di rappresentarla come intersezione di due piani, visto che per una retta passano infiniti piani distinti. Quindi può darsi che, anche svolgendo correttamente un esercizio, alla fine si trovi un risultato diverso da quello proposto: per verificare la correttezza del risultato, si può - ad esempio - controllare se due punti della retta trovata hanno coordinate che verificano tutte le equazioni contenute nella soluzione proposta.

Sol. Ex. 11.26
Scegliendo di rappresentare i punti P della retta tramite l'equazione vettoriale: $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BA}$, si ottengono le equazioni parametriche: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.
Eliminando t dalla prima e sostituendo: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.27
Scegliendo di rappresentare i punti P della retta tramite l'equazione vettoriale: $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$, si ottengono le equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.
Ricavando t in tutte le equazioni ed uguagliando: $\dfrac{x-1}{4} = y = \dfrac{z-1}{2}$.

Sol. Ex. 11.28
$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta in quanto è intersezione di due piani aventi vettori direttori $(2, -1, 3)$ e $(0, 1, -4)$ non proporzionali (quindi i piani non sono paralleli). Si può passare in forma parametrica dando (ad esempio) a y valore variabile t e ricavando x e z dalle due equazioni:
$\begin{cases} x = 5/4 + t/8 \\ y = t \\ z = -1/2 + t/4 \end{cases}$. Dunque un vettore direttore è dato ad esempio da $(1, 8, 2)$.
Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse x è $\frac{(1,8,2)\bullet(1,0,0)}{|(1,8,2)|} = \frac{1}{\sqrt{69}}$.
Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse y è $\frac{(1,8,2)\bullet(0,1,0)}{|(1,8,2)|} = \frac{8}{\sqrt{69}}$.
Il coseno dell'angolo che questo vettore forma con l'asse z è $\frac{(1,8,2)\bullet(0,0,1)}{|(1,8,2)|} = \frac{2}{\sqrt{69}}$.

Sol. Ex. 11.29
La retta è assegnata come intersezione di due piani $\begin{cases} x + z = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$.
Equazioni parametriche corrispondenti: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$: dunque un suo vettore direttore è $(1, 3, -1)$.
La retta cercata, dovendo essere parallela ad essa ha la stessa direzione e quindi, passando per $A = (1, 1, -1)$, ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.30
Il vettore direttore del piano, $\mathbf{v} = (2, 1, -4)$, è ortogonale al piano e quindi dà anche la direzione della retta, che ha quindi equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$.
Ricavando t in tutte le equazioni ed uguagliando: $\frac{x-3}{2} = y + 2 = \frac{1-z}{4}$.

Sol. Ex. 11.31
Vettore direttore della prima retta: $\mathbf{v} = (3, -2, 1/2)$.
Vettore direttore della seconda retta: $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$.
Vettore ortogonale ad entrambe: $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (-11/2, -13/2, 7)$.
Equazioni parametriche della retta cercata: $\begin{cases} x = 1 + 11t \\ y = 2 + 13t \\ z = 3 - 14t \end{cases}$.

Sol. Ex. 11.32
Le due rette sono sicuramente diverse poiché il vettore direttore della prima $(2, 1, -4)$ non è proporzionale a quello $(11, 13, -14)$ della seconda: questo dice anche che le due rette non sono parallele.
Per stabilire se le due rette sono incidenti, visto che una è in forma non parametrica, possiamo vedere se ci sono punti $(1 + 11t, 2 + 13t, 3 - 14t)$ della seconda che appartengono alla prima che ha equazioni: $\frac{x-3}{2} = y + 2 = \frac{1-z}{4}$ cioè se c'è qualche valore di t per cui valgono le due uguaglianze $\frac{(1+11t)-3}{2} = (2 + 13t) + 2 = \frac{1-(3-14t)}{4}$. Ma

$$\frac{11t-2}{2} = 4 + 13t = \frac{-2+14t}{4} \iff \begin{cases} 22t - 4 = -2 + 14t \\ 11t - 2 = 8 + 26t \end{cases} \iff \begin{cases} 8t = 2 \\ 15t = -10 \end{cases}.$$

Visto che queste due equazioni non possono essere verificate contemporaneamente, si conclude che le due rette non hanno punti in comune: dunque sono sghembe.

Sol. Ex. 11.33
Si possono scegliere come vettori direttori (rispettivamente) della prima e della seconda retta $(2, 1, -4)$ e $(1, -1, 1)$: dunque il coseno di uno degli angoli tra le due rette vale

$$\frac{(2,1,-4)\bullet(1,-1,1)}{|(2,1,-4)|\cdot|(1,-1,1)|} = \frac{2-1-4}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-3}{3\sqrt{7}} = \frac{-1}{\sqrt{7}}.$$

Ne consegue che tale angolo è ottuso (e misura $\arccos\frac{-1}{\sqrt{7}} \simeq 1.958$ radianti). L'angolo cercato è il suo supplementare e quindi misura $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}} \simeq 1.1832$ radianti.

Sol. Ex. 11.34
Vettore direttore della retta assegnata: $(-1, 1/3, 1)$; vettore direttore del piano: $(1, 1, 1)$.
Il vettore direttore (a, b, c) della retta cercata deve essere ortogonale a entrambi, quindi si può scegliere $(a, b, c) = (1, 1, 1) \wedge (-3, 1, 3) = (2, -6, 4)$ oppure un vettore ad esso proporzionale.
Equazioni parametriche della retta cercata:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}.$$

Sol. Ex. 11.35
Tutti i piani passanti per $A = (0, 1, 1)$ hanno la forma $a(x - 0) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0$. Il piano assegnato ha vettore direttore $(3, -2, -1)$ ed il piano cercato, essendo ad esso parallelo, è perpendicolare alla stessa direzione. Dunque ha la forma: $3(x - 0) - 2(y - 1) - (z - 1) = 0$ o, sviluppando, $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Sol. Ex. 11.36
Tutti i piani passanti per $A = (1, 0, 1)$ hanno la forma $a(x - 1) + b(y - 0) + c(z - 1) = 0$. La retta assegnata ha vettore direttore $(-1, 1, 1/3)$: il piano cercato, essendo perpendicolare a tale direzione ha la forma: $-3(x - 1) + 3(y - 0) + (z - 1) = 0$ o, sviluppando, $-3x + 3y + z + 2 = 0$.

Sol. Ex. 11.37
Un possibile modo di procedere è il seguente. Se $P = (x, y, z)$ è un punto del piano, i vettori $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, devono essere complanari, cioè deve risultare $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AP} = 0$. Poiché: $\overrightarrow{AP} = (x - 2, y, z)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$, si ricava l'equazione $\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ che, sviluppata, fornisce: $4(x - 2) + 3y + 2z = 0$.

Sol. Ex. 11.38
Il punto $C = (1, 0, 2)$ non appartiene alla retta di equazioni $2 - x = y = 2z$ poiché (ad esempio) le sue coordinate non verificano l'uguaglianza $y = 2z$.
Un modo per trovare l'equazione del piano contenente la retta e il punto è di individuare due punti A e B sulla retta e di calcolare il piano passante per i tre punti. Ponendo $y = 0$ nelle equazioni della retta si trova il punto $A = (2, 0, 0)$; invece ponendo $x = 0$, si trova il punto $B = (0, 2, 1)$: i punti individuati sono quelli dell'esercizio precedente e quindi l'equazione è la stessa.

Un altro modo di procedere è quello di osservare che:
- il piano ha equazione del tipo $a(x - 1) + b(y) + c(z - 2) = 0$,
- i punti della retta hanno coordinate del tipo $(2 - 2t, 2t, t)$ (basta passare in forma parametrica),
- la retta è contenuta nel piano se e solo se le coordinate dei suoi punti verificano l'equazione del piano per ogni t.

Quindi, per ogni t, deve risultare

$$a(2 - 2t - 1) + b(2t) + c(t - 2) = 0, \text{ cioè } (2b - 2a + c)t + a - 2c = 0, \text{ cioè } \begin{cases} a = 2c \\ 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

Una soluzione possibile è data dal vettore $(4, 3, 2)$ e quindi il piano ha equazione $4x + 3y + 2z - 8 = 0$.

Sol. Ex. 11.39
Si può procedere come nell'esercizio 11.37, pur di sostituire al vettore $\overrightarrow{AC}$ il vettore direttore della retta a cui il piano deve essere parallelo: $(2,2,1)$. Alternativamente osservare che:

- il piano, passando per $A=(1,0,0)$, ha equazione della forma $a(x-1)+by+cz=0$,
- le coordinate di $B=(0,1,0)$ verificano tale equazione, cioè $-a+b=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello della retta, cioè $2a+2b+c=0$.

Una soluzione del sistema $\begin{cases} a=b \\ 2a+2b+c=0 \end{cases}$ è data da $(1,1,-4)$ e quindi il piano ha equazione $x+y-4z=1$.
La sua distanza dall'origine è $\frac{|-1|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Sol. Ex. 11.40
Osserviamo che:

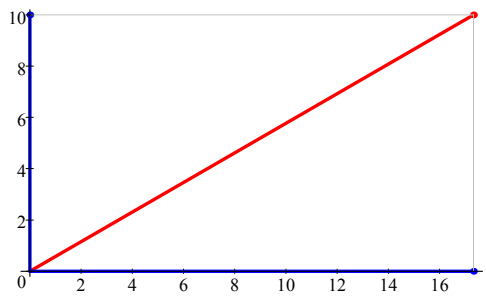
- il piano, passando per $A=(0,1,0)$, ha equazione della forma $ax+b(y-1)+cz=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello $(2,1,-2)$ della retta, cioè $2a+b-2c=0$,
- il vettore direttore del piano deve essere ortogonale a quello $(1,-1,-1)$ del piano assegnato, cioè $a-b-c=0$.

Una soluzione del sistema $\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases}$ è data da $(1,0,1)$ e quindi il piano ha equazione $x+z=0$.

Sol. Ex. 11.41
Uno dei due angoli diversi formati tra il piano di equazione $x+y-4z=1$ e quello di equazione $x+z=0$ coincide con l'angolo tra i loro vettori direttori $(1,1,-4)$ e $(1,0,1)$, l'altro è il suo supplementare. Ora, l'angolo tra i vettori direttori misura $\arccos\frac{(1,1,-4)\bullet(1,0,1)}{|(1,1,-4)|\cdot|(1,0,1)|}=\arccos\frac{-3}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$ ed è quindi ottuso, come richiesto: dunque la misura dell'angolo ottuso formato dai due piani è $\frac{2}{3}\pi$.

Applicazioni fisiche

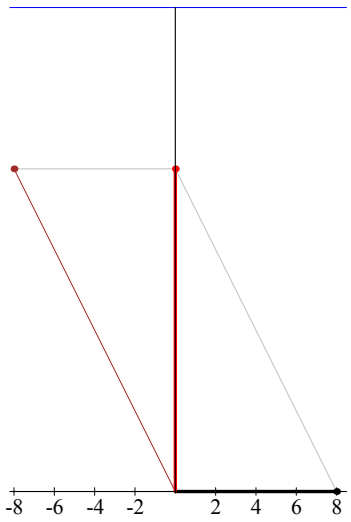
Sol. Ex. 11.42
Il problema assegna il modulo della forza $20N$, la sua direzione (inclinata di $30°$ rispetto al piano orizzontale) e il verso (dalla slitta alla renna) e vuole conoscere il vettore componente orizzontale e il vettore componente verticale. Possiamo schematizzare il problema come in figura



ove si pensa la slitta nell'origine del sistema di riferimento. Il vettore può essere rappresentato per componenti come $(20\cos 30°, 20\sin 30°)=$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 20, \frac{1}{2}\cdot 20\right)=\left(10\sqrt{3}, 10\right)$.
Allora la componente orizzontale (che provoca il moto) è di $10\sqrt{3}N$ e quella verticale (che tende a sollevare la slitta) è di $10N$.

Sol. Ex. 11.43
Il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento (orizzontale) di $16m$: in termini di componenti basta fare il prodotto $\left(10\sqrt{3}, 10\right) \bullet (16, 0) = 160\sqrt{3}J$ (essendo $1J = 1N \cdot 1m$). Oppure secondo la definizione di prodotto scalare: $(20N) \cdot (16m) \cdot \cos 30° = 160\sqrt{3}J$

Sol. Ex. 11.44



Rappresentiamo una riva come l'asse x e l'altra come una retta ad esso parallela e pensiamo che il fiume scorra nel verso positivo dell'asse x e che il battello parta dall'origine: l'obiettivo è di fargli mantenere una traiettoria ortogonale alle due rive e perché questo succeda la velocità che si ottiene componendo la velocità del fiume con quella del battello deve essere diretta come l'asse y: ciò è possibile solo se la componente orizzontale della velocità del battello è opposta a quella del fiume.
Riportando i vettori velocità come in figura, si vede che la velocità risultante e la velocità del fiume individuano un triangolo rettangolo con il cateto orizzontale ($8km/h$) che è metà dell'ipotenusa ($16km/h$): quindi l'angolo compreso tra tale cateto e l'ipotenusa è di $60° = \arccos \frac{1}{2}$.
Attenzione però: l'angolo tra il vettore velocità del fiume e il vettore velocità del battello è di 120°.

È possibile anche ottenere questo risultato lavorando per componenti: denotiamo con (a, b) il vettore velocità del battello e con $(8, 0)$ il vettore velocità del fiume (l'unità di misura è per le componenti di entrambi i vettori: km/h): allora $(a, b) + (8, 0)$ è diretto come l'asse y, cioè ha la prima componente nulla se e solo se $a = -8$ e un vettore $(-8, b)$ di modulo 16 forma con $(8, 0)$ un angolo tale che il suo coseno vale: $\frac{(-8,b)\bullet(8,0)}{16 \cdot 8} = -\frac{1}{2}$ cioè un angolo di 120°.
Si nota che questa seconda maniera di procedere permette di arrivare al risultato anche con un'analisi del modello fisico molto ridotta e sostanzialmente senza il supporto di disegni.

Argomento 12
Matrici

12.1 Vettori di $\mathbb{R}^n$ e operazioni

▶ **Vettore** di $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1\ldots n} = (x_i)_{i=1}^n$, con $x_i \in \mathbb{R}$ **componenti** di $\mathbf{x}$.

▶ $\mathbb{R}^n$= spazio dei vettori reali a n componenti = spazio vettoriale reale n-dimensionale.

▶ **Somma di due vettori in** $\mathbb{R}^n$. Dati $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$ e $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$, la loro somma è il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti la somma delle componenti, ossia $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i)_{i=1}^n$.

▶ **Prodotto di un vettore per uno scalare**. Dato $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, il prodotto di a per $\mathbf{x}$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti il prodotto per a delle componenti, ossia $a\mathbf{x} = (ax_i)_{i=1}^n$.

▶ **Prodotto scalare di due vettori**. Dati $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n$ e $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$, il prodotto scalare è il numero reale ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe, ossia $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)$.

NOTA Le componenti x_i di un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ si possono allineare in una riga oppure in una colonna.

Esempio 12.1 Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ (con le componenti allineate in colonna)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{calcoliamo}$$

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \\ 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 - 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot (-1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$ (con le componenti allineate in riga)

$$\mathbf{x} = (3, 2, \pi, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (0, -1, 1, 2), \qquad \text{calcoliamo}$$

$$2\mathbf{y} - \mathbf{x} = (-3, -4, 2 - \pi, 4) \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = -2 + \pi.$$

12.2 Matrici e operazioni

▶ **Matrice**. Una tabella di $m \times n$ numeri reali disposti in m righe ed in n colonne del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$$

si chiama **matrice di** m **righe ed** n **colonne**, (matrice di tipo (m, n) o $m \times n$). Ogni elemento a_{ij} ha un indice di riga i e un indice di colonna j, che indicano la riga e la colonna di A in cui si trova.

▶ *Matrici particolari.*

◇ Una matrice di tipo $(n,1)$ formata da n righe ed una sola colonna è un **vettore colonna**, cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono allineate in colonna.

◇ Una matrice di tipo $(1,n)$ formata da una sola riga e n colonne è un **vettore riga**, cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono allineate in riga.

◇ Una matrice si dice **quadrata** (**di ordine** n) se $m = n$.

◇ Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore (inferiore)** se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ (per $i < j$), cioè se sono nulli gli elementi posti al di sotto (al di sopra) di a_{ii}.

◇ Una matrice quadrata si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$, cioè se sono nulli gli elementi diversi da a_{ii}.

◇ Una matrice (m,n) si dice della **forma a scalini** se, finchè possibile, ogni riga inizia (da sinistra) con un numero di zeri strettamente maggiore della riga precedente.

Esempio 12.2 Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice A è triangolare superiore, ma non a scalini; invece la matrice B è sia triangolare superiore che della forma a scalini.
In generale: ogni matrice *quadrata* della forma a scalini è sempre anche triangolare superiore. Il viceversa, in generale non è vero come mostra la matrice A dell'esempio precedente.

Nel seguito risulterà talvolta utile vedere una matrice $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ di tipo (m,n) come accostamento di m vettori riga (di $\mathbb{R}^n$) $\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_m}$ oppure come accostamento di n vettori colonna (di $\mathbb{R}^m$) $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}$. Quindi, per esempio il vettore $\mathbf{r_i}$, riga i di A, è dato da $\mathbf{r_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{in} \end{pmatrix}$ e la matrice A si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{c_n} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \mathbf{c_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Data una qualunque matrice A di tipo (m,n) è possibile passare ad una matrice A' ancora di tipo (m,n) e avente forma a scalini facendo le seguenti

▶ **Trasformazioni elementari sulle righe di** A

I) R_{ij} : scambio della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$;

II) $k \cdot R_i$: prodotto della riga $\mathbf{r_i}$ per k $(\neq 0)$;

III) $R_i + kR_j$: somma della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$ moltiplicata per k.

Una matrice A' ottenuta da A mediante trasformazioni elementari è detta **equivalente** ad A.

Esempio 12.3 Mostriamo come applicare le trasformazioni elementari per passare da una matrice data A ad una matrice A', equivalente ad A, e della forma a scalini.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_1 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 + 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - 7R_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = A'$$

Avremmo anche potuto operare diversamente, ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_1 3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{2\left(R_2 + \tfrac{1}{2}R_1\right)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{7\left(R_3 - \tfrac{1}{7}R_2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A''$$

ed ottenere così un'altra matrice A'' equivalente ad A.
Quindi, in generale, esistono più matrici della forma a scalini che si ottengono con trasformazioni elementari da una data matrice A.

▶ **Matrice trasposta**. Data la matrice di tipo (m, n): $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$, la sua matrice **trasposta** (denotata A^T) è la matrice di tipo (n, m) ottenuta dallo scambio delle righe e delle colonne di A, cioè: $\left(A^T\right)_{ij} = (a_{ji})$

Esempio 12.4 Data la matrice di tipo $(3, 2)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, la sua matrice trasposta è la matrice di tipo $(2, 3)$: $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Si possono definire l'uguaglianza e la somma tra matrici dello stesso tipo e il prodotto di una matrice per uno scalare nel modo seguente.

▶ **Uguaglianza di matrici**. Le due matrici di tipo $(m, n) : A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ e $B = (b_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$, sono uguali se e solo se hanno gli elementi ordinatamente uguali ossia se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni $i = 1 \ldots m$ e ogni $j = 1 \ldots n$.
▶ **Somma di matrici**. Date due matrici di tipo $(m, n) : A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ e $B = (b_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$, la loro somma è definita come la matrice di tipo (m, n) ottenuta sommando gli elementi che occupano lo stesso posto, cioè

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$$

▶ **Prodotto per uno scalare**. Data la matrice di tipo $(m, n) : A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ ed il numero reale c, il prodotto di c per A è definita come la matrice di tipo (m, n)

$$cA = (ca_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$$

Esempio 12.5 Date le due matrici di tipo $(3,2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice $2A - B$ è la matrice di tipo $(3,2)$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) - 4 & 2\cdot 0 - 1 \\ 2\cdot 2 - 0 & 2\cdot 1 - \sqrt{2} \\ 2\cdot 0 + 2 & 2\cdot 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, possono essere definite le seguenti operazioni di prodotto.

▶ **Prodotto di una matrice per un vettore colonna**.

Data la matrice di tipo (m,n) : $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ ed il vettore colonna di tipo $(n,1)$: $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{n}$ il loro prodotto $A\mathbf{x}$ è il vettore colonna di tipo $(m,1)$ le cui componenti sono ottenute eseguendo il prodotto scalare delle righe di A per $\mathbf{x}$. Detto $\mathbf{r_i}$ il vettore (riga) dato dalla riga i di A, si ha che

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{x} \\ \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{x} \\ : \\ \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ : \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

NOTA. Il prodotto scalare $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ coincide con il prodotto di una matrice per un vettore colonna se si intende il vettore $\mathbf{u}$ scritto in riga e il vettore $\mathbf{v}$ in colonna.

Esempio 12.6 Dati la matrice di tipo $(2,3)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ e il vettore colonna di tipo $(3,1)$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il prodotto $A\mathbf{x}$ è il vettore colonna di tipo $(2,1)$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4) + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ -1\cdot(-4) + 5\cdot 2 + 7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

▶ **Prodotto righe per colonne di una matrice di tipo** (m,n) **per una matrice di tipo** (n,p).

Data la matrice di tipo (m,n) : $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ e la matrice di tipo (n,p) : $B = (b_{jk})_{j=1\ldots n}^{k=1\ldots p}$, il loro prodotto righe per colonne è dato dalla matrice di tipo (m,p) : AB ottenuta eseguendo il prodotto scalare dei vettori riga di A per i vettori colonna di B.

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ : \\ \mathbf{r_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{c_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_1} \bullet \mathbf{c_p} \\ \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_2} \bullet \mathbf{c_p} \\ : & : & & : \\ \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_1} & \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_2} & .. & \mathbf{r_m} \bullet \mathbf{c_p} \end{pmatrix}$$

In particolare, se $D = AB$, l'elemento d_{ik} in riga i ed in colonna k si ottiene eseguendo il prodotto scalare della riga $\mathbf{r_i}$ di A con la colonna $\mathbf{c_k}$ di B, ossia

$$d_{ik} = \mathbf{r_i} \bullet \mathbf{c_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

NOTA BENE. Il prodotto righe per colonne tra due matrici si può eseguire *solo se* il numero di colonne della prima coincide con il numero di righe della seconda *(l'ordine è essenziale!)* ed il risultato è una matrice con un numero di righe uguale a quello della prima ed un numero di colonne uguale a quello della seconda.

Esempio 12.7 Date $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, il prodotto AB è la matrice di tipo $(2,3)$

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 - 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 - 1\cdot 5 & 0\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot 5 & 2\cdot 3 + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il prodotto BA **non** può essere eseguito.

Esempio 12.8 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, si possono eseguire entrambi i prodotti AB e BA. Si ottiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \qquad \text{mentre} \qquad BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$.

12.3 Determinante di una matrice quadrata

Ad ogni matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$ di ordine n si può associare un numero reale, detto **determinante di** A (e indicato con $\det A$ oppure con $|A|$). Per calcolare[1)] il determinante della matrice quadrata A di ordine n, si procede nel modo seguente:

▶ se $n = 1$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}$;

▶ se $n = 2$, ossia se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Esempio 12.9 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

si ha: $\det A = (-1)\cdot 2 - 0\cdot 5 = -2$; $\det B = 3\cdot(-1) - (-2)\cdot 1 = -1$.

Per poter calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine $n \geq 3$, dobbiamo introdurre le seguenti definizioni.

▶ Data la matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & & : \\ a_{n1} & & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si definisce

▶ **Minore complementare dell'elemento** a_{ij} : il determinante della matrice quadrata di ordine $(n-1)$, detta A_{ij}, e ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j.

▶ **Complemento algebrico di** a_{ij} : il numero reale $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

[1)] Non viene fornita la definizione di determinante di una matrice, ma **solo** un metodo operativo per calcolarlo.

Esempio 12.10 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ allora

$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{11} è: $(-1)^{1+1}\det A_{11} = 5$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{21} è: $(-1)^{2+1}\det A_{21} = -2$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, e il complemento algebrico dell'elemento a_{31} è: $(-1)^{3+1}\det A_{31} = 1$

▶ Siamo ora in grado di calcolare il determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine $n \geq 3$:

Fissata una qualunque linea (riga o colonna) di A, il deteminante di A si ottiene sommando il prodotto di ogni elemento di tale linea per il suo complemento algebrico.

In formule, fissata per esempio la riga k, con $1 \leq k \leq n$ si ha

$$\det A = a_{k1}\,(-1)^{k+1}\det A_{k1} + a_{k2}\,(-1)^{k+2}\det A_{k2} + \cdots + a_{kn}\,(-1)^{k+n}\det A_{kn}$$

oppure, fissando la colonna k,

$$\det A = a_{1k}\,(-1)^{1+k}\det A_{1k} + a_{2k}\,(-1)^{2+k}\det A_{2k} + \cdots + a_{nk}\,(-1)^{n+k}\det A_{nk}.$$

NOTA Poichè il calcolo del determinante è indipendente dalla linea (riga o colonna) scelta, conviene, quasi sempre, fissare una linea della matrice che contenga il maggior numero di zeri.

Esempio 12.11 Sia A la matrice dell'esempio precedente. Per calcolarne il determinante fissiamo (ad esempio) la prima colonna, allora

$$\det A = a_{11}\,(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\det A_{21} + a_{31}\,(-1)^{3+1}\det A_{31}$$

ossia

$$\det A = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 12.$$

Fissando invece la terza riga si ottiene, come vediamo, lo stesso risultato:

$$\det A = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (6+1) = 12.$$

Esempio 12.12 Per calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

fissiamo, ad esempio, la prima colonna e otteniamo:

$$\det A = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fissando ora la seconda riga nella seconda matrice e la prima colonna nella terza otteniamo:

$$\det A = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -5 + 2 \cdot [-3 - 2 - 10] = -35.$$

▶ **Alcune proprietà del determinante**.

◇ Se A è triangolare allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.

◇ Se A ha una riga o una colonna di zeri, allora $\det A = 0$.

◇ Se A ha due righe o due colonne uguali, allora $\det A = 0$.

◇ Scambiando due righe (ossia applicando la Trasformazione I) o due colonne il determinante cambia segno.

◇ Moltiplicando una riga per un numero k ($\neq 0$) (ossia applicando la Trasformazione II) il determinante viene moltiplicato per k.

◇ Aggiungendo ad una riga un multiplo di un'altra (ossia applicando la Trasformazione III) il determinante non cambia.

◇ *(Teorema di Binet)* Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

◇ Data la matrice quadrata di ordine 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

ed esiste un metodo geometrico per calcolare il determinante detto *regola di Sarrus*.

Calcolo del determinante con le trasformazioni elementari

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine n si può anche procedere così:

△ Attraverso trasformazioni elementari passiamo dalla matrice A ad una matrice equivalente A', quadrata e a scalini, quindi triangolare superiore.

△ Calcoliamo facilmente il determinante della matrice A' utilizzando la prima proprietà del determinante.

△ Utilizzando le altre proprietà del determinante e ricordando quali trasformazioni abbiamo applicato per passare da A ad A' possiamo dedurre $\det(A)$.

Esempio 12.13 Per calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la trasformiamo in una matrice equivalente a scalini.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{R_2 + \tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - \tfrac{2}{7}R_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{pmatrix} = A'$$

Inoltre $\det(A') = 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{7} = 12$.
Poichè per passare da A ad A' abbiamo utilizzato solo la trasformazione III che non cambia il determinante si avrà: $\det(A) = \det(A') = 12$ (come già calcolato in altro modo nell'Esempio 12.11).

Esempio 12.14 Calcoliamo il determinante della seguente matrice A trasformandola in una matrice equivalente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_1 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} R_3 + \frac{4}{3}R_2 \\ R_4 - \frac{1}{2}R_3 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix} \boxed{R_4 + \tfrac{3}{2}R_3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A'$$

Inoltre $\det(A') = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (-5) = 35$ e poichè la matrice A' è stata ottenuta da A applicando un po' di volte la trasformazione III, che non cambia il determinante, e una volta la trasformazione I, che cambia segno al determinante, si ha (come già visto nell'Esempio 12.12)

$$\det(A) = -\det(A') = -35.$$

12.4 Matrici inverse di matrici quadrate

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

▶ A è detta **invertibile** se esiste una matrice A^{-1} (detta **inversa di** A), quadrata di ordine n, tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

dove I è la matrice **identica** di ordine n,[2)] cioè

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.15 La matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Infatti si verifica che:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e anche} \quad A^{-1}A = I.$$

Esempio 12.16 La matrice inversa *non* sempre esiste. Ad esempio, la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
Infatti se esistesse una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $I = AB$, dovrebbe essere

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix},$$

da cui $0 = 1$, ma questo è impossibile.
Alla stessa conclusione si può anche giungere osservando che $\det A = 0$ e che ogni matrice con deteminante nullo non è invertibile. Infatti: se C è invertibile e C^{-1} è la sua inversa si ha $CC^{-1} = I$ e quindi $\det(CC^{-1}) = \det I = 1$. D'altra parte, per il Teorema di Binet si ha: $\det(CC^{-1}) = \det C \det C^{-1}$ e quindi $\det C \det C^{-1} = 1$, quindi, in particolare, il determinante di ogni matrice invertibile C è diverso da zero.

Il teorema seguente dà una condizione per garantire che la matrice A sia invertibile e mostra come calcolare l'inversa.

Teorema 12.1 *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono dati da*

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

In particolare, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$, allora $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

[2)] Poichè la matrice identica I di ordine n è triangolare, è semplice mostrare che $\det I = 1$, qualunque sia n.

Esempio 12.17 Calcolare, se possibile, la matrice inversa delle seguenti matrici

$$i)\ A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix};\quad ii)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix};\quad iii)\ A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

$i)$ $\det A=5$ e $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$;

$ii)$ $\det A=0$ quindi non esiste l'inversa;

$iii)$ $\det A=-5$ e $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&4\\-1&3&-2\end{pmatrix}$.

Calcolo dell'inversa con le trasformazioni elementari

Nel seguito, viene mostrato un altro metodo per determinare la matrice inversa basato sulle trasformazioni elementari.[3)]
Per applicarlo si procede così:
△ Si affianca alla matrice A che si vuole invertire la matrice identica dello stesso ordine, ottenendo in questo modo una matrice B di tipo $(n,2n)$.
△ Si opera sulla matrice B con trasformazioni elementari fino ad ottenere una matrice B' le cui prime n colonne siano la matrice identica.
△ Le n colonne a destra della matrice B' sono la matrice inversa A^{-1}.

Esempio 12.18 Calcoliamo in questo modo l'inversa della matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\boxed{R_3+\tfrac{1}{2}R_1}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)\boxed{R_3-\tfrac{3}{2}R_2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right)\boxed{\begin{matrix}R_2+\frac{4}{5}R_3\\R_1-\frac{2}{5}R_3\end{matrix}}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right)\boxed{R_1-R_2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{6}{5}\\0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{array}\right)\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{2}R_1\\-\frac{2}{5}R_3\end{matrix}}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\end{array}\right).$$

Quindi la matrice inversa è $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&4\\-1&3&-2\end{pmatrix}$ come già trovato nell'esempio precedente.

[3)] Il metodo si basa sulla risoluzione simultanea con il metodo di Gauss di n sistemi non omogenei di n equazioni in n incognite.

12.5 Caratteristica o rango di una matrice

Data una matrice di tipo (m,n) : A, e un intero k, con $k \leq \min(m,n)$ si definisce:

▶ **Minore di ordine k estratto da A** : il determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine k ottenuta prendendo gli elementi comuni a k righe di k colonne di A.

▶ **Caratteristica o rango di A** (denotata con Car A) : l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

In altre parole, Car $A = r$ se esiste un minore di ordine r estratto da A diverso da zero **e** se tutti i minori di ordine $r+1$ estratti da A sono nulli.

▶ Per calcolare la caratteristica di una matrice può essere utile utilizzare il seguente

Teorema 12.2 (di Kronecker) *Sia A una matrice di tipo (m,n) e sia $r < \min(m,n)$. Se la matrice A contiene una sottomatrice quadrata A' di ordine r con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ che contengono A' (dette **orlate** di A) hanno determinante uguale a zero, allora Car $A = r$.*

Esempio 12.19 Determinare la caratteristica delle seguenti matrici.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Poichè $\det A = 5 \neq 0$, Car $A = 2$;

ii) Poichè $\det A = 0$, deve essere Car $A \leq 2$. Prendendo (ad esempio) le prime due righe e colonne si ottiene la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, con $\det B = -3$, quindi Car $A = 2$;

iii) Poichè la matrice A è di tipo $(3,4)$, sarà Car $A \leq 3$. Applicando il Teorema di Kronecker consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ottenuta da A prendendo le prime due righe e colonne: essa ha $\det B \neq 0$. Le matrici di ordine 3 che contengono la matrice B sono:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det B_1 = \det B_2 = 0$ entrambi le matrici di ordine 3 che contengono B hanno determinante nullo e quindi Car $A = 2$.

Esempio 12.20 Determinare, al variare del parametro reale k, la caratteristica delle matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ k & 1 & k \\ 2k & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè A_k sono matrici di tipo $(4,3)$, certamente deve essere Car $A_k \leq 3$.

Per la sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $\det B = -3 (\neq 0)$ e quindi Car$A_k \geq 2$ per ogni k.

Le sottomatrici di ordine 3 che contengono B sono:

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ 2k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e si ha: $\det C_k = k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3)$ e $\det D_k = 2k^2 + 2k - 12 = 2(k+3)(k-2)$.

Quindi:

se $k = 2$ allora Car $A_k = 2$ (infatti si ha $\det C_2 = \det D_2 = 0$, ossia entrambi i minori che contengono B sono nulli);

se $k \neq 2$ allora Car $A_k = 3$ Infatti: se $k \neq \pm 3$ allora sia $\det C_k \neq 0$ che $\det D_k \neq 0$; se $k = 3$ allora $\det C_3 = 0$, ma $\det D_3 \neq 0$; se $k = -3$ allora $\det D_{-3} = 0$, ma $\det C_{-3} \neq 0$. Quindi per ogni $k \neq 2$ c'è almeno un minore che contiene B non nullo.

Calcolo della caratteristica (o rango) con le trasformazioni elementari

Nel seguito, viene mostrato un altro metodo per determinare la caratteristica di una matrice A basato sulle trasformazioni elementari[4]. Per applicarlo si procede così:

△ Attraverso trasformazioni elementari passo dalla matrice A alla matrice equivalente A' della forma a scalini.

△ La caratteristica (o rango) di una matrice a scalini è il numero r di righe che contengono almeno un elemento non nullo.

△ La caratteristica di due matrici equivalenti è uguale.

Esempio 12.21 Determiniamo la caratteristica delle seguenti matrici con le trasformazioni elementari.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boxed{R_2 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = A'$. Quindi si ha: Car A' =Car $A = 2$;

$ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \boxed{R_2 - 2R_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$

Quindi Car A' =Car $A = 2$;

$iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{R_3 - \frac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$. Quindi Car A' =Car $A = 2$.

[4] Può essere dimostrato che il rango di matrici equivalenti è uguale, ma questo esula dal contenuto di queste note.

Argomento 12 - Esercizi

ESERCIZIO 12.1) Dati i vettori (con le componenti allineate in colonna)

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare:

a) $3\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}$; **b)** $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \sqrt{2}\mathbf{v_4}$; **c)** $\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_3} - \mathbf{v_4}$;

d) $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2}$; **e)** $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_3}$; **f)** $\mathbf{v_3} \bullet \mathbf{v_4}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile,

a) $A + B$; **b)** $C - D^T$; **c)** $A + A^T$; **d)** $B + C$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

calcolare

a) A^T; **b)** $A + B$; **c)** $A - 2B$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.4) Date le matrici e i vettori colonna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare

a) $A\mathbf{v_1}$; **b)** $A\mathbf{v_2}$; **c)** $A\mathbf{v_3}$; **d)** $B\mathbf{v_1}$; **e)** $B\mathbf{v_2}$; **f)** $B\mathbf{v_3}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare

a) AB; **b)** BA; **c)** AC; **d)** BC; **e)** CD; **f)** DA; **g)** DB; **h)** DC.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.6) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

determinare per quali valori del parametro reale a si ha:

a) $AB = BA$; **b)** $AC = CA$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.7) Date le matrici e il vettore colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcolare i prodotti: $A\mathbf{c}$ e AB.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, mostrare che vale la relazione

$$7A - A^2 = 14I$$

(dove $A^2 = AA$ e I è la matrice identica).

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.9) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare quali coppie di matrici diverse possono essere moltiplicate tra loro ed eseguire le moltiplicazioni.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.10) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Calcolare le matrici: $A + B$, AB e BA;
b) Verificare che: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$;
c) Vericare che: $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.11) Calcolare il determinante delle seguenti matrici.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, **e)** $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, **f)** $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.12) Determinare per quali valori del parametro reale k si ha $\det A = 0$, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.13) Date le matrici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$, **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$,

calcolarne, se possibile, le inverse.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.14) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Calcolare i complementi algebrici di tutti gli elementi di A;
b) Scrivere A^{-1}.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.15) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolarne l'inversa.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.16) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{b)}\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\1&2\end{pmatrix},$$

$$\textbf{c)}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\1&4&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{d)}\quad D=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\3&-1&10\end{pmatrix}.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.17) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\3&4&1&0\\0&2&2&1\end{pmatrix},\qquad \textbf{b)}\quad B=\begin{pmatrix}1&5&2&3\\0&1&1&1\\2&3&-3&-1\end{pmatrix}.$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 12.18) Determinare, al variare del parametro reale k, la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A=\begin{pmatrix}k&0&8k-8\\2&k&k\\-1&-1&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{b)}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&k&-2-k\\1&2&k^3&k\\0&k-2&0&4\end{pmatrix}.$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 12.19) Data la matrice $A=\begin{pmatrix}k&0&-2\\1&1&2\\k&3&3\end{pmatrix}$,

A) se $k\neq 6$, allora $\det A\neq 0$; **B)** se $k=6$, allora $\operatorname{Car} A=2$;
C) se $k\neq -6$, allora $\operatorname{Car} A\neq 3$; **D)** se $k=-6$, allora $\det A=0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.20) La matrice $A=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&1&1\\1&2&k\end{pmatrix}$, ha caratteristica 3

A) per ogni valore di k; **B)** per nessun valore di k;
C) per un solo valore di k; **D)** per ogni valore di k tranne uno.

Argomento *Soluzione*

Argomento 12

Soluzioni Esercizi

Suggerimento Ex. 12.17

Applicare il Teorema di Kronecker.

Suggerimento Ex. 12.18

Poichè A è una matrice quadrata conviene prima calcolarne il determinante. Quando $\det A \neq 0$, si avrà $\operatorname{Car} A = 3$. Altrimenti....

Poichè B è una matrice rettangolare conviene applicare il Teorema di Kronecker partendo da un minore non nullo per ogni valore di k.

Sol. Ex. 12.1

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2} = -1$; **e)** $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_3} = 2$; **f)** $\mathbf{v_3} \bullet \mathbf{v_4} = \sqrt{2}$.

Sol. Ex. 12.2

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; **d)** impossibile.

Sol. Ex. 12.3

a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 13 & 11 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 14 & -8 & 2 \\ -2 & -1 & 14 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.4

$A\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $A\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$B\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $B\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.5

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad AC = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 \\ -6 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -8 & 17 & -4 \end{pmatrix}; \qquad CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}; \qquad DA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 16 & -2 \\ -4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. Ex. 12.6

a) se $a = -4$; **b)** impossibile.

Sol. Ex. 12.7

$$A\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 24 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 1 & 1 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.8

$$\begin{aligned} 7A - A^2 &= 7\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ -7 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = 14I \end{aligned}$$

Sol. Ex. 12.9

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad AE = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}; \qquad BC = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BF = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$CE = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad DA = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad DB = \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$DE = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}; \qquad ED = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \qquad FC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Ex. 12.10

a) $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A+B)=-12$; $\det A=-1$; $\det B=-6$. Quindi $\det(A+B)\neq\det A+\det B$;

c) $\det(AB)=6$; $\det(BA)=6$. Quindi $\det(AB)=\det(BA)=\det A\cdot\det B$.

Sol. Ex. 12.11

a) $\det A=-6$; **b)** $\det B=-9$; **c)** $\det C=-11$;

d) $\det D=-16$; **e)** $\det E=-6$; **f)** $\det F=45$.

Sol. Ex. 12.12

$\det A=k+2-k^2$ quindi $\det A=0\Leftrightarrow k=-1$ oppure $k=2$.

Sol. Ex. 12.13

a) $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $B^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$;

c) $C^{-1}=\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$; **d)** D^{-1} non esiste.

Sol. Ex. 12.14

a) Il complemento algebrico di a_{11} è: $(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=6$; analogamente si ricava che:

i complementi algebrici di a_{12}, a_{13}, e a_{23} sono 0;

il complemento algebrico di a_{21} è -6 e quello di a_{22} è 3;

il complemento algebrico di a_{31} è -4, quello di a_{32} è 1 e quello di a_{33} è 2.

b) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.15

a) Poichè $\det A=a$, la matrice A è invertibile $\iff$ $a\neq 0$.

b) Per $a\neq 0$, $A^{-1}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -2a & a & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol. Ex. 12.16

a) Car $A=2$; **b)** Car $B=1$; **c)** Car $C=3$; **d)** Car $D=2$.

Sol. Ex. 12.17

a) Car $A = 3$; **b)** Car $B = 2$.

Sol. Ex. 12.18

a) Se $k \neq \frac{4}{3}$, allora Car $A = 3$; se $k = \frac{4}{3}$, allora Car $A = 2$.

b) Se $k \neq 0$, allora Car $B = 3$; se $k = 0$, allora Car $B = 2$.

Sol. Ex. 12.19 **D)**

Sol. Ex. 12.20 **A)**

Argomento 13
Sistemi lineari

Sistemi lineari: definizioni

▶ Un'equazione nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$ della forma

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b$$

ove $c_1, \dots, c_n$ sono numeri reali (detti **coefficienti**) e b è un numero reale (detto **termine noto**) si chiama **equazione lineare in** $x_1, \dots, x_n$.

▶ **Un sistema lineare di** m **equazioni nelle** n **incognite** $x_1, \dots, x_n$ è un sistema formato da m equazioni lineari in $x_1, \dots, x_n$, ossia:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & .. & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & .. & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & .. & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. \qquad (*)$$

▶ Una **soluzione** di $(*)$ è una n-pla di numeri reali $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$ che sostituita alle incognite soddisfa simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

▶ La matrice di tipo (m,n) : $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ si chiama **matrice dei coefficienti del sistema**.

Il vettore colonna di tipo $(m,1)$: $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^{m}$ si chiama **vettore dei termini noti**.

La matrice di tipo $(m, n+1)$: $(A|\mathbf{b})$ ottenuta accostando alle colonne della matrice A dei coefficienti il vettore (colonna) $\mathbf{b}$ dei termini noti si chiama **matrice completa del sistema**.

Esempio 13.1 Dato il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = -3 \end{array} \right. ,$$

la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

▶ Detto $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{n}$ il vettore colonna di tipo $(n,1)$ delle incognite il sistema $(*)$ si può trascrivere in forma matriciale

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Una sua soluzione è quindi un vettore colonna di tipo $(n,1)$ $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_j)_{j=1}^{n}$ di numeri reali che soddisfa la relazione matriciale $A\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

▶ Un sistema si dice **possibile** (o **risolubile**) se ammette almeno una soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **compatibili**.

▶ Un sistema si dice **impossibile** se non ammette alcuna soluzione. In tal caso le equazioni si dicono **incompatibili**.

NOTA Un sistema possibile può avere una sola soluzione (**sistema determinato**) oppure infinite soluzioni (**sistema indeterminato**), ma *mai* un numero finito ≥ 2 di soluzioni.

▶ Due sistemi si dicono **equivalenti** quando ammettono le stesse soluzioni.

▶ **Trasformazioni elementari**. Le seguenti trasformazioni, applicate ad un dato sistema, portano a un sistema equivalente:
I) scambiare due equazioni tra loro;
II) moltiplicare i due membri di un'equazione per lo stesso numero k ($\neq 0$);
III) sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per k.

Esempio 13.2 Il sistema dell'Esempio 13.1 è impossibile.
Infatti, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2, si ottiene il sistema, equivalente a quello iniziale,

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

ma la seconda equazione è impossibile.

Esempio 13.3 Dato il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
la matrice del sistema, il vettore dei termini noti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Il sistema ha una sola soluzione. Infatti, sottraendo alla terza equazione la seconda si ottiene il sistema, equivalente a quello dato:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il vettore $(x, y) = (1, 0)$. (Verificarlo.)

Esempio 13.4 Dati $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,
il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -3 \end{cases}.$$

Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per 3 si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ammette quindi le infinite soluzioni della forma $(t, 2t - 1)$, al variare del numero reale t.

Nel seguito presentiamo due metodi (equivalenti) per risolvere i sistemi lineari: il primo metodo è basato sull'applicazione del teorema di Cramer e del teorema di Rouché-Capelli, il secondo sull'uso del metodo di eliminazione di Gauss.

Soluzione dei sistemi lineari: primo metodo

I teoremi di Cramer e di Rouché-Capelli

Il Teorema di Cramer permette di stabilire quando un sistema di n equazioni in n incognite (lo stesso numero di equazioni ed incognite) ha una sola soluzione e fornisce un metodo per determinarla attraverso il calcolo del determinante di opportune matrici quadrate.

▶ Si consideri un sistema di n equazioni in n incognite, con $A = (a_{ij})_{i=1\dots n}^{j=1\dots n}$ matrice dei coefficienti (quadrata di ordine n) e vettore dei termini noti $\mathbf{b}$.
Per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$ si definiscono le matrici A_j quadrate di ordine n, ottenute sostituendo la j–esima colonna di A con la colonna dei termini noti.

Teorema 13.1 (di Cramer) *Il sistema di n equazioni in n incognite*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ha una sola soluzione $\iff \det A \neq 0$. *In tal caso, la soluzione è il vettore* $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_j)_{j=1}^{n}$ *con*

$$\widetilde{x}_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

Esempio 13.5 Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases},$$

la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det A = -10 \neq 0$, il Teorema di Cramer garantisce che il sistema ha una sola soluzione. Per determinarla costruiamo le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo $\det A_1 = -6$, $\det A_2 = -12$, $\det A_3 = -2$. Allora la soluzione (x, y, z) è data da:

$$\left(-\frac{1}{10}\det A_1, \quad -\frac{1}{10}\det A_2, \quad -\frac{1}{10}\det A_3, \right) = \left(\frac{3}{5}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{1}{5} \right).$$

Esempio 13.6 (Vedi anche 13.7 e 13.12)

Il sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 5z = -1 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$ non ha una soluzione unica.

Infatti, detta A la matrice dei coefficienti si ha: $\det A = 0$.

Quindi, in base al Teorema di Cramer, possiamo escludere che abbia una sola soluzione. Il sistema potrebbe essere impossibile oppure essere indeterminato, ossia ammettere infinite soluzioni.

Nell'esempio precedente non siamo stati in grado di stabilire il comportamento del sistema perchè il Teorema di Cramer ci permette soltanto di escludere che il sistema abbia una sola soluzione. Più in generale, il Teorema di Cramer non si applica a tutti i sistemi, ma soltanto a quelli in cui il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite.

Il teorema successivo (di Rouché-Capelli) risolve il problema della risolubililità del generico sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ attraverso il calcolo della caratteristica (o rango) di opportune matrici.

▶ Si consideri un sistema di m equazioni in n incognite, con $A = (a_{ij})_{i=1\dots m}^{j=1\dots n}$ matrice dei coefficienti (di tipo (m, n)) e vettore dei termini noti $\mathbf{b}$.

Teorema 13.2 (di Rouché–Capelli) *Il sistema di m equazioni in n incognite*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

è risolubile $\iff \operatorname{Car} A = \operatorname{Car}(A|\mathbf{b})$.

▶ Quando il sistema è risolubile (cioè $\operatorname{Car} A = \operatorname{Car}(A|\mathbf{b}) = k$), per sapere quante soluzioni ha dobbiamo confrontare il numero k con il numero n delle incognite:

- Se $n > k$ il sistema è *indeterminato* ossia ha infinite soluzioni che dipendono da $n - k$ variabili libere (si dice che il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni).
- Se $n = k$ il sistema è *determinato* ossia ha una sola soluzione.

▶ Inoltre, se il sistema è risolubile, detta k la caratteristica comune delle due matrici, per trovare le soluzioni si procede così:

1. si fissa una sottomatrice A' di A, quadrata di ordine k con $\det(A') \neq 0$ (se $\operatorname{Car} A = k$, esiste certamente un minore A' non nullo di ordine k);
2. si considera un nuovo sistema di k equazioni in k incognite ottenuto considerando solo le k (delle m) equazioni relative alle righe di A' e le k incognite (variabili effettive) relative alle colonne di A'. Le restanti $n - k$ incognite (variabili libere) sono trattate come parametri;
3. si risolve il sistema così ottenuto di k equazioni in k incognite (con determinante della matrice dei coefficienti non nullo) utilizzando, ad esempio, il Teorema di Cramer.

Esempio 13.7 (Vedi anche 13.12)

Riprendiamo in esame il sistema dell'Esempio 13.6. La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Si ha: $\operatorname{Car} A = 2$ (prendendo ad esempio le prime due righe e due colonne) e $\operatorname{Car}(A|\mathbf{b}) = 3$, (infatti il determinante della sottomatrice ottenuta prendendo le ultime tre colonne è diverso da zero). Applicando il Teorema di Rouché–Capelli possiamo quindi concludere che il sistema è impossibile.

Esempio 13.8 (Vedi anche 13.11)

Dato il sistema $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 3x+y=0 \\ -x+3y=2 \end{cases}$, risulta $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \\ -1 \quad 3 \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$.

Poichè Car A = Car $(A|\mathbf{b})=2$, il sistema è risolubile (è stata riquadrata una sottomatrice con determinante non nullo). Inoltre, poichè la caratteristica è uguale al numero delle incognite, il sistema è determinato ossia ha una sola soluzione.
Per trovarla si risolve il sistema formato dalle prime due equazioni e si trova la soluzione $\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Esempio 13.9 (Vedi anche 13.13)

Dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x+z=0 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$, risulta $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix}} & 1 \\ 1 \\ 6 \quad 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Poichè $\det A=0$ bisogna applicare il Teorema di Rouché–Capelli.
Si ha che Car A =Car $(A|\mathbf{b})=2$ e quindi il sistema è indeterminato ed ha ∞^1 soluzioni che dipendono da una variabile libera.
Per determinare le soluzioni, si considera il sistema delle prime due equazioni nelle prime due incognite (variabili effettive), considerando z come variabile libera:

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ -2x=-z \end{cases}$$

che ha soluzione $(\frac{1}{2}z, 1-\frac{3}{2}z)$. Quindi le soluzioni del sistema assegnato sono i vettori:

$$(\frac{1}{2}z,\ 1-\frac{3}{2}z,\ z) \qquad \text{al variare di } z\in\mathbb{R}.$$

Esempio 13.10 (Vedi anche 13.14)

Discutere la risolubità al variare del parametro reale k, e trovare le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ x-y-z=k \end{cases}.$$

Poichè $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}} \\ 1 \quad -1 \quad -1 \end{pmatrix}$ e $(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & k \end{array}\right)$,

si ha: Car $A=3$ mentre $\det(A|\mathbf{b})=11k+1$.

Quindi, se $k\neq-\frac{1}{11}$ il sistema è impossibile perchè $3=\text{Car } A\neq\text{Car } (A|\mathbf{b})=4$.

Se $k=-\frac{1}{11}$ allora Car A = Car $(A|\mathbf{b})=3$ e il sistema è determinato. Per trovare la soluzione si risolve il sistema delle prime tre equazioni e si trova $\left(\frac{2}{11},\ \frac{4}{11},-\frac{1}{11}\right)$.

Soluzione dei sistemi lineari: secondo metodo

Il metodo di eliminazione di Gauss

Questo metodo si basa sulle ripetute applicazioni delle trasformazioni che permettono di passare a sistemi equivalenti. Si opera in modo da ricondursi ad un sistema equivalente a quello dato, di cui però è immediato vedere la eventuale risolubilità e, in tal caso, procedere in modo standard per determinare le soluzioni. Questo sistema equivalente ha una matrice dei coefficienti che è della forma "a scalini".

▶ Metodo di eliminazione di Gauss
Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$ (in caso contrario scambiamo la 1^a equazione con un'altra in cui il coefficiente di x_1 sia $\neq 0$). Dividendo la prima equazione per a_{11}, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + .. + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sottraiamo poi dalla seconda equazione la prima moltiplicata per a_{21}, dalla terza la prima moltiplicata per a_{31} e così via. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + .. + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ 0 \quad a'_{22}x_2 + .. + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ 0 \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ 0 \quad a'_{m2}x_2 + \quad + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Tale sistema contiene un sottosistema di $m-1$ equazioni e $n-1$ incognite (basta escludere la prima equazione). Allora possiamo procedere in modo iterativo: ripetiamo quanto fatto precedentemente a questo sistema. Se $a'_{22} = 0$, scambiamo la 2^a equazione con un'altra in cui il coefficiente di x_2 sia $\neq 0$ (se c'è). (Se in tutte le equazioni il coefficiente di x_2 è nullo tranne che nella prima, vuol dire che x_2 non compare come variabile effettiva nel sottosistema ottenuto dopo il primo passo. Possiamo quindi "cambiare nome" alla variabile x_2 e spostarla in fondo). A questo punto possiamo dividere la seconda equazione per il coefficiente di x_2 e procedere come prima. In questo modo x_2 comparirà con coefficiente 1 nella 2^a equazione e 0 nelle successive.
Iterando alle equazioni successive otterremo un sistema in forma "a scalini":

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + .. + c_{1k}x_k + .. + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad\quad x_2 + \quad + c_{2k}x_k + .. + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad\quad\quad ... \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_k + .. + c_{kn}x_n = d_k \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad .... = d_{k+1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad ..... \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad .... = d_m \end{cases}$$

Si possono presentare i seguenti due casi:

a) Si ha un sistema "a scalini" del tipo:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + .. + c_{1k}x_k + .. + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \quad + c_{2k}x_k + .. + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad ... \\ \qquad\qquad x_k + .. + c_{kn}x_n = d_k \end{array}\right] \quad k \text{ equazioni} \\ \\ \left.\begin{array}{l} 0 = 0 \\ ..... \\ 0 = 0 \end{array}\right] \quad (m-k) \text{ equazioni} \end{array}\right.$$

(dove, se $m = k$, le ultime $m - k$ equazioni non compaiono).

In questo caso siamo nell'ambito dei sistemi risolubili, in cui abbiamo k equazioni effettive ed n incognite, con $k \leq n$. Si possono ricavare le incognite a cascata, partendo da x_k, fino ad x_1.

Se $k = n$, il sistema ha una sola soluzione.

Se $k < n$, le soluzioni saranno infinite ed espresse in funzione delle variabili $x_{k+1}, ..., x_n$, che sono quindi dette variabili libere.

b) Nel sistema "a scalini" c'è almeno una equazione nella quale si annulla il primo membro, ma il secondo è $\neq 0$. In questo caso il sistema è ovviamente impossibile.

► In conclusione, quando il sistema è risolubile, per sapere quante soluzioni ha, dobbiamo confrontare il numero k delle equazioni effettive con il numero n delle incognite:

- Se $k = n$ il sistema è *determinato* ossia ha una sola soluzione.
- Se $k < n$ il sistema è *indeterminato* ossia ha infinite soluzioni che dipendono da $n - k$ variabili libere (si dice che il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni).

► Per applicare questo metodo, conviene rileggere le trasformazioni elementari sulle equazioni come corrispondenti trasformazioni elementari sulle righe della matrice completa $(A|\mathbf{b})$, che richiamiamo:

Trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$

I) R_{ij} : scambio della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$;

II) $k \cdot R_i$: prodotto della riga $\mathbf{r_i}$ per il numero k $(\neq 0)$;

III) $R_i + kR_j$: somma della riga $\mathbf{r_i}$ con la riga $\mathbf{r_j}$ moltiplicata per k .

Esempio 13.11 Con trasformazioni elementari sulle equazioni del sistema si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 2 \\ 3x + y = 0 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \boxed{\tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ -x + 3y = 2 \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ -5y = -3 \\ 5y = 3 \end{array}\right. \boxed{-\tfrac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ 5y = 3 \end{array}\right. \boxed{R_3 - 5R_2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ 0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2\frac{3}{5} = 1 \\ y = \frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Sistema con 2 equazioni effettive e 2 incognite: quindi determinato, ossia con una sola soluzione.

Analogamente, con le stesse trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{2}R_1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{5}R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \boxed{R_3 - 5R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esempio 13.12 Dato il sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 5z = -1 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$, con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{7}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right) \boxed{R_3 - 5R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ y - z = -1 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$

Quindi il sistema è impossibile.

Esempio 13.13 Dato il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + z = 0 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$, con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 6R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{2}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \boxed{R_3 + 4R_2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{3}{2}z = 1 \end{cases}$$

Il sistema ha 2 equazioni effettive in 3 incognite: quindi il sistema è indeterminato ($\boxed{\infty^1 \text{ soluzioni}}$). Inoltre:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{3}{2}z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1 - \frac{3}{2}z) + z = 1 \\ y = 1 - \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = 1 - \frac{3}{2}z \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi: $(\frac{1}{2}z, 1 - \frac{3}{2}z, z)$.

Esempio 13.14 Discutere la risolubità al variare del parametro reale k, e trovare le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ x-y-z=k \end{cases}.$$

Con trasformazioni elementari sulle righe di $(A|\mathbf{b})$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & k \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_2+R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & k-1 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{3}R_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & k-1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} R_3+5R_2 \\ R_4+3R_2 \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \boxed{\tfrac{3}{11}R_3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \boxed{R_4-R_3} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & k+\frac{1}{11} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{11} \\ 0=k+\frac{1}{11} \end{cases}.$$

Quando $k+\frac{1}{11} \neq 0$ il sistema è impossibile.
Se invece $k=-\frac{1}{11}$, si tratta di un sistema di 3 equazioni effettive in 3 incognite, quindi determinato. Per calcolarne l'unica soluzione si risolve il sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{11} \end{cases},$$

e si trova la soluzione $\left(\frac{2}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{1}{11}\right)$.

Argomento 13 - Esercizi

ESERCIZIO 13.1) Discutere l'esistenza e il numero delle soluzioni dei seguenti sistemi e, quando è possibile, risolverli:

$$1)\begin{cases} 2x+5y=10 \\ x+2y=3 \\ 3x+4y=1 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-y+z+2t=3 \\ x+z-t=0 \\ 2x-y+t=1 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y=1 \\ y+z=0 \\ 2x-3y-z=1 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x+2y-z=0 \\ 3x-y+3z=-1 \end{cases} \qquad 5)\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ -x+y-3z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=1 \\ -x+7y=-5 \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+y+2z=5 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases} \qquad 8)\begin{cases} x-y+z+t+u=1 \\ x+2y-z+t+u=0 \end{cases} \qquad 9)\begin{cases} 4x+y+z=1 \\ 2x+2y+6z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

$$10)\begin{cases} x-y-2z=0 \\ x+2y-3z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad 11)\begin{cases} x+y-2z+3t=1 \\ -x+y+5z+t=2 \\ 3x-y-12z+t=0 \end{cases} \qquad 12)\begin{cases} 2x+6y+3z+t=1 \\ x+4y+z+2t=1 \\ x+2y+2z-t=0 \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.2) Il sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

A) è impossibile; **B)** ha una soluzione; **C)** ha infinite soluzioni; **D)** ha 2 soluzioni.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.3) Il sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ -x+5y+2z=0 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$

A) è impossibile; **B)** ha una soluzione; **C)** ha infinite soluzioni; **D)** ha 3 soluzioni.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.4) Dati $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, risolvere il sistema $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 13.5) Dati

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

discutere e, se possibile, risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.6) Dati

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

discutere e, se possibile, risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.7) Dati

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) calcolare $\mathbf{b} = C\mathbf{d}$;
ii) discutere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e, se risolubile, risolverlo.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.8) Dati

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

discutere e, se possibile, risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.9) Date le matrici B e C e il vettore $\mathbf{b}$:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

calcolare $A = BC$ e dire se è risolubile il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.10) Date le matrici B e C ede il vettore $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calcolare $A = BC$ e dire se è risolubile il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.11) Dei seguenti sistemi lineari dipendenti dal parametro k, discutere la risolubilità e il numero delle possibili soluzioni e, quando possibile, trovarle:

$$1) \begin{cases} kx - 2y = 1 \\ 2x - ky = 1 + k \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ kx + y = 0 \\ 2x + y = k \end{cases} \quad 3) \begin{cases} kx + z = 0 \\ x + 2y + kz = 1 + k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + (2-k)z = 0 \\ -k^2x + z = 0 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ -kx + ky = 0 \\ kx + kz = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ -x + y + 2z = k \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y = 1 - k \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x + kz = k \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 4x + 2ky - z = 1 \\ kx + (1-k)y + z = 2 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} (k+1)x + ky = 1 \\ -kx + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad 11) \begin{cases} (k+2)x + 2ky - z = 1 \\ x - 2y + kz = -k \\ y + z = k \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.12) Siano $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, allora il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

A) è impossibile per $k = -2$;	**B)** ha infinite soluzioni per $k = 2$;
C) ha una sola soluzione per $k \neq \pm 2$;	**D)** ha una soluzione per ogni k.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.13) Il sistema $\begin{cases} kx + 2y = 3 - k \\ -5x + (k-7)y = 2 \end{cases}$ è risolubile se e solo se

A) $k \neq 2, 5$; **B)** $k \neq 2$; **C)** $k = 5$; **D)** $k = 2$ e $k = 5$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.14) Il sistema $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ x - y + kz = 1 \\ kx + ky = 0 \end{cases}$ è impossibile se

A) $k = -2, 0, 1$; **B)** $k = -2, 0$; **C)** $k = 0, 1$; **D)** $k = -2, 1$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.15) Il sistema $\begin{cases} x + 2y + kz = k \\ ky + z = -k \\ -x - y = 0 \end{cases}$ ha infinite soluzioni se

A) $k = \pm 1$; **B)** per ogni valore di k; **C)** $k = 1$; **D)** $k = -1$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 13.16) Determinare per quali valori del parametro reale k la soluzione del seguente sistema ha almeno una componente nulla.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 13y + z = 1 - k \\ x + 2y + z = k \end{cases}$$

Argomento *Soluzione*

Argomento 13

Soluzioni Esercizi

Suggerimento Ex. 13.4

Non è necessario calcolare la matrice A^{-1}. Moltiplicando a sinistra per A entrambri i membri dell'uguaglianza $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si ricava...

Sol. Ex. 13.1

1) 1 soluzione : $(-5, 4)$

2) ∞^1 soluzioni : $(t-1, 3t-3, 1, t)$

3) 1 soluzione : $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4) 1 soluzione : $(-11, 13, 15)$

5) 1 soluzione : $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)$

6) 1 soluzione : $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

7) ∞^1 soluzioni : $(2-z, z-1, z)$

8) ∞^3 soluzioni : $\left(-u - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} - t, \frac{2}{3}z - t, z, t, u\right)$

9) 1 soluzione : $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

10) 1 soluzione : $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

11) impossibile

12) ∞^2 soluzioni : $\left(-1 - 3z + 4t,\ \frac{1}{2}(1 + z - 3t),\ z,\ t\right)$

Sol. Ex. 13.2 **C)**

Sol. Ex. 13.3 **A)**

Sol. Ex. 13.4

1 soluzione: $(-8, 1)$

Sol. Ex. 13.5

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ∞^1 soluzioni $(2 - 3z, 1 - z, z, 1)$

Sol. Ex. 13.6

∞^1 soluzioni $(8t - 1, 3t - 1, 1 - 2t, t)$

Sol. Ex. 13.7

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; ∞^1 soluzioni $(-t - 2, -t - 2, 1, t)$

Sol. Ex. 13.8

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; ∞^2 soluzioni $(2t+u-1, 2u+1, 1-t-u, t, u)$

Sol. Ex. 13.9

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; sistema impossibile.

Sol. Ex. 13.10

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, sistema impossibile.

Sol. Ex. 13.11

1) $k \neq \pm 2 \Rightarrow$ 1 sol: $\left(\dfrac{1}{2-k}, \dfrac{k-1}{2-k}\right)$
$k = 2 \Rightarrow$ impossibile
$k = -2 \Rightarrow \infty^1$ sol: $\left(-\dfrac{1+2t}{2}, t\right)$

2) $k \neq -3, 1 \Rightarrow$ impossibile
$k = -3 \Rightarrow$ 1 sol: $\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$
$k = 1 \Rightarrow$ 1 sol: $(1, -1)$

3) $k \neq \pm, 1 \Rightarrow$ 1 sol: $\left(-\dfrac{1}{1+k}, 1, \dfrac{k}{1+k}\right)$
$k = -1 \Rightarrow$ impossibile
$k = 1 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(-z, 1, z)$

4) $k \neq 0, 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$ 1 sol: $(0, 0, 0)$
$k = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \infty^1$ sol: $\left((3-2\sqrt{2})z,\ 2(\sqrt{2}-2)z,\ z\right)$
$k = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \infty^1$ sol: $\left((3+2\sqrt{2})z,\ -2(\sqrt{2}+2)z,\ z\right)$
$k = 0 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(-y,\ y,\ 0)$

5) $k \neq 0 \Rightarrow$ 1 sol: $(0,0,0)$
$k = 0 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(2z,\ 2z,\ z)$

6) $k \neq 0 \Rightarrow$ impossibile
$k = 0 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(z+1,\ 1-z,\ z)$

7) $k \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$ impossibile
$k = \frac{1}{3} \Rightarrow \infty^1$ sol: $\left(z - \frac{1}{3},\ -z + \frac{2}{3},\ z\right)$

8) $k = -\frac{4}{7} \Rightarrow$ impossibile
$k \neq -\frac{4}{7} \Rightarrow 1$ sol: $\left(\frac{5k}{4+7k},\ \frac{4k-2}{4+7k},\ \frac{-6+7k}{4+7k}\right)$

9) $k \neq -4 \Rightarrow \infty^1$ sol : $\left(\frac{3-y(k+1)}{k+4},\ y,\ \frac{8-k+2y(k^2+k-2)}{k+4}\right)$
$k = -4 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(x,\ -1,\ 7+4x)$

10) $k \neq \pm 1 \Rightarrow$ 1 sol: $\left(\frac{1}{k+1}, 0, \frac{2k+1}{k+1}\right)$
$k = 1 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(x,\ 1-2x,\ 1+x)$
$k = -1 \Rightarrow$ impossibile

11) $k \neq -1, -5 \Rightarrow$ 1 sol: $\left(\frac{2(1-k^2)}{k+5},\ \frac{(k+1)^2}{k+5},\ \frac{3k-1}{k+5}\right)$
$k = -1 \Rightarrow \infty^1$ sol: $(-z-1,\ -z-1,\ z)$
$k = -5 \Rightarrow$ impossibile

Sol. Ex. 13.12 C)

Sol. Ex. 13.13 B)

Sol. Ex. 13.14 D)

Sol. Ex. 13.15 D)

Sol. Ex. 13.16 $k = \frac{1}{2}$ oppure $k = \frac{10}{19}$.

Argomento 14
Numeri Complessi

È ben noto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (che include tutti gli altri insiemi numerici finora incontrati in questo corso) non è sufficientemente "ampio" da permettere la risoluzione di equazioni, anche semplici, a coefficienti reali, come ad esempio $x^2 + 1 = 0$. Per risolvere questo problema costruiamo l'insieme dei numeri complessi.

Numeri complessi. Loro rappresentazione geometrica.

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione in un certo insieme numerico solo se esso contiene un numero il cui quadrato vale -1. Chiamiamo questo "numero" **unità immaginaria** e lo denotiamo con i. Per definizione si ha quindi

$$i^2 = -1.$$

A partire dall'unità immaginaria si costruiscono i numeri complessi nel modo seguente.

Definizione 14.1 Si dice **numero complesso** ogni scrittura della forma $a + ib$, con a, b numeri reali e i unità immaginaria. L'insieme dei numeri complessi si denota con $\mathbb{C}$ e si ha:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \quad \text{tali che} \quad a, b \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ i^2 = -1 \right\}.$$

Di solito, i numeri complessi si indicano con le ultime lettere dell'alfabeto: z, w, ...
Dato il numero complesso $z = a + ib$, i numeri reali a e b si dicono rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si scrive: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Esempi 14.2
- $z = 1 - 2i$ è un numero complesso con parte reale 1 e parte immaginaria -2.
- $z = -\sqrt{2} + 0i = -\sqrt{2}$ è un numero complesso con parte reale $-\sqrt{2}$ e parte immaginaria 0.
- $z = 0 + 4i = 4i$ è un numero complesso con parte reale 0 e parte immaginaria 4.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ si dicono **uguali** se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si definiscono inoltre le seguenti operazioni**:**

▶ **Somma di due numeri complessi** $z = a + ib$ **e** $w = c + id$ è il numero complesso

$$z + w = (a + c) + i\,(b + d)\,;$$

▶ **Prodotto di due numeri complessi** $z = a + ib$ **e** $w = c + id$ è il numero complesso

$$z \cdot w = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\,.$$

Esempio 14.3 Dati $z = 2 + i$ e $w = -1 + 3i$, calcoliamo $z + w$ e $z \cdot w$.

- $(2 + i) + (-1 + 3i) = 1 + 4i$
- $(2 + i) \cdot (-1 + 3i) = -2 + 3i^2 - i + 6i = -2 - 3 + 5i = -5 + 5i$

Osserviamo che le due operazioni si eseguono usando le ordinarie regole del calcolo letterale e ricordando che $i^2 = -1$.

Per la somma e il prodotto appena definiti valgono le usuali proprietà delle operazioni (commutativa, associativa, distributiva). Inoltre:

- il numero complesso $0 = 0 + i0$ è tale che $z + 0 = z$ per ogni z;
- il numero complesso $1 = 1 + i0$ è tale che $z \cdot 1 = z$ per ogni z;
- il numero complesso $-z = -a - ib$ è l'**opposto** di $z = a + ib$;
- se $z \neq 0$, il numero complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}$$

è il **reciproco** di $z = a + ib$. (Ovviamente si ha $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$ per ogni $z \neq 0$.)

Esempio 14.4 Dati $z = 2 + i$ e $w = 1 + 3i$, calcoliamo: $-w$; $\dfrac{1}{w}$; $\dfrac{z}{w}$.

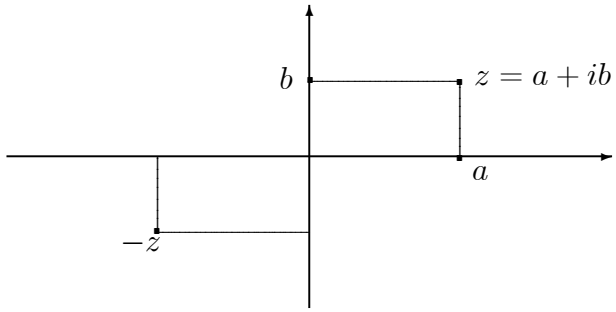
- $-w = -1 - 3i$
- $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$;
- $\dfrac{z}{w} = (2 + i)\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

È noto che numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.
Analogamente, associando al numero della forma $z = a + ib$ il punto di coordinate (a, b), si realizza una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (detto in questo contesto **piano di Argand–Gauss**).
In tale corrispondenza: $a = \mathrm{Re}(z)$ è l'ascissa di (a, b) e $b = \mathrm{Im}(z)$ è l'ordinata di (a, b).

I numeri della forma $a + 0i$, (che sono di fatto numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che verrà perciò detto **asse reale,** evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri della forma $0 + ib = ib$, (detti **immaginari puri**) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate che verrà perciò detto **asse immaginario.**

L'opposto di z, ossia il numero $-z = -a - ib$ corrisponde al punto $(-a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'origine.



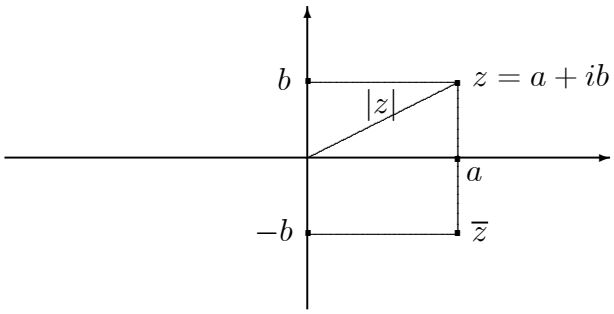
Definizione 14.5 Dato il numero $z = a + ib$ si chiama
▶ **Coniugato** di z il numero complesso

$$\overline{z} = a - ib.$$

Esso corrisponde al punto $(a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'asse reale.
▶ **Modulo** di z il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine ed è quindi un numero reale maggiore o uguale a zero.



Osserviamo che [1]

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

e inoltre

$$z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z); \qquad z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

Esempio 14.6 Dati $z = 2 - i$ e $w = 2 + 3i$, calcoliamo $\dfrac{\overline{z}}{w}$. Si ha:

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{2 + i}{2 + 3i} = \frac{(2 + i)\,(2 - 3i)}{(2 + 3i)\,(2 - 3i)} = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

È facile vedere che la somma di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$, cioè il numero $(a + c) + i(b + d)$ corrisponde al punto che si ottiene con la "regola del parallelogramma" dai punti di coordinate (a, b) e (c, d).

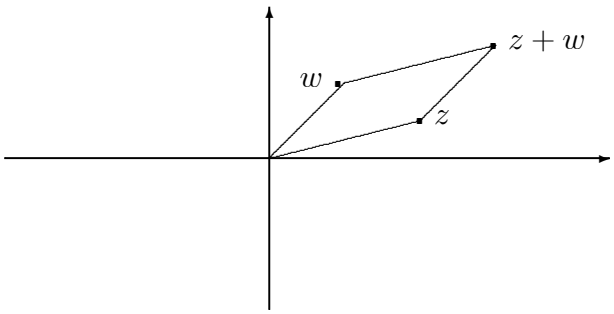
---

[1] La relazione che esprime il reciproco di un numero complesso non nullo si può anche esprimere mediante la formula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Inoltre, per calcolare il rapporto di due numeri complessi può essere utile tenere presente che

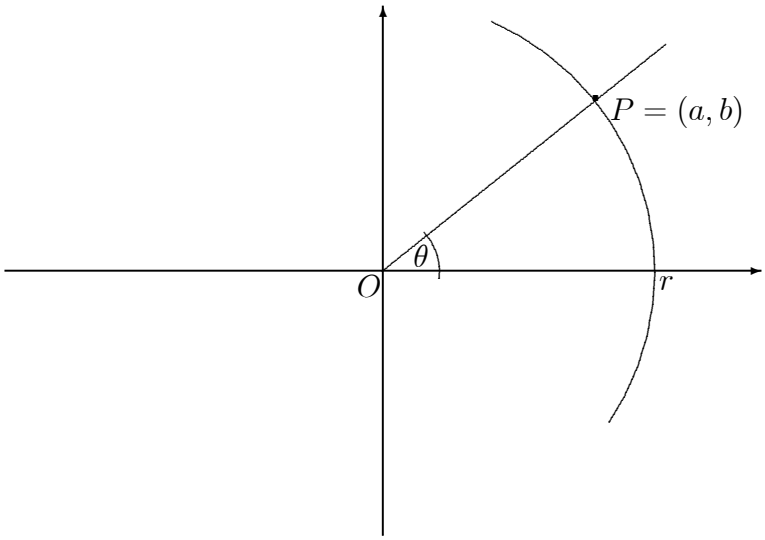
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}.$$



Non è altrettanto facile dare l'interpretazione geometrica del prodotto. Anche a questo scopo può essere utile introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Osserviamo che ogni punto $P = (a, b)$, diverso dall'origine, nel piano di Argand–Gauss può essere individuato anche assegnando la sua distanza r dall'origine O e l'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP.



Per definizione di coseno e seno (vedi MiniMat Lezione7) si ha:

$$a = r\cos\theta; \qquad b = r\sin\theta. \tag{1}$$

Si ottiene quindi: $z = a + ib = (r\cos\theta) + i\,(r\sin\theta)$.

Definizione 14.7

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

si chiama **forma trigonometrica** del numero complesso $z = a + ib$.
Per distinguere le due rappresentazioni, la scrittura $a + ib$ si chiama **forma algebrica** del numero complesso z.

Osserviamo che il numero reale positivo r è il **modulo** di z.

Inoltre, poiché le funzioni sin e cos sono periodiche di periodo 2π, nelle formule (1) nulla cambia se a θ si sostituisce $\theta + 2k\pi$: uno qualunque di questi numeri si dice **argomento** di z. Quindi l'argomento è definito a meno di multipli interi di 2π [2].
Assegnare un numero complesso in forma trigonometrica significa evidenziarne il modulo e un argomento.
Dunque, *due numeri complessi* (espressi *in forma trigonometrica*) *sono uguali* se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali, a meno di un multiplo intero qualsiasi di 2π.
Notiamo che *numeri complessi con ugual modulo* stanno sulla stessa circonferenza con centro nell'origine O del piano di Argand-Gauss, mentre *numeri complessi con argomento uguale* (a meno di multipli interi di 2π) stanno sulla stessa semiretta avente origine in O.

Dato un numero complesso in forma trigonometrica (ossia noti r e θ), la sua forma algebrica si ricava mediante le formule (1); viceversa dato un numero complesso in forma algebrica si ricavano r e θ osservando che:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Per convenzione, al numero complesso zero si attribuisce modulo zero e argomento qualsiasi.

Esempio 14.8 Determiniamo il modulo ed un argomento dei seguenti numeri complessi: -2; $5i$; $1 + i$; $-\sqrt{3} + i$.

- -2 è un numero reale negativo e quindi ha argomento π; inoltre il suo modulo è 2.
- $5i$ è un numero immaginario puro (sul semiasse positivo) e quindi ha argomento $\dfrac{\pi}{2}$; inoltre il suo modulo è 5.
- $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; inoltre $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi un argomento di $1 + i$ è $\dfrac{\pi}{4}$.
- $\left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3 + 1} = 2$; inoltre $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$: quindi un argomento di $-\sqrt{3}+i$ è $\dfrac{5\pi}{6}$.

La forma trigonometrica permette di calcolare più agevolmente il prodotto di numeri complessi e di capire il significato geometrico del prodotto.
Dati $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ si ha

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)]$$

e quindi

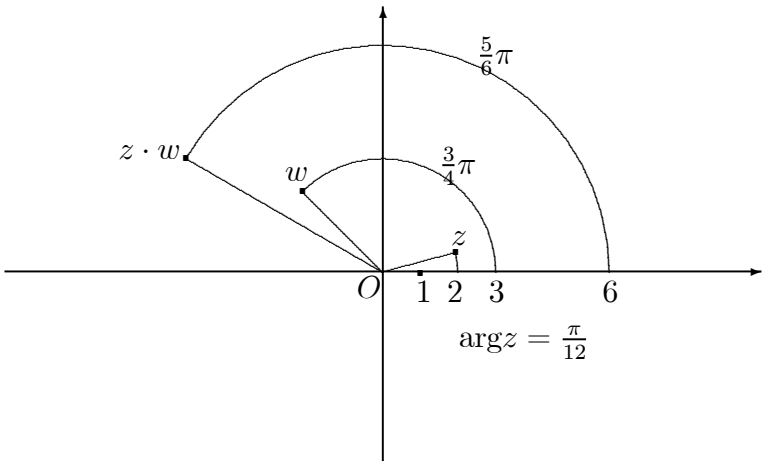
$$\boxed{z \cdot w = r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)]}$$

Il risultato mostra che il modulo del prodotto è dato dal prodotto dei moduli: $r\rho$, e un argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $(\theta + \varphi)$.

Esempio 14.9 Il prodotto di $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$ e $w = 3\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$ vale

$$z \cdot w = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4}\right)\right] = 6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -3\sqrt{3} + 3i.$$

[2] Tra questi, si usa indicare l'argomento appartenente all'intervallo $(-\pi, \pi]$ con il nome di argomento principale.



Osservazione 14.10 Per comprendere il significato geometrico del prodotto cominciamo da due semplici esempi.
• Il prodotto di z con un numero w di modulo uno ha lo stesso modulo di z. Quindi *la moltiplicazione per* un numero w *di modulo uno equivale ad una rotazione di angolo pari all'argomento di* w. Ad esempio, il numero iz è il ruotato (in senso antiorario) di z di $\pi/2$.
• Il prodotto di z con un numero w reale positivo (e quindi di argomento zero) ha lo stesso argomento di z. Quindi *la moltiplicazione per* un numero w *di argomento zero equivale ad una omotetia* (dilatazione o contrazione) *con fattore uguale a* w. Ad esempio il numero $3z$ si trova sulla stessa semiretta uscente dall'origine di z ad una distanza dall'origine pari a 3 volte quella di z.
• In generale, moltiplicare il numero z per il numero w equivale a ruotare z di un angolo pari all'argomento di w e contemporaneamente dilatare o contrarre z di un fattore uguale al modulo di w. Quindi la moltiplicazione equivale ad una roto–omotetia.

Con ragionamenti analoghi si dimostra che il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli, e come argomento la differenza degli argomenti. Ossia se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, allora si ha

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\left[\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)\right].$$

Potenze e radici $n-$esime di un numero complesso.

Applicando ripetutamente la regola del prodotto si ottiene la:

Regola di De Moivre La potenza $n-$esima del numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ha modulo uguale alla potenza $n-$esima del modulo di z e argomento pari all'argomento di z moltiplicato per n. Dunque

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Esempio 14.11 Calcoliamo in forma algebrica $(-1+i)^{13}$.
Poiché $-1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ si ha: $(-1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left[\cos\left(\frac{39\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right)\right]$.
Tenendo conto che $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$, possiamo scrivere

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = 64 - 64i.$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di affrontare il problema di trovare le radici $n-$esime di un numero complesso z cioè di trovare eventuali numeri w tali che $w^n = z$.

Teorema 14.12 (Radici $n-$esime di un numero complesso) Ogni numero complesso non nullo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ha esattamente n radici $n-$esime complesse: $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. Se $w_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ si ha

$$\boxed{\begin{array}{ll} \rho_k = \sqrt[n]{r} & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} & k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}}$$

Dunque nel piano di Argand-Gauss le radici $n-$esime di un numero complesso z si trovano ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata nell'origine e di raggio uguale alla radice $n-$esima (aritmetica) del modulo di z.

Dimostrazione. Se $w = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ è una radice $n-$esima di z deve essere:

$$\rho^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

In questa equazione r e φ sono noti, mentre ρ e θ sono le incognite. Per risolvere l'equazione applichiamo il seguente principio: due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali a meno di un multiplo intero qualsiasi k di 2π. Dunque:

$$\rho^n = r \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \sqrt[n]{r} \qquad \text{(radice aritmetica di un numero reale positivo!)}$$

e

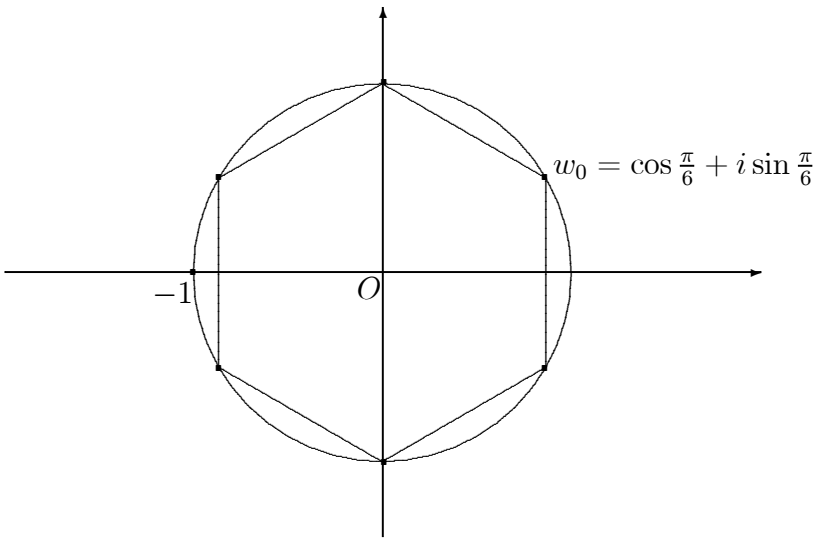
$$n\theta = \varphi + 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \tfrac{\varphi}{n} + k\tfrac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

È quindi univocamente determinato il modulo ρ, mentre l'argomento può avere diversi valori (che danno luogo a diverse radici) che si ottengono come segue. Un primo valore è dato da $\frac{\varphi}{n}$. Gli altri valori si ottengono aggiungendo ad esso multipli successivi di $\frac{2\pi}{n}$. È chiaro che dopo n passi si ottiene $\frac{\varphi}{n} + 2\pi$ e quindi si torna alla prima radice.

Esempio 14.13 Calcoliamo le radici seste di -1. Tale numero ha argomento π e modulo ovviamente uguale a 1:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1(-1 + i0).$$

Le radici seste hanno tutte modulo uguale a 1 perché la radice sesta aritmetica di 1 è 1. L'argomento della prima radice è $\dfrac{\pi}{6}$; gli argomenti delle successive radici si otterranno aggiungendo via via $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ all'argomento della prima.



Quindi si ha:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\
w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
w_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
w_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \\
w_5 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

Osserviamo che nessuna delle sei radici sta sull'asse reale, come c'era da aspettarsi dal momento che sono le radici di indice pari (6) di un numero negativo (-1). Notiamo inoltre che, avendo già rappresentato le sei radici nel piano di Argand-Gauss, dopo aver trovato la prima radice si sarebbe potuta trovare la forma algebrica delle altre con semplici considerazioni geometriche.

Esempio 14.14 È facile convincersi che le radici seste (complesse) di 1 si trovano nei vertici di un esagono regolare ottenuto ruotando il precedente di $-\dfrac{\pi}{6}$ in modo che la prima radice w_0 si trovi sull'asse reale nel punto 1 (e la quarta nel punto -1).

Abbiamo appena risolto le equazioni $w^6 \pm 1 = 0$, trovando in entrambi i casi sei soluzioni. Questo è un caso particolare dell'equazione $w^n - z = 0$ che, se $z \neq 0$, ha esattamente n soluzioni distinte nel campo complesso. Più in generale vale il

Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio (a coefficienti complessi) di grado n ha nel campo complesso, esattamente n radici (pur di contarle con la loro molteplicità).

Da questo teorema si deduce che:

• Ogni polinomio *a coefficienti complessi* di grado n si può scrivere come prodotto di n polinomi *a coefficienti complessi* di primo grado.

• Ogni polinomio *a coefficienti reali di grado dispari* ha almeno una radice *reale*.

• Le eventuali radici complesse di un polinomio *a coefficienti reali* sono a due a due complesse coniugate e quindi un polinomio *a coefficienti reali* si può scrivere come prodotto di un opportuno numero di polinomi *a coefficienti reali* di grado non superiore a 2.

In generale non è però facile trovare le n radici complesse di un polinomio di grado n. Si troveranno alcuni semplici esempi negli esercizi 14.10 e 14.11.

Nota Anche i numeri complessi hanno un "lato oscuro": non è possibile definire in $\mathbb{C}$ un ordinamento che sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto, cioè non è possibile suddividere i numeri complessi non nulli in positivi e negativi in modo tale che il prodotto di due positivi comunque scelti sia positivo, come succede invece nei numeri reali.

Argomento 14 - Esercizi

ESERCIZIO 14.1 Trovare parte reale, parte immaginaria, coniugato e modulo dei seguenti numeri complessi

a) $z = 2 - \sqrt{2}i$ **b)** $z = -\sqrt{7}i$ **c)** $z = -10 + 10\sqrt{3}i$ **d)** $z = 10 - 10\sqrt{3}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.2 Dati i numeri $z = -2-3i$ e $w = -3+4i$, calcolare $z-w$, zw, $\frac{1}{w}$, $\frac{z}{w}$ esprimendo il risultato in forma algebrica.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.3 Scrivere in forma algebrica:

a) $z = \dfrac{(2+i)(1-i)}{3-2i}$ **b)** $z = \dfrac{1}{i(3+2i)^2}$ **c)** $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.4 Trovare il modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi:

a) $z = 1 - i$ **b)** $z = 11i$ **c)** $z = -\dfrac{\pi}{4}$

d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ **e)** $z = -4i$ **f)** $z = \dfrac{1}{2}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.5 Dati i numeri $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $w = \sqrt{3} + i$, calcolare z^{20} e w^{13}.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.6 Trovare modulo ed un argomento delle radici n-esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

a) $z = -8$ ove $n = 3$ **b)** $z = 27i$ ove $n = 3$

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ove $n = 2$ **d)** $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ove $n = 4$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.6 bis Trovare modulo ed un argomento delle radici n-esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

a) $z = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ ove $n = 3$ **b)** $z = 64i$ ove $n = 6$

c) $z = -64i$ ove $n = 6$ **d)** $z = -16$ ove $n = 8$

e) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ove $n = 4$ **f)** $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ove $n = 3$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.7 Sia $z_0 = 1 + 2i$ una radice quarta di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici quarte di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.8 Sia $z_0 = 4 - 3i$ una radice ottava di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici ottave di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.9 Sia $z_0 = -3 + 2i$ una radice terza di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici terze di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.10 Si rappresentino le radici del polinomio a coefficienti reali $P(x) = (x+2)^4 + 1$ nel piano di Argand-Gauss. Si dia poi una scomposizione di $P(x)$ come prodotto di polinomi a coefficienti complessi di primo grado e una come prodotto di polinomi reali di secondo grado.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.11 Determinare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

a) $z^2 + 2z + 3 = 0$ **b)** $z^2 + 2iz - 3 = 0$

c) $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$ **d)** $z^6 + 2z^3 - 1 = 0$

e) $2|z|^2 = z^3$ **f)** $z^2 + \overline{z} = 0$

g) $(\overline{z})^4 = |z|$ **h)** $iz^3 = \overline{z}$

i) $i\,\mathrm{Re}(z) + z^2 = |z|^2 + 1$ **j)** $z + 3i + (\mathrm{Re}(z))(i + (\mathrm{Im}(z))^2) = 0$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.12 Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi e descriverli a parole:

a) $A = \{z : \quad 0 \le \mathrm{Re}(z) < 2\pi\}$ **b)** $B = \{z : \quad 0 \le \mathrm{Re}(iz) < 2\pi\}$

c) $C = \{z : \quad \mathrm{Re}(z^2) = 2\}$ **d)** $D = \{z : \quad \mathrm{Im}(z^2) = 2\}$

e) $E = \{z : \quad |z^3| < 2\}$ **f)** $F = \{z : \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 2\}$

g) $G = \{z : \quad \left|\frac{1}{z}\right| \ge 2\}$ **h)** $H = \{z : \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 2\}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.13 Individuare sul piano complesso il luogo dei punti z tali che sia reale il numero:

$$\frac{z+1-i}{z+1}$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.14 Si rappresenti sul piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z per i quali risulti

$$|z+1| \le \frac{5}{2} < |z-2i|.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.15 Si rappresentino sul piano di Argand-Gauss gli insiemi dei numeri complessi z per i quali risulti

a) $|z+1| \le |z-2i| < \frac{5}{2}$ **b)** $|z-2| \le |z+i| < \frac{5}{4}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.16 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z. Disegnare sul piano complesso i seguenti insiemi:

a) $A = \left\{z : \quad 1 < |z| < 2; \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $B = \{iz : \quad z \in A\}$

c) $C = \left\{z : \quad |z-1| < \left|\frac{z}{2}\right|; \quad 3\arg(z) > \frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z})\right\}$

Argomento *Soluzione*

Qualche esercizio teorico

ESERCIZIO 14.17 Si mostri che w è una radice n-esima del numero complesso z se e solo se $\overline{w}$ è una radice n-esima di $\overline{z}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.18 Denotati con α e β due numeri complessi, che cosa rappresenta l'uguaglianza $|z-\alpha| = |z-\beta|$ nel piano di Argand-Gauss?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.19 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z. Si dica, motivando, se almeno una delle seguenti relazioni è verificata da ogni numero complesso non nullo z:

$$\arg(z\,\overline{z}) = \arg(z)\cdot\arg(z^{-1}),$$
$$\arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z) + \arg(z^{-1}) \mod 2\pi,$$
$$\arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z)\cdot\arg(z^{-1}) \mod 2\pi.$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.20 Senza operare conti, si dica quali delle seguenti disuguaglianze sono risolubili, quali impossibili, quali prive di significato:

$$z+\overline{z}+|z|^2 \le 0, \qquad z-\overline{z}+|z|^2 \ge 0, \qquad |2z| < |z-\overline{z}|$$

Argomento *Soluzione*

Argomento 14

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 14.10 Porre $x + 2 = z$.

ESERCIZIO 14.11 Le equazioni di secondo grado in z si risolvono sostanzialmente come si suole fare nel campo reale, senza restrizioni sul discriminante; quelle di grado superiore o che coinvolgono moduli e coniugati si risolvono passando (dopo opportune considerazioni) alla forma trigonometrica; quelle che coinvolgono anche parte reale ed immaginaria si risolvono ponendo $z = x+iy$ e risolvendo il sistema delle due equazioni (in x e y) relative a parte reale ed immaginaria.

ESERCIZIO 14.12 Porre $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 14.19 Osservare che $\arg(z^{-1}) = \arg(\overline{z})$.

SOLUZIONI

Sol. Ex. 14.1

z	$\sqrt{2} - 2i$	$-\sqrt{7}i$	$-10 + 10\sqrt{3}i$	$10 - 10\sqrt{3}$
$\mathrm{Re}\, z$	$\sqrt{2}$	0	-10	$10 - 10\sqrt{3}$
$\mathrm{Im} z$	-2	$-\sqrt{7}$	$10\sqrt{3}$	0
$\overline{z}$	$\sqrt{2} + 2i$	$\sqrt{7}i$	$-10 - 10\sqrt{3}i$	$10 - 10\sqrt{3}$
$\lvert z\rvert$	$\sqrt{2+4} = \sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	20	$-10 + 10\sqrt{3}$

Sol. Ex. 14.2

$$z - w = 1 - 7i \; ; \qquad zw = 18 + i \; ; \qquad \frac{1}{w} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \; ; \qquad \frac{z}{w} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$$

Sol. Ex. 14.3

a) $z = \dfrac{(2+i)(1-i)}{3-2i} = \dfrac{(3-i)\,(3+2i)}{(3-2i)\,(3+2i)} = \dfrac{11}{13} + \dfrac{3}{13}i$

b) $z = \dfrac{1}{i(3+2i)^2} = \dfrac{-i\,(5-12i)}{(5+12i)\,(5-12i)} = -\dfrac{12}{169} - \dfrac{5}{169}i$

c) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} = \dfrac{i^3\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} = -i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)^2 = -2\sqrt{6}+i$

Sol. Ex. 14.4

Denotando con θ l'argomento prescelto per rappresentare il numero complesso, si ha

a) $|1-i| = \sqrt{2}, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}$ **b)** $|11i| = 11, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ **c)** $\left|-\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\pi}{4}, \quad \theta = \pi$

d) $\left|-2+2\sqrt{3}i\right| = 4, \quad \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **e)** $|-4i| = 4, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{2}$ **f)** $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}, \quad \theta = 0$

Sol. Ex. 14.5

Poiché $\left|-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right| = 2$ e l'argomento principale di $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ è $\dfrac{3\pi}{4}$, il numero z si rappresenta in forma trigonometrica come $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$: quindi

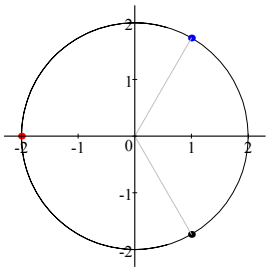
$$z^{20} = 2^{20}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right)\right] = -2^{20}.$$

Poiché $\left|\sqrt{3}+i\right| = 2$ e l'argomento principale di $\sqrt{3}+i$ è $\dfrac{\pi}{6}$, il numero z si rappresenta in forma trigonometrica come $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$: quindi

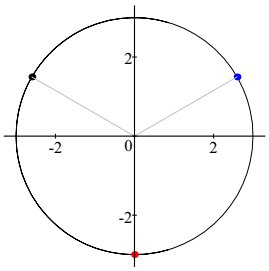
$$z^{13} = 2^{13}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 13\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 13\right)\right] = 2^{13}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i.$$

Sol. Ex. 14.6

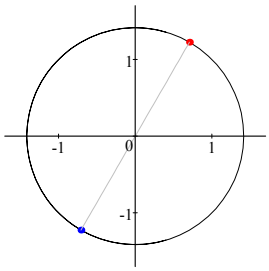
a) $z = -8$ ha modulo 8 e argomento principale $\theta = \pi$. Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{8} = 2$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$ e in particolare: $w_0 = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \sqrt{3}i$ e $w_1 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$.
La forma algebrica della restante radice si ricava osservando che w_{-1} è simmetrica di w_1 rispetto all'asse reale: $w_{-1} = \overline{w_1} = 1 - \sqrt{3}i$.



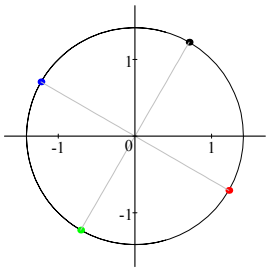
esercizio (a)



esercizio (b)



esercizio (c)



esercizio (d)

b) $z = 27i$ ha modulo 27 e argomento principale $\theta = \pi/2$. Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{27} = 3$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Per trovare facilmente la loro forma algebrica, osservare che

$$w_{-1} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = -3i, \quad w_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

e la restante radice è simmetrica di questa rispetto all'asse immaginario: $w_1 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento principale $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Quindi le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ con $k = -1, 0$.

Dunque in forma trigonometrica le radici, che sono una l'opposta dell'altra, si esprimono come: $w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)\right]$.

La loro forma algebrica è: $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $w_{-1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

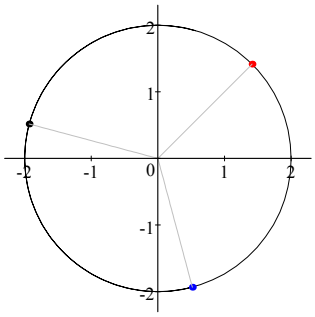
d) $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ha modulo 4 e argomento principale $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$. Quindi le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ con $k = -1, 0, 1, 2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

La loro forma algebrica si ricava osservando che

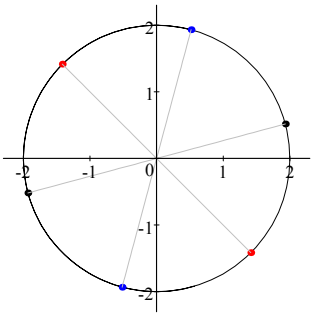
- per ognuno dei $k > 0$ si ha $w_k = -w_{k-2}$
- per $k = 0$, $\theta_0 = -\dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\theta_0\right) + i\sin\left(\theta_0\right)\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -w_2$
- per $k = 1$, $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} + \theta_0 \Longrightarrow w_1 = \sqrt{2}\left(-\sin\left(\theta_0\right) + i\cos\left(\theta_0\right)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2} = -w_{-1}$

Sol. Ex. 14.6 bis

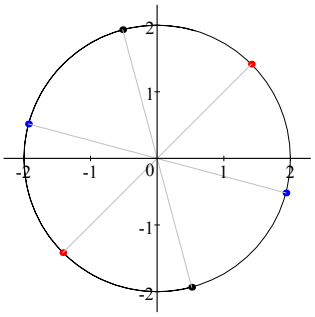
a) $z = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ ha modulo 8 e argomento principale $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Quindi le sue radici terze hanno modulo 2 e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$. Quindi $w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, mentre l'espressione algebrica delle restanti radici si ricava usando le formule di addizione per coseno e seno e osservando che w_{-1} è simmetrica di w_1 rispetto alla bisettrice del I-III quadrante: $w_1 = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $w_{-1} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.



esercizio (a)



esercizio (b)



esercizio (c)

b) $z = 64i$ ha modulo 64 e argomento principale $\theta = \pi/2$. Quindi le sue radici seste hanno modulo $\sqrt[6]{64} = 2$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ con $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
Per trovare facilmente la loro espressione algebrica, osservare che

- per ognuno dei $k < 0$ si ha $w_k = -w_{k+3}$
- per $k = 2$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} \Longrightarrow w_2 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = -w_{-1}$
- per $k = 1$, $\theta_1 = \theta_2 - \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow$

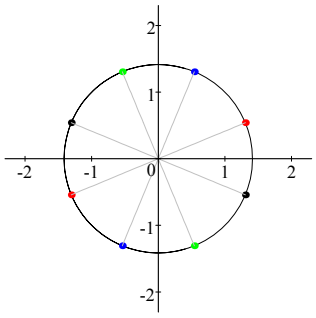
  $w_1 = 2\left[\cos\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta_2 - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = -w_{-2}$
- per $k = 0$, $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_1 \Longrightarrow$

  $w_0 = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] = 2\left(\sin(\theta_1) + i\cos(\theta_1)\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = -w_{-3}$

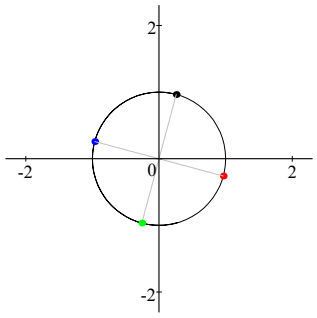
c) $z = -64i$ ha modulo 64 e argomento principale $\theta = -\pi/2$. Quindi le sue radici seste hanno modulo $\sqrt[6]{64} = 2$ e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ con $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
La loro espressione algebrica si ricava come sopra: $w_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = -w_{-2}$;
$w_0 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} = -w_3$; $w_2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = -w_{-1}$

d) $z=-16$ ha modulo 16 e argomento principale $\theta=\pi$. Quindi le sue radici ottave hanno modulo $\sqrt[8]{16}=\sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$ con $k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\right)\right]$. La loro espressione algebrica si ricava applicando le formule di bisezione (vedi MiniMat Lezione 7) per trovare $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e osservando che

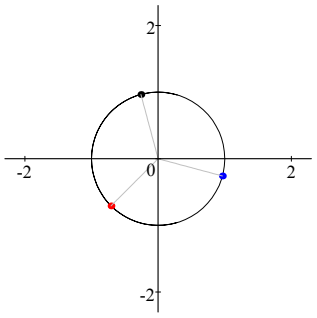
- per ognuno dei $k<0$ si ha $w_k=-w_{k+4}$
- per $k=0$, $\theta_0=\frac{\pi}{8}\Longrightarrow w_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta_0\right)+i\sin\left(\theta_0\right)\right)=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-w_{-4}$
- per $k=1$, $\theta_1=\frac{\pi}{2}-\theta_0\Longrightarrow w_1=\sqrt{2}\left(\sin\left(\theta_0\right)+i\cos\left(\theta_0\right)\right)=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-w_{-3}$
- per $k=2$, $\theta_2=\frac{\pi}{2}+\theta_0\Longrightarrow w_2=\sqrt{2}\left(-\sin\left(\theta_0\right)+i\cos\left(\theta_0\right)\right)=-\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-w_{-2}$
- per $k=3$, $\theta_3=\pi-\theta_0\Longrightarrow w_3=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\theta_0\right)+i\sin\left(\theta_0\right)\right)=-\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-w_{-3}$



esercizio (d)



esercizio (e)



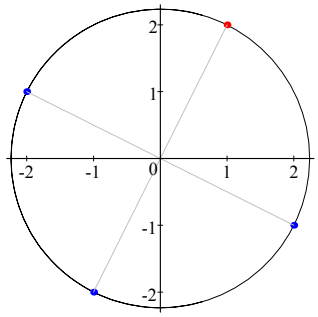
esercizio (f)

e) $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ha modulo 1 e argomento principale $\theta=-\frac{\pi}{3}$. Quindi le sue radici quarte hanno modulo 1 e argomento principale $\theta_k=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$ con $k=-1,0,1,2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k=\cos\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)$.
La loro espressione algebrica si ricava come sopra:
$w_0=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=-w_2$;
$w_1=-\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=-w_{-1}$.

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ha modulo 1 e argomento principale $\theta=-\frac{\pi}{4}$. Quindi le sue radici terze hanno modulo 1 e argomento principale $\theta_k=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}$ con $k=-1,0,1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k=\cos\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)$.

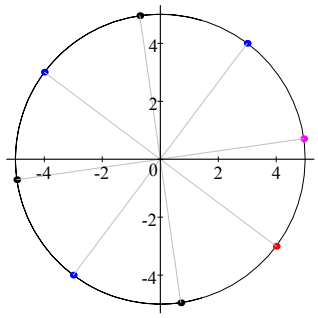
La loro espressione algebrica si ricava osservando che $\theta_{-1} = -\frac{3\pi}{4}$ e quindi $w_{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e inoltre w_1 è simmetrica di w_0 rispetto alla bisettrice del I-III quadrante.
Quindi $w_0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Sol. Ex. 14.7



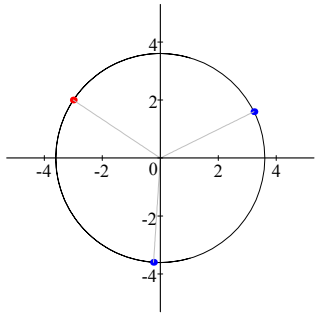
Se $z_0 = 1 + 2i$ è una radice quarta di un numero complesso α, le altre radici quarte si trovano sulla stessa circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio $\sqrt{5}$): una sarà la sua opposta $z_2 = -1 - 2i$, le altre due stanno in direzione ortogonale a queste e quindi sono $z_1 = -2 + i$ e $z_3 = 2 - i$.

Sol. Ex. 14.8



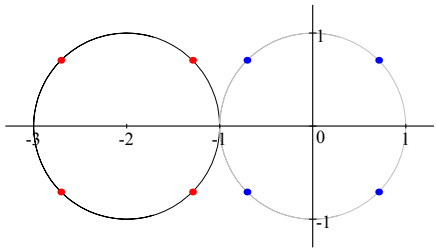
Se $z_0 = 4 - 3i$ una radice ottava di un numero complesso α, le altre radici ottave si trovano ai vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio 5): una sarà la sua opposta $z_4 = -4 + 3i$, altre due stanno in direzione ortogonale a queste e quindi sono $z_2 = 3 + 4i$ e $z_3 = -3 - 4i$. Vi sono poi le radici ruotate di $\pi/4$ rispetto a queste: $z_1 = \frac{7\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_5 = -\frac{7\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{7\sqrt{2}}{2}$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Sol. Ex. 14.9



Se $z_0 = -3 + 2i$ una radice terza di un numero complesso α, le altre radici terze si trovano ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio $\sqrt{13}$): quindi sono ruotate di $2\pi/3$ e $-2\pi/3$ rispetto a z_0:
$z_1 = \left(-3 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,
$z_2 = \left(-3 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(-1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Sol. Ex. 14.10 Posto $x+2=z$, si ha $z^4+1=0$ se e solo se z è una radice quarta di -1. Si vede quindi che le radici del polinomio $P(x)=(x+2)^4+1$ nel piano di Argand-Gauss risultano traslate di tali radici quarte nella direzione dell'asse reale e nel verso negativo di 2 unità.



Le 4 radici di -1 sono $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Di conseguenza
$x_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$x_2=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}$
sono le radici (a due a due coniugate) del polinomio $P(x)$ che si può quindi scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti complessi di primo grado come segue:

$$(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3).$$

Tenendo conto che $x_3=\overline{x_0}$ e $x_2=\overline{x_1}$ si vede che
$P(x)=[(x-x_0)\,(x-\overline{x_0})]\cdot[(x-x_1)\,(x-\overline{x_1})]=\left[x^2-2\,(\mathrm{Re}\,x_0)\,x+|x_0|^2\right]\cdot\left[x^2-2\,(\mathrm{Re}\,x_1)\,x+|x_1|^2\right]=$
$=\left[x^2-\left(\sqrt{2}-4\right)x+5-2\sqrt{2}\right]\cdot\left[x^2-\left(\sqrt{2}+4\right)x+5+2\sqrt{2}\right]$.

Sol. Ex. 14.11

a) $z^2+2z+3=0\Leftrightarrow(z+1)^2+2=0\Leftrightarrow(z+1)^2=-2\Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{2}i$

b) $z^2+2iz-3=0\Leftrightarrow(z+i)^2-2=0\Leftrightarrow z=-i\pm\sqrt{2}$

c) $iz^2+(1+i)z+1=0\Leftrightarrow -i\,(iz^2+(1+i)z+1)=0\Leftrightarrow z^2+(1-i)z-i=0$ cioè, applicando la proprietà che lega i coefficienti di un'equazione di secondo grado alle sue radici: $z=-1$ oppure $z=i$.
Se non si ricorda tale proprietà basta proseguire nel seguente modo:
$\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{2}(1-i)z+\frac{1}{4}(1-i)^2+\frac{1}{2}i-i=0\Leftrightarrow\left[z+\frac{1}{2}(1-i)\right]^2=\frac{1}{2}i\Leftrightarrow z+\frac{1}{2}(1-i)=\pm\frac{1}{2}\,(1+i)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z=-1$ oppure $z=i$.

d) $z^6+2z^3-1=0\Leftrightarrow z^3=-1\pm\sqrt{2}$. Si tratta dunque di trovare le radici cubiche complesse di due numeri reali, uno, $a=-1+\sqrt{2}$, positivo (e quindi di argomento 0), l'altro, $b=-1-\sqrt{2}$, negativo (e quindi di argomento π). Le radici di a sono $z_0=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$, $z_1=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $z_2=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Quelle di b sono $z_3=-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, $z_4=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $z_6=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Dunque ci sono 6 soluzioni distinte.

e) $2|z|^2=z^3$ ha tra le sue soluzioni $z=0$. Se $z\neq0$ si può scrivere in forma trigonometrica: $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ e quindi l'equazione diventa: $2|z|^2=|z|^3\,(\cos3\theta+i\sin3\theta)$, cioè $|z|\,(\cos3\theta+i\sin3\theta)=2$. Questo succede se e solo se $|z|=2$ e $3\theta=2k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 3 radici distinte ottenute per $k=0,1,-1$: $z_0=2$, $z_1=-1+i\sqrt{3}$ e $z_{-1}=-1-i\sqrt{3}$. Dunque l'equazione ha 4 soluzioni distinte.

f) $z^2+\overline{z}=0$ ha tra le sue soluzioni $z=0$. Se $z\neq 0$, si può si può moltiplicare per z ottenendo l'equazione equivalente: $z^3+|z|^2=0$ e sostituire: $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$. Come sopra si arriva all'equazione: $|z|\,(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=-1$. Questo succede se e solo se $|z|=1$ e $3\theta=\pi+2k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 3 radici distinte ottenute per $k=0,1,-1$: $z_0=-1$, $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_{-1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque l'equazione ha 4 soluzioni distinte.

g) $(\overline{z})^4=|z|\Leftrightarrow\overline{(\overline{z})^4}=\overline{|z|}\Leftrightarrow(z)^4=|z|$. Tra le sue soluzioni c'è $z=0$. Se $z\neq 0$, si può sostituire: $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$. Si arriva all'equazione: $|z|^3\,(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=1$. Questo succede se e solo se $|z|=1$ e $4\theta=2k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 4 radici distinte ottenute per $k=-1,0,1,2$: $z_0=1$, $z_1=i$ e le loro opposte $z_2=-1$ e $z_{-1}=-i$. Dunque l'equazione ha 5 soluzioni distinte.

h) $iz^3=\overline{z}$ ha tra le sue soluzioni $z=0$. Se $z\neq 0$, si può moltiplicare per $-iz$ ottenendo l'equazione equivalente: $z^4=-i|z|^2$ e sostituire: $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$. Come sopra si arriva all'equazione: $|z|^2\,(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=-i$. Questo succede se e solo se $|z|=1$ e $4\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 4 radici distinte ottenute per $k=-1,0,1,2$: $z_0=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $z_1=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e le loro opposte $z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $z_{-1}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Dunque l'equazione ha 5 soluzioni distinte.

i) Posto $z=x+iy$ (con $x,\,y\in\mathbb{R}$) l'equazione $i\,\mathrm{Re}(z)+z^2=|z|^2+1$ diventa
$ix+(x+iy)^2=x^2+y^2+1$ cioè $-(2y^2+1)+i\,(x+xy)=0$.
Questo succede se e solo se è verificato il sistema $\begin{cases}2y^2+1=0\\ x\,(1+y)=0\end{cases}$.
Ma la prima equazione è impossibile e quindi l'equazione assegnata è impossibile.

j) Posto $z=x+iy$ (con $x,\,y\in\mathbb{R}$) l'equazione $z+3i+(\mathrm{Re}(z))(i+(\mathrm{Im}(z))^2)=0$ diventa $x+(3+y)\,i+x\,(i+y^2)=0$ cioè $x+xy^2+(3+x+y)\,i=0$. Questo succede se e solo se è verificato il sistema $\begin{cases}x+xy^2=0\\ 3+x+y=0\end{cases}$, cioè se risulta $\begin{cases}x=0\\ y=-3\end{cases}$ oppure $\begin{cases}1+y^2=0\\ 3+x+y=0\end{cases}$.
Il secondo sistema è impossibile e quindi l'equazione ha l'unica soluzione $z=-3i$.

Sol. Ex. 14.12 [1] Posto $z=x+iy$, con $x,y\in\mathbb{R}$, si ha

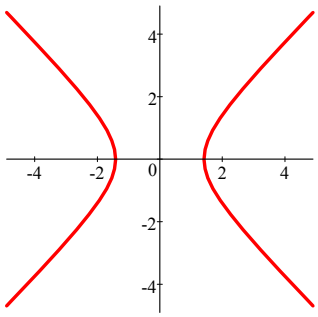
a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x<2\pi\}$ è la striscia di piano compresa tra l'asse y incluso e la retta (ad esso parallela) $x=2\pi$, esclusa.

b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq -y<2\pi\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-2\pi<y\leq 0\}$ è la striscia di piano compresa tra l'asse x incluso e la retta (ad esso parallela) $y=-2\pi$, esclusa.

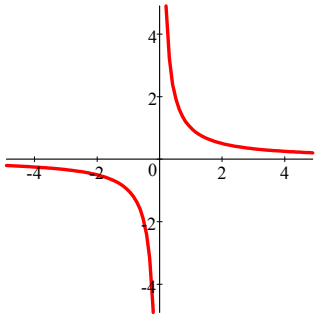
[1] In quasi tutte le soluzioni gli insiemi sono stati descritti solo a parole: si consiglia di provare però a tracciare i disegni corrispondenti.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 2\}$ è una iperbole equilatera che ha per assi gli assi cartesiani, che taglia l'asse reale nei punti di ascissa $\pm\sqrt{2}$ e ha asintoti $y = x$ e $y = -x$.

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2xy = 2\}$ è una iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi cartesiani, per assi le bisettrici del I-III e II-IVquadrante e taglia il primo nei punti di ascissa ± 1.



$C = \{z : \quad \mathrm{Re}(z^2) = 2\}$



$D = \{z : \ \mathrm{Im}(z^2) = 2\}$

e) $|z^3| < 2 \Leftrightarrow |z|^3 < 2 \Leftrightarrow |z| < \sqrt[3]{2}$. Quindi $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < \sqrt[3]{4}\}$ è l'<u>interno del cerchio</u> con centro nell'origine e raggio $\sqrt[3]{2}$ (circonferenza esclusa).

f) $F = \{z : \ |z| > \frac{1}{2}\}$ rappresenta tutti i punti del <u>piano privato del cerchio</u> con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{2}$ ma non della corrispondente circonferenza.

g) Se è possibile scrivere il suo reciproco, z è $\neq 0$. Quindi $G = \{z : \ 0 < |z| \leq \frac{1}{2}\}$ rappresenta il <u>cerchio</u> con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{2}$ compresa la circonferenza, ma <u>privato del centro</u>.

h) Trattandosi di disuguaglianze tra numeri reali positivi, $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 2$ equivale a $\begin{cases} |z-1| \leq 2\,|z+1| \\ z \neq -1 \end{cases}$.

Quindi $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4\left[(x+1)^2 + y^2\right] \text{ e } (x,y) \neq (-1,0)\} =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 \geq 0 \text{ e } (x,y) \neq (-1,0)\}.$$

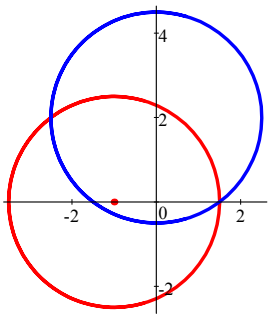
Questo è l'insieme di tutti i punti del <u>piano privato del cerchio</u> con centro in $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{4}{3}$ ma <u>non della corrispondente circonferenza</u> (il punto $(-1,0)$ resta escluso automaticamente, essendo interno al cerchio).

Sol. Ex. 14.13

$\dfrac{z+1-i}{z+1} = 1 - \dfrac{i}{z+1}$ è reale se e solo se lo è $\dfrac{i}{z+1} = \dfrac{i \cdot \overline{(z+1)}}{(z+1)\,\overline{(z+1)}} = \dfrac{1}{|z+1|^2}\,(\overline{z} \cdot i + i)$ cioè se e solo se lo è $(\overline{z} \cdot i + i)$. Posto $z = x + iy$, si ha $\overline{z} \cdot i + i = (x+1)\,i + y$: questo è un numero reale se e solo se $x + 1 = 0$. Quindi il luogo dei punti che per cui è reale il numero assegnato è la retta (parallela all'asse y) di equazione $x = -1$.

Sol. Ex. 14.14

La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z+1| \le \frac{5}{2} \\ |z-2i| > \frac{5}{2} \end{cases}$



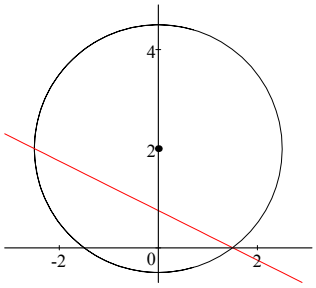
cioè, ponendo $z = x + iy$, $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \le \frac{25}{4} \\ x^2 + (y-2)^2 > \frac{25}{4} \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta il cerchio di centro $(-1, 0)$ e raggio $\frac{5}{2}$ (circonferenza inclusa), la seconda rappresenta il piano privato del cerchio di centro $(0, 2)$ e raggio $\frac{5}{2}$ e della corrispondente circonferenza. La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè la "mezzaluna" che resta nel primo cerchio una volta tolto il secondo, bordi del primo cerchio (rosso in figura) compresi, bordi del secondo (blu in figura) esclusi.

Sol. Ex. 14.15

a) La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z+1| \le |z-2i| \\ |z-2i| < \frac{5}{2} \end{cases}$

cioè, ponendo $z = x + iy$,

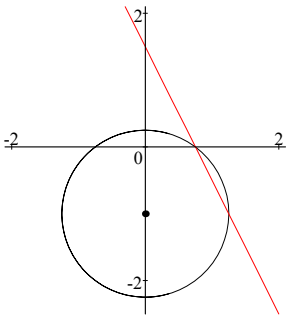


$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \le x^2 + (y-2)^2 \\ x^2 + (y-2)^2 < \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 3 \le 0 \\ x^2 + (y-2)^2 < \frac{25}{4} \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta il semipiano che giace al di sotto della retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ retta compresa; la seconda il cerchio di centro $(0, 2)$ e raggio $\frac{5}{2}$ (circonferenza esclusa). La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè il più piccolo tra i due segmenti circolari (= parti del cerchio delimitate da una corda) presenti in figura (corda compresa, tranne gli estremi).

b) La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z-2| \le |z+i| \\ |z+i| < \frac{5}{4} \end{cases}$

cioè, ponendo $z = x + iy$,



$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le x^2 + (y+1)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 < \frac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 3 \ge 0 \\ x^2 + (y+1)^2 < \frac{25}{16} \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta il semipiano che giace al di sopra della retta di equazione $y = -2x + \frac{3}{2}$ retta compresa; la seconda il cerchio di centro $(0, -1)$ e raggio $\frac{5}{4}$ (circonferenza esclusa). La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè il più piccolo tra i due segmenti circolari presenti in figura (corda compresa, tranne gli estremi).

Sol. Ex. 14.16

a) $A = \left\{ z : \quad 1 < |z| < 2; \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\}$: la prima disuguaglianza dice che si devono prendere punti interni (senza contorni) della corona circolare con centro nell'origine e raggi 1 e 2; la seconda dice che i punti di A devono anche appartenere all'angolo convesso formato dalle due semirette aventi origine nell'origine del piano di Argand-Gauss che formano con l'asse reale angoli (orientati positivamente) di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$: in totale quindi si tratta del settore di corona circolare indicato nella figura (a), privato dei contorni.

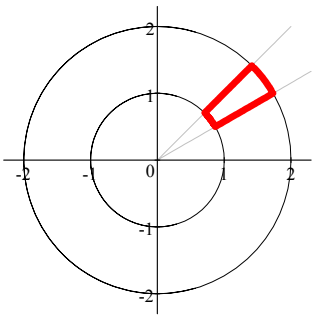


figura (a)

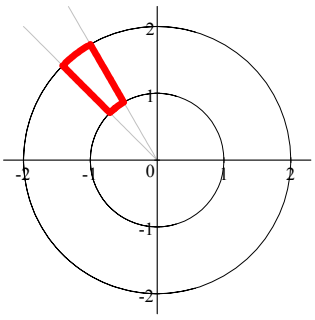


figura (b)

b) Tenuto conto che il prodotto iz ha modulo $|iz| = |z|$ e argomento $\arg iz = \frac{\pi}{2} + \arg z$, si vede che i punti della regione $B = \{iz : \quad z \in A\}$ sono quelli ottenuti ruotando attorno all'origine di $\frac{\pi}{2}$ in verso antiorario il settore descritto nel punto precedente (vedi figura (b)).

c) Tenuto conto che $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ per ogni z che non sia un un numero reale ≤ 0 e se $\arg(z) = \pi$ la seconda disuguaglianza è sicuramente valida, le due condizioni $\begin{cases} |z-1| < \left|\frac{z}{2}\right| \\ 3\arg(z) > \frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z}) \end{cases}$ possono essere riscritte come $\begin{cases} 2|z-1| < |z| \\ 4\arg(z) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ cioè, posto $z = x+iy$, $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 8x + 4 < 0 \\ \frac{\pi}{8} < \arg(z) \leq \pi \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta i punti interni al cerchio di centro $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{2}{3}$, la seconda rappresenta l'angolo compreso tra la semiretta con origine nell'origine del piano di Argand-Gauss inclinata di $\frac{\pi}{8}$ rispetto all'asse x (esclusa) il semiasse reale negativo (compreso). Dunque C è il segmento circolare più piccolo tra i due presenti in figura privato dei bordi.

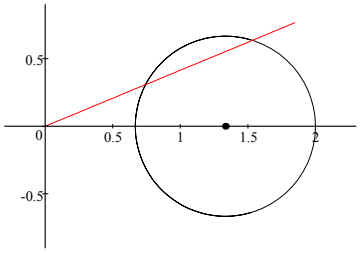


figura (c)

Soluzione degli esercizi teorici

Sol. Ex. 14.17. Dire che w è una radice n-esima del numero complesso z equivale a dire che $w^n = z$. Deve allora essere vero che $\overline{w^n} = \overline{z}$ e poiché $\overline{w^n} = (\overline{w})^n$ si ha $(\overline{w})^n = \overline{z}$ cioè $\overline{w}$ è una radice n-esima di $\overline{z}$. Il viceversa si prova allo stesso modo.

Sol. Ex. 14.18

Sostituendo $z = x + iy$, $\alpha = \operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha$ e $\beta = \operatorname{Re}\beta + i\operatorname{Im}\beta$ nell'uguaglianza $|z-\alpha| = |z-\beta|$ si trova: $(x - \operatorname{Re}\alpha)^2 + (y - \operatorname{Im}\alpha)^2 = (x - \operatorname{Re}\beta)^2 + (y - \operatorname{Im}\beta)^2$ cioè
$2(\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta)\,x + 2(\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta)\,y = (\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2 - (\operatorname{Re}\beta)^2 - (\operatorname{Im}\beta)^2$.
Se $\alpha \neq \beta$ almeno uno dei due coefficienti $(\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta)$ e $(\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta)$ è non nullo e quindi l'equazione rappresenta una retta.
Se $\alpha = \beta$ si ha un'identità, che quindi rappresenta l'intero piano di Argand-Gauss.

Sol. Ex. 14.19 Notiamo che $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ e quindi i due numeri z^{-1} e $\overline{z}$ hanno ugual argomento (eventualmente se $|z| \neq 1$ hanno modulo diverso). Quindi le relazioni da verificare equivalgono alle $\arg(z\,\overline{z}) = \arg(z)\arg(\overline{z})$, $\arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z) + \arg(\overline{z}) \bmod 2\pi$, $\arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z)\arg(\overline{z}) \bmod 2\pi$.
È immediato verificare che la prima e l'ultima sono false poiché $z\,\overline{z}$ è un numero reale positivo e quindi il suo argomento principale è 0, mentre il prodotto dei due argomenti principali non lo è, neppure a meno di multipli di 2π se z non è un numero reale positivo.
La seconda relazione è verificata da ogni numero complesso non nullo: infatti nel piano di Argand-Gauss z e $\overline{z}$ sono rappresentati da punti simmetrici rispetto all'asse reale col quale formano quindi angoli orientati opposti: si ha addirittura $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ e quindi $\arg(z) + \arg(\overline{z}) = 0 = \arg(z\,\overline{z})$ se z non è un numero reale negativo. Se invece z è un numero reale negativo si ha $\arg(z) = \pi$ e anche $\arg(\overline{z}) = \pi$ (ricordiamo che l'argomento principale varia in$(-\pi, \pi]$): quindi $\arg(z) + \arg(\overline{z}) = 2\pi = \arg(z\,\overline{z}) + 2\pi$ cioè vale la congruenza ma non l'uguaglianza.

Sol. Ex. 14.20

$z + \overline{z} + |z|^2 = 2\operatorname{Re} z + |z|^2 \leq 0$ è una disequazione tra numeri reali, risolubile (tra le sue soluzioni c'è certamente $z = 0$; in realtà le sue soluzioni nel piano di Argand-Gauss sono rappresentate da un cerchio).
$z - \overline{z} + |z|^2 = 2i\operatorname{Im} z + |z|^2 \geq 0$ non ha significato, poiché se z non è reale $2i\operatorname{Im} z + |z|^2$ è un numero complesso: e nei numeri complessi non c'è la relazione di $\geq$.
$|2z| < |z - \overline{z}| = |2i\operatorname{Im} z| = 2\,|\operatorname{Im} z|$ è una disequazione tra numeri reali, impossibile, poiché $|\operatorname{Im} z|$ rappresenta la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui $|z|$ rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa.