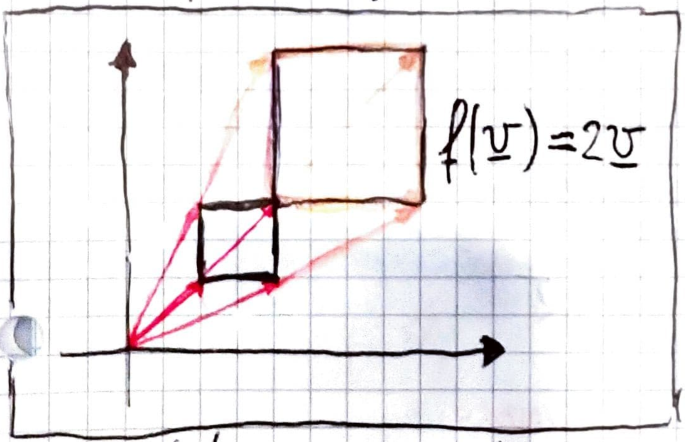
SOTTOSPAZIO AFFINE

Sia V uno spazio vettoriale, ed S un suo sottospazio vettoriale, S è un sottospazio affine di V definito come:

$$S = v_0 + W = \{v_0 + w \mid w \in W\}$$

dove v_0 è un qualsiasi elemento di V, e W è un sottospazio vettoriale di V (sottospazio di giacitura di S).
La dimensione del sottospazio affine è uguale a quella del sottospazio di giacitura: $\dim(S) = \dim(W)$.

Introduciamo questa struttura per parlare dell'omotetia, una particolare trasformazione geometrica sul piano o nello spazio (in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).



Ad ogni punto del nostro spazio vettoriale V (in questo caso $\mathbb{R}^2$) associamo un vettore (def. specula di spazio affine).

L'omotetia è un particolare tipo di applicazione lineare, che fa parte delle trasformazioni in $\mathbb{R}^2$ che fissano l'origine. In particolar modo è una trasformazione che preserva la direzionalità ma non le distanze. L'omotetia manda un vettore nel suo multiplo, ed è un endomorfismo. La matrice che rappresenta questo endomorfismo è diagonale.

Quindi dato un endomorfismo ne troviamo la matrice associativa, essendo un endomorfismo, le basi di dominio e codominio sono le stesse.

$$V = \{\underline{v}_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$$

$$W = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, v_n\} \subset V$$

$$f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$M_V(f) \quad \begin{array}{cccc} f(\underline{v}_1) & f(\underline{v}_2) & \dots & f(\underline{v}_n) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORE ED AUTOVALORE

La nozione di autovettore, si riferisce alle sole matrici quadrate, e nel caso delle matrici associate agli endomorfismi, queste saranno sempre quadrate.

Sia f una funzione tra due spazi vettoriali:

$$f : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$$

l'autovettore è un vettore non nullo, la cui immagine è il vettore stesso moltiplicato per uno scalare (chiamato autovalore).

$$\underline{v} \in V,\ v \neq \underline{0} : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

AUTOVETTORE AUTOVALORE

- Gli autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ_0 formano un sottospazio vettoriale detto autospazio relativo all'autovalore λ_0 e si indica con V_{λ_0}.

- Chiamiamo spettro di f, l'insieme degli autovalori di f.

DIAGONALIZZAZIONE

Come abbiamo già detto, per un endomorfismo possiamo scrivere una certa matrice rappresentativa scegliendo una base che genera lo spazio vettoriale. A basi diverse corrispondono matrici rappresentative diverse, che rappresentano però lo stesso endomorfismo.

Prendiamo per es. l'applicazione lineare definita come:

$$f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \quad ax^2+bx+c \mapsto (a+b)x^2+(a+b)x+2c$$

vediamo che per es:

① $f(x^2+x) = 2(x^2+x)$

② $f(x+1) = x+2$

Nel primo caso ci rendiamo conto che il vettore x^2+x è un autovettore relativo all'autovalore 2 poiché ricordiamo:

- $\underline{v} \neq \underline{0}$
- $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

Per trovare gli altri autovettori rispetto alla mappa f, dobbiamo trovare tutti i vettori $\neq \underline{0}$ che soddisfano $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, nel nostro esempio abbiamo:

$$(a+b)x^2+(a+b)x+2c = f(ax^2+bx+c) = \lambda(ax^2+bx+c)$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} a+b = \lambda a \\ a+b = \lambda b \\ 2c = \lambda c \end{cases}$$

Se guardiamo l'ultima equazione, $2c = \lambda c$, se $c \neq 0$ allora $\lambda = 2$ quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} a+b = 2a \\ a+b = 2b \\ 2c = 2c \end{cases} \Rightarrow a = b$$

Abbiamo capito quindi che tutti i polinomi con $a=b$, sono autovettori relativi all'autovalore 2.

Nel caso $c=0$ abbiamo invece:

$$\begin{cases} a+b = \lambda a \\ a+b = \lambda b \\ 0 = 0 \quad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K}} \end{cases}$$

ci concentriamo quindi sulle prime due equazioni da cui abbiamo:

$$\begin{cases} b = a(\lambda - 1) \\ a + a(\lambda-1) = \lambda(a(\lambda-1)) \end{cases} \Rightarrow a\lambda = \lambda^2 a - \lambda a \Rightarrow \lambda a(\lambda - 2) = 0$$

Ci sono 3 possibili soluzioni:

- $\lambda = 2$ (già visto)
- $a = 0$ dove il sistema diventa

$$\begin{cases} 0+b = \lambda 0 \\ 0+b = \lambda b \Rightarrow b=0 \quad \text{sol. } a=b=c=0 \\ 0 = \lambda 0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo il vettore nullo che non è un autovettore.

- $\lambda = 0$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a+b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -b \\ c = 0 \end{matrix}$$

Da ciò ne deriva che i polinomi del tipo ax^2-ax sono autovettori relativi all'autovalore 0 infatti:

$$f(ax^2-ax) = (a-a)x^2+(a-a)x = 0 = 0(ax^2-ax)$$

Abbiamo ottenuto che i seguenti vettori sono autovettori (e base):

$$b = \{x^2+x,\ x^2-x,\ 1\}$$

Se usiamo questi vettori come base dell'endomorfismo per generare la matrice associativa, otteniamo una matrice diagonale. Ricordiamo che una matrice è diagonale, se valgono le seguenti proprietà:

- LA MATRICE È QUADRATA
- $a_{ij} = 0 \quad \forall i,j,\ i \neq j$

Il motivo per cui la matrice associata costruita da questa base (b) è diagonale, è che la base è formata da autovettori.

PROPOSIZIONE: Sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare e V un $\mathbb{K}$-spazio finitamente generato

$M_V(f)$ è diagonale $\Leftrightarrow$ la base di V è formata da autovettori

Dimostrazione Supponiamo che $\mathcal{V} = \{\underline{v_1}, \dots \underline{v_n}\}$ sia una base fatta di autovettori. Questo significa che per ogni i, esiste $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tale che $f(\underline{v_i}) = \lambda_i \underline{v_i}$. Scriviamo allora la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{V}$:

$$f(\underline{v_1}) = \lambda_1 \underline{v_1} = \lambda_1 \underline{v_1} + 0\underline{v_2} + \dots + 0\underline{v_n}$$

quindi la prima colonna e' $\lambda_1, 0, \dots, 0$;

$$f(\underline{v_2}) = \lambda_2 \underline{v_2} = 0\underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} + \dots + 0\underline{v_n}$$

quindi la seconda colonna e' $0, \lambda_2, \dots, 0$;

$$\dots$$

$$f(\underline{v_n}) = \lambda_n \underline{v_n} = 0\underline{v_1} + 0\underline{v_2} + \dots + \lambda_n \underline{v_n}$$

quindi l'ultima colonna e' $0, 0, \dots, \lambda_n$.
Quindi la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{V}$, e'

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e quindi e' diagonale.

Dimostriamo ora l'altra implicazione: sia

$$M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che se conosciamo la matrice rappresentativa di un'applicazione lineare rispetto a delle basi note, conosciamo l'applicazione stessa. In particolare la prima colonna della matrice rappresentativa ci dice che

$$f(\underline{v_1}) = \lambda_1\underline{v_1} + 0\underline{v_2} + \ldots + 0\underline{v_n}$$

quindi $f(\underline{v_1}) = \lambda_1\underline{v_1}$.
La seconda colonna della matrice rappresentativa ci dice che

$$f(\underline{v_2}) = 0\underline{v_1} + \lambda_2\underline{v_2} + \ldots + 0\underline{v_n}$$

quindi $f(\underline{v_2}) = \lambda_2\underline{v_2}$ e cosi' via.
Quindi tutti i vettori della base $\mathcal{V}$ sono autovettori.

Diciamo che un endomorfismo f di V è diagonalizzabile, se esiste una base di V formata tutta da autovettori di f.

PROCEDIMENTO PER STABILIRE SE UN ENDOMORFISMO È DIAGONALIZZABILE

1. TROVARE UNA BASE DI AUTOVETTORI

1a. IDENTIFICHIAMO GLI AUTOVALORI (SPETTRO) PER RICAVARE GLI AUTOVETTORI.

1b. TROVIAMO LO SPETTRO SAPENDO CHE GLI AUTOVALORI SONO GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO.

$$\boxed{P_f(\lambda) := \det\left(M_v(f) - \lambda \mathbb{I}\right)}$$

INCOGNITA — MATRICE IDENTITÀ

GLI AUTOVALORI SONO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DI $P_f(\lambda) = 0$.

2. STABILIRE SE L'ENDOMORFISMO È DIAGONALIZZABILE

- Se $P_f(\lambda)=0$ ha n soluzioni distinte, allora f è diagonalizzabile
- Se $P_f(\lambda)=0$ ha meno di n soluzioni anche se le si calcola con la loro molteplicità, allora f NON è diagonalizzabile.
- Se $P_f(\lambda)=0$ ha alcune soluzioni coincidenti, ma contandole con la loro molteplicità ne ha n, allora non possiamo concludere né che f sia diagonalizzabile, né che non lo sia.

MOLTEPLICITÀ

La molteplicità algebrica di un autovalore λ indica quante volte l'autovalore annulla il polinomio caratteristico.

ES.

$$P_f(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

gli autovalori che annullano il polinomio caratteristico sono due $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$.

Questi autovalori hanno una molteplicità algebrica differente:

- λ_0 annulla il polinomio per $(1-\lambda)$ e $(\lambda-1)$
- λ_1 annulla il polinomio per $(\lambda+1)$

di conseguenza la $m_a(\lambda_0) = 2$ e la $m_a(\lambda_1) = 1$.

La molteplicità geometrica di un autovalore λ indica il numero di autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore λ.

È cioè la dimensione dell'autospazio dell'autovalore λ.

$$V_\lambda := \{ \underline{v} \in V \text{ t.c. } f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \}$$

$$m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$$

Teorema Sia $f \in End(V)$, $\dim(V) = n$, $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ lo spettro di f (l'insieme degli autovalori). Allora

- f diagonalizzabile se e solo se esiste una base $\mathcal{V}$ di V formata da autovettori di f;
- Se f ha n autovalori distinti (cioe' $P_f(t) = 0$ ha n soluzioni distinte) allora f e' diagonalizzabile;
- Se gli autovalori di f, anche contati con la loro molteplicita', sono meno di n (cioe' se $P_f(t) = 0$ ha meno di n soluzioni, contate con la loro molteplicita') allora f non e' diagonalizzabile. Quindi se $a(\lambda_1) + a(\lambda_2) + \dots + a(\lambda_k) < n$ allora f non e' diagonalizzabile.
- Se
$$a(\lambda_1) + a(\lambda_2) + \dots + a(\lambda_k) = n$$
(cioe' se $P_f(t) = 0$ ha n soluzioni contate con la loro molteplicita') allora
$$f \text{ e' diagonalizzabile } \Leftrightarrow a(\lambda_i) = g(\lambda_i),\ \forall i = 1, \dots k.$$
Se $a(\lambda_i) = 1$ allora $g(\lambda_i) = 1$ (quindi e' necessario verificare $a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ solo per i λ_i tali che $a(\lambda_i) > 1$)
- Se f e' diagonalizzabile, la matrice diagonale che lo rappresenta rispetto a una certa base ha sulla diagonale gli autovalori λ_i (che appaiono con la molteplicita' $a(\lambda_i)$)